БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ВЪРХУ ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ ЗА ЕДНА КЛАСА ЕЛИПТИЧНИ УРАВНЕНИЯ, ИЗРАЖДАЩИ СЕ ВЪВ ВЪТРЕШНОСТТА НА ОБЛАСТТА В ПАРАБОЛИЧНИ И В УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Иван Райчинов

В тази работа ще разгледаме задачата на Дирихле за една класа линейни уравнения от втори ред с две независими променливи, които около границата на разглежданата област са елиптични, а в нейната вътрешност могат да се израждат в параболични уравнения и в уравнения от първи ред.

Първите изследвания в това направление принадлежат на Келдиш [1], който в 1951 г. разгледа една класа от елиптичните уравнения, израждащи се върху части от границата в параболични, и пръв изясни как трябва да се поставя за такива уравнения задачата на Дирихле. Вземайки повод от тези резултати на Келдиш, редица други автори разгледаха за тези и други такива уравнения, освен задачата на Дирихле, още и задачата на Нойман и третата гранична задача, като при това получените резултати бяха обобщени за уравнения с произволен краен брой независими променливи [2], [3], [4], [5], [8], [9].

Доколкото ни е известно, за пръв път елиптични уравнения, които могат да се израждат в параболични в област, имаща измерението на цялата област, в която се разглежда уравнението, са изследвани от Фикера в работата му [6] (1956), където се изяснява коректността в смисъла на Адамар на постановката на задачата на Дирихле и се установяват необходими и достатъчни условия за съществуване на обобщено решение на тази задача (в „слаб" смисъл). В по-следващата си работа [7] този автор поставя основите на единната теория на елиптико-параболичните уравнения и за тях доказва съществуването на обобщено решение на третата гранична задача. При това не се изключват и уравненията от първи ред, но получените резултати не се отнасят до решения в класически смисъл.

Най-близо до нашата работа както по методи, така и по резултати е работата на Илин [9], в която се доказва съществуването на класически решения на задачата на Дирихле за елиптични и параболични уравнения, които могат да се израждат в област, имаща измерението на цялата област, в която се разглежда уравнението, при което части от контурите на тези две области могат да съвпадат. За разлика от нас обаче Илин разглежда уравнения, които не се израждат в уравнения от първи ред — случай, който е значително по-прост.

§ 1. Постановка на задачата и помощни бележки

Нека в двумерното евклидово пространство е дадена една ограничена и затворена област G с граница Γ, която в достатъчно малка околност на всяка своя точка може да се представи чрез уравнение от вида $x = x(t)$ (или $t = t(x)$), където функцията $x(t)$ (съответно $t(x)$) е еднократно гладка.

Да разгледаме в затворената област G уравнението

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + f, \tag{1.1}$$

коефициентите a, β, b, c и f на което са трикратно гладки функции на x и t, дефинирани в $\bar{G} = G + \Gamma$ и удовлетворяващи още следните условия:

а) $a(x, t) \geq 0$, $\beta(x, t) \geq 0$, ако $(x, t) \in G$;

б) множествата G_a и G_β, съставени от точките на $\bar{G}$, в които се анулират съответно функциите $a(x, t)$ и $\beta(x, t)$, са свързани с релацията $G_a \subset G_\beta$;

в) съществува затворена област $\bar{D} = D + S$ с граница S, която се подчинява на условията: в$_1$) $G_\beta \subset \bar{D} \subset G$, при което разстоянията между множеството G_β и S и между S и Γ са положителни числа; в$_2$) в $\bar{D}$ е изпълнено неравенството $a(x, t) \geqq \beta(x, t)$;

г) $c(x, t) > 0$ при $(x, t) \in \bar{G}$.

При така изброените предположения за областта G и за уравнението (1.1) задачата на Дирихле (в нейния класически смисъл) се поставя по следния начин:

Да се намери функция $u(x, t)$, която в областта G да бъде двукратно гладка и да удовлетворява уравнението (1.1), в затворената област $\bar{G}$ да бъде непрекъсната и върху границата Γ да удовлетворява условието

$$u(x, t)\,|_\Gamma = \theta(x, t), \tag{1.2}$$

където $\theta(x, t)$ е дадена непрекъсната функция, дефинирана върху Γ.

Ние ще покажем, че така поставена, задачата на Дирихле притежава единствено решение. За тази цел ще разгледаме задачата на Дирихле за елиптичното уравнение

$$L(u) \equiv (a + \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta + \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial u}{\partial x} - cu = f \tag{1.3}$$

с гранично условие

$$u_\varepsilon(x, t)\,|_\Gamma = \theta(x, t), \tag{1.4}$$

която, както е известно [11], при всяко $\varepsilon > 0$ притежава единствено решение $u_\varepsilon(x, t)$, и ще изучим поведението на решението u_ε, когато малкият параметър ε клони към нула.

В заключение на този параграф ще формулираме две леми, от които многократно ще се ползуваме по-нататък.

Лема 1.1. Ако една неотрицателна функция $a(x, y)$ притежава в дадена област G ограничени производни от втори ред, за всяка затворена област $\bar{Q} \subset G$ съществува константа k такава, че

(1.5) $$a_x^2+a_t^2 \le ka \quad ((x, t) \in Q).$$

Такова твърдение за функция с произволен краен брой аргументи е формулирано в [9] и е доказано в едномерния случай. За пълнота ние ще приведем доказателството за функция с две независими променливи.

Доказателство. Ясно е, че лемата ще бъде доказана, ако покажем, че за всяка затворена област $\bar{Q} \subset G$ съществуват константи k_1 и k_2 такива, че за $(x, t) \in Q$ да са изпълнени неравенствата

(1.6) $$a_x^2 \le k_1 a, \quad a_t^2 \le k_2 a.$$

Да допуснем противното: съществува такава затворена област $\bar{Q} \subset G$, че в нея поне едното, например първото, от неравенствата (1.6) е нарушено, както и да избираме константата k_1. Тогава на всяко естествено число n може да се съпостави такава точка $M_n(x_n, t_n)$, че да имаме

(1.7) $$a_x^2(M_n) > na(M_n).$$

От (1.7) и от неравенството $a \ge 0$ следва $a_x(M_n) \neq 0$. От друга страна, като вземем пред вид, че

$$a_x(M_n) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_n+h, t_n) - a(x_n, t_n)}{h}$$

веднага заключаваме, че и $a(M_n) \neq 0$. И наистина в противен случай, оставяйки h да клони към нула, чрез положителни стойности бихме получили $a_x(M_n) \ge 0$, а чрез отрицателни $a_x(M_n) \le 0$, т. е. бихме получили противоречието $a_x(M_n) = 0$.

Сега да фиксираме числото n така голямо, че точката $M_n\left(x_n - \frac{2a(M_n)}{a_x(M_n)}, t_n\right)$ да принадлежи на областта G и да бъде изпълнено неравенството $n > 4 \max\limits_{\bar{G}} |a_{x^2}|$. Това е възможно съгласно (1.7), понеже

$$\left|\frac{2a(M_n)}{a_x(M_n)}\right| = \frac{na(M_n)}{n\,|a_x(M_n)|} < \frac{2a_x^2(M_n)}{|a_x(M_n)|n} \le \frac{2\max |a_x|}{n}$$

и функциите a_x и a_{x^2} са ограничени.

Като приложим формулата на Тейлор към функцията $a(x, t)$ в точката M_n при нараствания на независимите променливи $\Delta x = -\frac{2a(M_n)}{a_x(M_n)}$ и $\Delta t = 0$, ще получим

$$a(M_n) = -a(M_n)\left[1 - 2a_{x^2}(M_n^*)\frac{a(M_n)}{a_x^2(M_n)}\right] \le -a(M_n)\left[1 - \frac{2\max|a_{x^2}|}{n}\right] < -\frac{1}{2}a(M_n) < 0,$$

което противоречи на условието $a(x, t) \ge 0$. Лема 1.1 е доказана.

Лема 1.2. Ако в една област $Q \subset G$ функцията $u(x, t)$ е двукратно гладка и удовлетворява неравенството $L(u) > 0$, в тази област $u(x, t)$ не притежава положителен локален максимум.

Доказателството на тази лема следва непосредствено от условията за съществуване на екстремум. Тя е в сила при произволен елиптичен или параболичен оператор $L(u)$ и е известна като „принцип за максимума“ ([2], [10]).

§ 2. Априорни оценки от Бернщейнов тип

Както вече казахме, добре известно е, че задачата на Дирихле за елиптичното уравнение (1.3) с гранично условие (1.4) притежава при всяко $\varepsilon>0$ точно едно решение $u=u_\varepsilon(x, t)$. Множеството от решенията $u_\varepsilon(x, t)$, които съответствуват на изменението на параметъра ε в интервала (0,1), да означим с Φ, а множеството от техните k-ти производни — с $\Phi_k\,(k=1, 2, 3)$.

Лесно се установява, че множеството Φ е равномерно ограничено по ε в затворената област $\bar{G}$, т. е. че съществува такава константа M, независеща нито от точката (x, t), нито от параметъра ε, за която е в сила неравенството

$$(2.1)\qquad u(x, t) \leq M \quad (u \in \Phi;\ (x, t) \in \bar{G}).$$

Наистина по контура Γ пред вид (1.4) функцията $|u|$ се мажорира от константата $M'=\max\limits_{\Gamma}|\theta(x, t)|$ и следователно, ако тя приема своята най-голяма стойност в точка от Γ, неравенството (2.1) е изпълнено. Ако пък функцията u приема своята най-голяма стойност в някоя точка $P \in G$, в тази точка $u(x, t)$ ще има локален екстремум и следователно в нея ще имаме

$$(2.2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}=0, \quad \operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\begin{cases}-1 & \text{при max.}\\ \ \ 1 & \text{при min.}\end{cases}$$

От (2.2), уравнението (1.3) и условието г) следва оценката

$$(2.3)\qquad u(x, t) \quad |u(P)| \leq \left|\frac{f}{c}\right| \leq \frac{\max|f|}{\min|c|}=M''$$

$(\min|c|<0$ съгласно с теоремата на Вайерщрас). И така една константа M с горните изисквания е $\max(M', M'')$. С това равномерната ограниченост на Φ е доказана.

По-нататък в този параграф ние ще докажем, че множествата $\Phi_k\,(k=1, 2, 3)$ също са равномерно ограничени в подобласти на G, намиращи се на произволно положително разстояние от контура Γ. За тази цел най-напред ще се възползуваме от разсъжденията и пресмятанията в [9] ([10]) при намиране на априорните оценки на Бернщейн в случая на елиптично (или параболично) уравнение, от които се вижда, че ако тези оценки се отнесат към нашето уравнение (1.3), те ще бъдат равномерни по ε във всяка затворена подобласт на G, за която е изпълнено неравенството $\alpha^2+\beta^2>0$. Именно нека G'_δ е една област с достатъчен гладък контур Γ_δ, съставен от една линия $\Gamma'_\delta \subset G \setminus \bar{D}$ на разстояние $\delta>0$ от границата Γ и една линия $\Gamma''_\delta \subset D$ и такава, че $G_\beta \subset D \setminus G'_\delta \setminus \Gamma''_\delta$. Понеже в затворената област $G'_\delta+\Gamma_\delta$ уравнението (1.1) е елиптично ($\alpha>0$, $\beta>0$), веднага заключаваме, че в G'_δ са в сила оценките на Бернщейн:

$$(2.4)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \leq M_1,$$

(2.5) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2<M_2,$$

(2.6) $$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2\le M_3,$$

където M_k $(k=1, 2, 3)$ са положителни константи, независещи както от ε, така и от точката $(x, t)\in G'_\delta$.

В такъв случай равномерната ограниченост по ε на множествата Φ_k ще бъде доказана за всяка област $G_\delta\subset G$, която се намира на произволно положително разстояние δ от контура Γ, ако докажем, че и в областта D са в сила оценки от вида (2.4), (2.5), (2.6). Ние ще направим това в следващите три точки на този параграф, където ще се занимаем поотделно с трите множества $\Phi_k (k=1, 2, 3)$.

2.1. Равномерна ограниченост на първите производни

Ще си послужим с помощната функция

(2.7) $$\omega_1(x, t)=e^{-pt}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]+qu^2+e^{r(T-t)},$$

където $T=\sup t$, а константите p, q, r са положителни параметри.

За нашите цели основно значение има обстоятелството, че тези параметри могат да се фиксират по такъв начин, че за всяко $\varepsilon\in(0, 1)$ и за всяка точка $(x, t)\in D$ да бъде изпълнено неравенството

(2.8) $$L(\omega_1)>0.$$

Ще изложим доказателството на това твърдение. Лесно се установява тъждеството

(2.9) $$L(uv)=vL(u)+uL(v)+2(a+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2(\beta+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+cuv,$$

което, приложено за функцията $\omega_1(x, t)$, ни дава

(2.10) $$L(\omega_1)=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]L(e^{-pt})+e^{-pt}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2(a+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right.$$
$$2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2+c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial t}L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+2(a+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2$$
$$\left.+c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]+2(\beta+\varepsilon)(-p)e^{-pt}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+ce^{-pt}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$
$$+q\left[2uL(u)+2(a+\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+cu^2\right]+L(e^{r(T-t)}).$$

Като диференцираме (1.3), намираме тъждествата

(2.11) $$\begin{aligned}L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)&=f_x+c_xu+b_x\frac{\partial u}{\partial x}-a_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta_x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)&=f_t+c_tu+b_t\frac{\partial u}{\partial x}-a_t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta_t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}\qquad (u\in\Phi),$$

с помощта на които от (2.10) след прости преобразования и изпущане на някои неотрицателни членове получаваме

$$
\begin{aligned}
(2.12)\qquad e^{pt}L(\omega_1) \geq {} & p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+2f_x\frac{\partial u}{\partial x}+2c_x u\frac{\partial u}{\partial x}+2b_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
& -2\alpha_x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\beta_x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2+2f_t\frac{\partial u}{\partial t}\\
& +2c_t u\frac{\partial u}{\partial t}+2b_t\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}-2\alpha_t\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\beta_t\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2\\
& -4p(\beta+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}-4p(\beta+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2qe^{pt}fu+2q(\alpha+\varepsilon)e^{pt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
& +2q(\beta+\varepsilon)e^{pt}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+(r-c)e^{pt+r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

За някои събираеми на (2.12) прилагаме по подходящ начин лема 1.1 и елементарното неравенство

$$
(2.13)\qquad \pm 2ab \geq -\delta a^2-\frac{1}{\delta}b^2,
$$

което очевидно е в сила при произволни a, b и $\delta>0$. Така, като се ползваме съществено от неравенството $\varepsilon>0$, получаваме

$$
\begin{aligned}
(2.14)\qquad e^{pt}L(\omega_1) \geq {} & p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-f_x^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-c_x^2u^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
& +2b_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\delta k(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
& +2(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2-f_t^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-c_t^2u^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-b_t^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
& -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\delta k(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2\\
& -2\delta(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2-\frac{2}{\delta}p^2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2\delta(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2-\frac{2}{\delta}p^2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\\
& -2qe^{pt}fu+2q(\alpha+\varepsilon)e^{pt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2q(\beta+\varepsilon)e^{pt}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+(r-c)e^{pt+r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

От (2.14), като вземем пред вид условието в), чрез подходящо групиране на събираемите намираме неравенството

$$
\begin{aligned}
(2.15)\qquad e^{pt}L(\omega_1) \geq {} & 2(\alpha+\varepsilon)(1-\delta k)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)(1-\delta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2\\
& +2(\beta+\varepsilon)[1-\delta(k+1)]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2+\left(p-2+2b_x-\frac{2}{\delta}-b_t^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
& +\left(p-3-\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+2(\alpha+\varepsilon)\left(qe^{pt}-\frac{p^2}{\delta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(qe^{pt}-\frac{p^2}{\delta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\\
& +\left[r-c-2qfue^{-r(T-t)}-(f_x^2+f_t^2+c_x^2u^2+c_t^2u^2)e^{-pt-r(T-t)}\right]e^{pt+r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Полученото неравенство (2.15) е в сила при произволна $\delta>0$. Ние ще се възползваме от това, като положим

$$\delta=\min\left(1, \frac{1}{k+1}\right), \tag{2.16}$$

което е константа както по отношение на точката $(x, t)\in D$, така и по отношение на ε. След това, като вземем пред вид, че функцията $2-2b_x+\frac{2}{\delta}-b_t^2$ при нашите условия е равномерно ограничена в затворената област $\bar{D}$, заключаваме, че положителният параметър p може да се фиксира така голям, че за всяко $\varepsilon\in(0, 1)$ и за всяка точка $(x, t)\in \bar{D}_1$ да бъдат изпълнени неравенствата

$$p-2+2b_x-\frac{2}{\delta}-b_t^2>0, \quad p-3-\frac{2}{\delta}>0. \tag{2.17}$$

След като сме фиксирали по такъв начин параметъра p и числото δ, очевидно можем да фиксираме (също независимо от $(x, t)\in D$ и ε) и положителния параметър q, така че да бъде изпълнено в $\bar{D}$ още неравенството

$$qe^{pt}-\frac{p^2}{\delta}\geqq 0. \tag{2.18}$$

Най-после, като вземем пред вид равномерната ограниченост на множеството Φ, по същия начин заключаваме, че и положителният параметър r може да се фиксира толкова голям, че за всяко $\varepsilon\in(0, 1)$ и за всяка точка $(x, t)\in D$ да бъде изпълнено още и неравенството

$$r-c-2qufe^{-r(T-t)}-(f_x^2+f_t^2+c_x^2u^2+c_t^2u^2)e^{-pt-r(T-t)}>0. \tag{2.19}$$

Следователно възможно е положителните параметри p, q и r да се изберат по такъв начин, че за всяко $\varepsilon\in(0, 1)$ и за всяка точка $(x, t)\in D$ да бъдат едновременно изпълнени трите неравенства (2.16), (2.17) и (2.18), при което, както се вижда от (2.15), функцията $\omega_1(x, t)$ ще удовлетворява в D неравенството (2.8). В такъв случай съгласно с принципа на максимума (лема 1.2) функцията $\omega_1(x, t)$ достига своята най-голяма стойност върху границата S. Следователно в сила е неравенството

$$e^{-pt}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]+qu^2+e^{r(T-t)}\leqq\max_S[\omega_1(x, t)] \quad ((x, t)\in D),$$

от което съгласно с (2.4) получаваме

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\leqq e^{pT}(e^{pT}M_1+M^2+e^{2rT}) \quad (x, t)\in \bar{D}) \tag{2.20}$$

С това равномерната ограниченост по ε в областта $\bar{D}$ на първите производни на решенията на уравнението (1.3) е доказана. От това, както вече пояснихме, следва тяхната равномерна ограниченост по ε и в произволна област G_δ, намираща се на положително разстояние δ от границата Γ.

Да разгледаме сега в $\bar{D}$ помощната функция

$$(2.21)\qquad \omega_2(x,t)=e^{-pt}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]+q\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]+e^{r(T-t)}.$$

Ние ще покажем, че и в този случай е възможно положителните параметри p, q и r да се изберат по такъв начин, че за всяко $\varepsilon\in(0,1)$ и за всяка точка $(x,t)\in D$ да бъде в сила неравенството (аналогично на (2.8))

$$(2.22)\qquad L(\omega_2)>0.$$

За тази цел от тъждествата (2.11) чрез подходящо диференциране за $u\in\Phi$ намираме тъждествата

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=f_{xx}+c_{xx}u+(2c_x+b_{xx})\frac{\partial u}{\partial x}+(2b_x-a_{xx})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2a_x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-2\beta_x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2},$$

$$(2.23)\qquad \begin{aligned} L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)&=f_{xt}+c_{xt}u+c_x\frac{\partial u}{\partial t}+(b_{xt}+c_t)\frac{\partial u}{\partial x}+(b_t-a_{xt})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\\ &-\beta_{xt}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a_t\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-a_x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}-\beta_t\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\,\partial x}-\beta_x\frac{\partial^3 u}{\partial t^3},\\ L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)&=f_{tt}+c_{tt}u+b_{tt}\frac{\partial u}{\partial x}+2c_t\frac{\partial u}{\partial t}-a_{tt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b_t\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\\ &-\beta_{tt}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2a_t\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}-2\beta_t\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\end{aligned}$$

С помощта на (2.9), (2.11) и (2.23), като изпущаме ненужните ни неотрицателни членове, получаваме неравенството

$$(2.24)\qquad \begin{aligned} e^{pt}L(\omega_2)&\geq p\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+p\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2+p\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+2f_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ &+2c_{xx}u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(2c_x+b_{xx})\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(2b_x-a_{xx})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-2\beta_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ &-4a_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-4\beta_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2}+2(a+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2\\ &+2f_{xt}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+2c_{xt}u\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+2c_x\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+2(b_{xt}+c_t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\\ &+2b_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2-2\beta_{xt}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2(b_t-a_{xt})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}-2a_x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\\ &-2a_t\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-2\beta_x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-2\beta_t\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2}+2(a+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2\\ &+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2+2f_{tt}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2c_{tt}u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+4c_t\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2b_{tt}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ &+4b_t\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2a_{tt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\beta_{tt}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2-4a_t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2\,\partial t}\end{aligned}$$

$$-4\beta_t\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{\partial^3u}{\partial t^3}+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right)^2-4p(\beta+\varepsilon)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}-4p(\beta+\varepsilon)\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^3u}{\partial x\,\partial t^2}$$

$$-4p(\beta+\varepsilon)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{\partial^3u}{\partial t^3}+2qe^{pt}f_x\frac{\partial u}{\partial x}+2qe^{pt}c_xu\frac{\partial u}{\partial x}+2qe^{pt}b_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$-2qe^{pt}\alpha_x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2qe^{pt}\beta_x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+2qe^{pt}(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2+2qe^{pt}(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial t}\right)^2$$

$$+2qe^{pt}f_t\frac{\partial u}{\partial t}+2qe^{pt}c_tu\frac{\partial u}{\partial t}+2qe^{pt}b_t\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}-2qe^{pt}\alpha_t\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

$$-2qe^{pt}\beta_t\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+2qe^{pt}(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2+(r-c)e^{pt+r(T-t)}.$$

По-нататък прилагаме няколко пъти неравенството (2.13), лема 1.1 и се ползваме от неравенството $\varepsilon>0$. При това обаче с цел да съкратим записването с буквата c, придружена с различни индекси, ще означаваме достатъчно големи положителни константи (независещи от ε и от точката $(x, t)\in\bar{D}$). Така например, като имаме пред вид оценките (2.1) и (2.20), ние означаваме с c_0 една такава положителна константа, която мажорира сбора от модулите на всички събираеми, които биха могли да се получат от (2.24) в резултат на прилагането на (2.13) и които съдържат само абсолютни константи, коефициенти на уравнението (1.1) и функции от фамилиите Φ и Φ_1 и фиксираните по долупосочения начин параметри p и q. Получаваме

$$e^{pt}L(\omega_2)\geqq p\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2+p\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2+p\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2-c_1\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$-c_2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2=\frac{2}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2-2\delta k(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)^2-\frac{2}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$-2\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x\partial t^2}\right)^2+2(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-c_3\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-c_4\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-c_5\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\delta k(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\delta k(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)^2$$

$$-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x\partial t^2}\right)^2$$

$$+2(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x\partial t^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2$$

$$-c_6\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-c_7\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-c_8\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2-\frac{2}{\delta}\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^2$$

$$-2\delta k(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)^2-\frac{2}{\delta}\left(\frac{\partial u^2}{\partial t^2}\right)^2-2\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right)^2$$

$$-\frac{2}{\delta}(\beta+\varepsilon)p^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2-2\delta(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)^2-\frac{2}{\delta}(\beta+\varepsilon)p^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)^2$$

$$2\delta(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)^2-\frac{2}{\delta}(\beta+\varepsilon)p^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2-2\delta(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2+2qe^{pt}(a+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2qe^{pt}(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2$$

$$+2qe^{pt}(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2+(r-c)\,e^{pt+r(T-t)}\quad c_0,$$

откъдето, като подредим и вземем пред вид условието в), ще получим

$$(2.25)\quad e^{pt}L(\omega_2)\geq(a+\varepsilon)(2-3\delta k)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2+[a+\varepsilon)(2-3\delta k)+2(\beta+\varepsilon)(1-\delta)]\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)^2$$

$$+(\beta+\varepsilon)(2-3\delta k-2\delta)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)^2+(\beta+\varepsilon)(2-3\delta k-2\delta)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2+(p-c_9)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$+(p-c_{10})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2+(p-c_{11})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2+2(a+\varepsilon)\,e^{pt}\left(q-\frac{p^2}{\varrho}e^{pT}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$+2(\beta+\varepsilon)\,e^{pt}\left(q-\frac{p^2}{\delta}e^{pT}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\,e^{pt}\left(q-\frac{p^2}{\delta}e^{pT}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2+(r-c_{12}-c_0e^{pT}).$$

От (2.25) е ясно, че е възможно да се фиксират последователно δ, p, q и r по такъв начин, че навсякъде в D и за всяко $\varepsilon\in(0, 1)$ да бъде в сила неравенството (2.22). При този избор на параметрите p, q и r съгласно с лема 1.2 ще имаме

$$\omega_2(x, t)\leq\max_S[\omega_2(x, t)]\quad((x, t)\in\bar{D}),$$

откъдето съгласно с (2.5) следва, че в G_δ при всяко $\varepsilon\in(0,1)$ е в сила оценката

$$(2.26)\qquad\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2<e^{pT}(M_2e^{pT}+qM_1+e^{2rT}),$$

което трябваше да се докаже.

2.3. Равномерна ограниченост на третите производни

Разсъжденията, които ще извършим в тази точка, са напълно аналогични на тези, които подробно изложихме в точките 2.1 и 2.2. Като се опираме на извършените там явни и подробни пресмятания, тук ние ще си послужим с един малко по-комплициран метод на изложение, като същевременно препоръчваме в случай на затруднение да се направи съответното съпоставяне с пресмятанията в 2.1 или 2.2. Впрочем наченки на такова изложение ние вече дадохме в 2.2. По същество този метод се състои в това, че в известни случаи (когато това е подходящо), като се ползваме от равномерната ограниченост в $\bar{D}$ на някои функции, ние ще ги миньорираме с достатъчно големи по абсолютна стойност отрицателни константи $-c_i$ (независещи както от точката $(x, t)\in D$, така и от малкия параметър ε). Освен това, за да стане удобно записването чрез „суми“, на места ние ще заменяме някои от константите (включително и константата нула) чрез една константа $-c_i$, която ще считаме избрана с доста тъчно голяма абсолютна стойност.

И така да разгледаме сега в $\bar{D}$ помощната функция

$$(2.27)\qquad \omega_3(x,t)=e^{-pt}\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^2+q\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k dt^s}\right)^2+e^{r(T-t)}.$$

Като вземем пред вид (2.23), равномерната ограниченост в $\bar{D}$ на фамилиите Φ, Φ_1, Φ_2, както и на коефициентите на уравнението (1.1), лесно заключаваме, че съществуват константи c_i такива, че в $\bar{D}$ да са изпълнени неравенствата

$$(2.28)\qquad L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)>-c_1-c_2\sum_{i,j=0}^{3}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\partial t^j}\right|\quad (s,k=0,1,2;\ s+k=2;\ i+j=3),$$

$$(2.29)\qquad L\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)>-c_3-c_4\sum_{i,j=0}^{3}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\partial t^j}\right|-c_5(|\alpha_x|+|\beta_x|$$

$$+|\alpha_t|+|\beta_t|)\sum_{i,j=0}^{3}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^{i+1}\partial t^j}\right|-O_{ks},$$

където $k,s=0,1,2,3$; $k+s=3$; $i+j=3$ и при това

$$O_{30}=O_{21}=0,\quad O_{12}=\left|\beta_x\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right|,\quad O_{03}=3\left|\beta_t\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right|.$$

Като приложим няколко пъти тъждеството (2.9), направим приведение и изпуснем някои неотрицателни членове, с помощта на неравенствата (2.28) и (2.29) от (2.27) получаваме неравенството

$$(2.30)\qquad e^{pt}L(\omega_3)>p\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^2+\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left[-2\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right|\left(c_3+c_4\sum_{\substack{i,j=0\\i+j=3}}^{3}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\partial t^j}\right|\right.\right.$$

$$\left.+c_5(|\alpha_x|+|\beta_x|+|\alpha_t|+|\beta_t|)\sum_{\substack{i,j=0\\i+j=3}}^{3}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^{i+1}\partial t^j}\right|+O_{ks}\right)+2(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{k+1}\partial t^s}\right)^2$$

$$\left.+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^k\partial t^{s+1}}\right)^2\right]+2(\alpha+\varepsilon)0+2(\beta+\varepsilon)(-p)\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}2\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\frac{\partial^4 u}{\partial x^k\partial t^{s+1}}$$

$$+qe^{pt}\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left[-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^k\partial t^s}\left(c_1+c_2\sum_{\substack{i,j=0\\i+j=3}}^{3}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\partial t^j}\right|\right)+2(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{k+1}\partial t^s}\right)^2\right.$$

$$+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^{s+1}}\right)^2\Bigg]+(r-c)\,e^{pt+r(T-t)}.$$

По-нататък посредством неравенството (2.13) осъществяваме едно такова разпределение на големите параметри, че да се получи съотношение на теглата, аналогично на това, което получихме в края на (2.1) и (2.2). Така получаваме

$$e^{pt}L(\omega_3)>p\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^2-c_6\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^2-c_7-\frac{c_8}{\delta}\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^2$$

$$-c_9\delta(\alpha+\varepsilon)\,k\sum_{\substack{i,j=0\\i+j=3}}^{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{i+1}\partial t^j}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)^2-\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)^2-\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2$$

$$-9\delta k(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)^2+2(\alpha+\varepsilon)\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{k+1}\partial t^s}\right)^2+2(\beta+\varepsilon)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)^2$$

$$-\frac{2(\beta+\varepsilon)p^2}{\delta}\sum_{k,s=0}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^{2**}-2\delta(\beta+\varepsilon)\sum_{k,s=0}^{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^k\partial t^{s+1}}\right)^{2*}-c_{10}(p,q)$$

$$-c_{11}(p,q)-c_{12}\sum_{\substack{i,j=0\\i+j=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\partial t^j}\right)^2+2qe^{pt}(\alpha+\varepsilon)\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{k+1}\partial t^s}\right)^2$$

$$+2qe^{pt}(\beta+\varepsilon)\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^{s+1}}\right)^2+(r-c)\,e^{pt+r(T-t)},$$

което след подходящо групиране на събираемите ни дава

$$e^{pt}L(\omega_3)>(\alpha+\varepsilon)(2-c_{13}\delta)\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{k+1}\partial t^s}\right)^2+(\beta+\varepsilon)(2-c_{14}\delta)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)^2 \tag{2.31}$$

$$+[p-c_{15}(\delta)]\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k\partial t^s}\right)^2+(\alpha+\varepsilon)\,e^{pt}[2q-c_{16}(\delta,p)]\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{k+1}\partial t^s}\right)^2$$

$$+(\beta+\varepsilon)\,e^{pt}[2q-c_{17}(\delta,p)]\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2+[r-c_{18}(\delta,p,q)]\,e^{pt+r(T-t)}.$$

---

* От тази сума, за да получим (2.31), отделяме събираемото, което отговаря на $k=0$, $s=3$, а за останалата ѝ част ползваме свойство в).

** Тук отделяме $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2$ и за останалите събираеми прилагаме свойство в).

От (2.31) е ясно, че положителните константи δ, p, q и r могат да се фиксират последователно по такъв начин, че да не зависят от ε и от точката $(x, t) \in \bar{D}$ и да бъде изпълнено неравенството

$$L(\omega_3) > 0. \tag{2.32}$$

И наистина, като се възползваме от обстоятелството, че в нашите разсъждения константата δ е съвсем произволно положително число, ние ще я изберем равна на $\min\left(\frac{2}{c_{13}}, \frac{2}{c_{14}}\right)$. Така първите две събираеми на неравенството (2.31) ще бъдат неотрицателни и константата $c_{15}(\delta)$, както и самата δ, ще бъде едно фиксирано число, независещо нито от ε, нито от $(x, t) \in D$. В такъв случай, ако изберем $p = c_{15}(\delta)$, константите $c_{17}(\delta, p)$ и $c_{16}(\delta, p)$ също ще бъдат конкретни числа, независещи от ε и от $(x, t) \in \bar{D}$. Следователно, ако положим

$$q = \max \left[\frac{1}{2} c_{16}(p, q), \frac{1}{2} c_{17}(p, q)\right],$$

ние ще си осигурим неотрицателността и на 3-то, 4-то и 5-то събираеми на дясната страна на (2.31), при което (това е много важно!) така избрано, числото q също не ще зависи от ε и точката $(x, t) \in \bar{D}$. След като сме вече фиксирали по този подходящ начин δ, p и q, константата $c_{18}(\delta, p, q)$ също ще бъде независима от ε и $(x, t) \in \bar{D}$. Така, ако най-накрая изберем (също независимо от ε и $(x, t) \in \bar{D}$) $r = 1 + c_{18}(\delta, p, q)$, нашата помощна функция $\omega_3(x, t)$ ще бъде окончателно конструирана и ще удовлетворява в $\bar{D}$ неравенството (2.32), което следва непосредствено от (2.31), понеже при направения избор на δ, p, q и r неговата лява страна съдържа само положителни събираеми.

От (2.32) съгласно лема 1.2, като вземем пред вид, че $S \subset G_\delta$ и приложим неравенството (2.6), ще получим

$$e^{pt}\omega_3(x, t) \leq \max_S \{e^{pt}\omega_3(x,t)\} = \max_S \left\{e^{pt}\left[e^{-pt}\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 + q\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 + e^{r(T-t)}\right]\right\} \leq e^{pT}[e^{pT}M_3 + qM_2 + e^{2rT}] \quad ((x, t) \in \bar{D}). \tag{2.33}$$

От (2.33), като изпуснем от лявата му страна неотрицателния израз

$$e^{pt}\left[q\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 + e^{r(T-t)}\right],$$

ще получим желаната оценка

$$\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 \leq e^{pT}[e^{pT}M_3 + qM_2 + e^{2rT}] \quad ((x, t) \in \bar{D}) \tag{2.34}$$

(тук дясната страна е константа, независеща от ε, x и t, защото такива са p, q, r, M_2 и M_3).

От (2.34) и (2.6) следва, че множеството Φ_3 от третите производни на решенията на уравнението (1.3) е равномерно ограничено по ε в произволна затворена област $G_\delta \subset G$.

2.4. Две забележки

Забележка 2.1. При допълнителни условия за гладкост на функциите a, β, b, c и f не е трудно да се докаже, че и множествата Φ_n (n — произволно естествено число), съставени от n-тите производни на решенията на уравнението (1.3), също са равномерно ограничени по ε в областта $G_\delta \subset G$. За тази цел достатъчно е да се приложи методът на пълната математична индукция, при което, след като се приеме, че множеството Φ_n е равномерно ограничено по ε в $\bar{D}$, да се използва помощната функция

$$\omega_{n+1} = e^{-pt} \sum_{\substack{k,s=0\\k+s=n+1}}^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 \quad q \sum_{\substack{k,s=0\\k+s=n}}^{n} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 + e^{r(T-t)}.$$

По-нататък разсъжденията и пресмятанията се извършват, както в т. 2.3.

В една следваща работа ние ще изследваме задачата на Дирихле за уравнението (1.1) при условие, че съвкупността G_β, в която то се изражда в параболично уравнение или в уравнение от първи ред, има общи части с границата Γ на разглежданата област G — случай, който е интересен поради специфичността на граничното условие, при което задачата на Дирихле притежава единствено решение. Във връзка с това ще направим следната

Забележка 2.2. Ако уравнението (1.1) притежава в затворената област $\bar{G} = G + \Gamma$ свойствата а) и г) и ако навсякъде в G е изпълнено неравенството $a(x, t) \geq \beta(x, t)$, за решенията $u = u_\varepsilon(x, t)$ на уравнението (1.3) и за техните производни до трети ред са изпълнени в $\bar{G}$ следните неравенства:

$$
\begin{aligned}
&|u(x, t)| \leq \max_{\Gamma} |u(x, t)|, \\
&\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=1}}^{1} \left(\frac{\partial u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 \leq \max_{\Gamma} \sum_{\substack{k,s=0\\k+s=1}}^{1} \left(\frac{\partial u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2, \\
&\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 \leq \max_{\Gamma} \sum_{\substack{k,s=0\\k+s=2}}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2, \\
&\sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2 \leq \max_{\Gamma} \sum_{\substack{k,s=0\\k+s=3}}^{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^k \partial t^s}\right)^2
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Във верността на тези оценки се убеждаваме, като вземем пред вид, че неравенствата (2.15), (2.25) и (2.31) остават в сила за цялата област G, стига в нея да е изпълнено условието $\alpha(x, t) \geqq \beta(x, t)$. Впрочем в този случай при нашите изследвания в § 2 ролята на областта $\bar{D}$ може да се изпълнява от самата област $\bar{G}$.

§ 3. Съществуване и единственост на решението

В този параграф ще докажем теореми за съществуване и единственост на решението на разглежданата от нас задача на Дирихле и ще отбележим няколко примера с цел да илюстрираме получените резултати.

Теорема 3.1 (за единственост). Задачата на Дирихле за уравнението (1.1), формулирана в § 1, притежава най-много едно решение.

Доказателство. Да предположим, че $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ са две решения на въпросната задача и да разгледаме помощната функция

$$\omega(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

която е двукратно гладка в областта G, защото такива са решенията $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Като вземем пред вид, че в G $L(u_1) = L(u_2) = f$ и че операторът $L(u)$ е линеен, веднага заключаваме, че за всички точки на областта G е в сила тъждеството $L(\omega) = 0$. Следователно функцията ω удовлетворява всичките условия на лема 1.2. Ние ще се възползваме от това обстоятелство, но преди това ще покажем, че $\omega(x, t) \geqq 0$ в $\bar{G}$. За тази цел ще допуснем противното: $\omega(x, t)$ приема в $\bar{G}$ и отрицателни стойности. Понеже решенията $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ удовлетворяват граничното условие (1.2), функцията $\omega(x, t)$ ще приема стойност нула за всяка точка $(x, t) \in \Gamma$. Тогава $\omega(x, t)$ притежава отрицателен локален минимум в някоя вътрешна точка $M_0 \in G$ и следователно в тази точка ще имаме $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geqq 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \geqq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, т. е. пред вид условието г) ще имаме $L[\omega(M_0)] > 0$. Това обаче противоречи на нашия предишен извод: $L(\omega) = 0$ в G. В такъв случай $\omega(x, t) \geqq 0$ в $\bar{G}$. Лема 1.2 сега ни дава

$$(3.1) \qquad 0 \leq \omega(x, t) \leqq \max_{\Gamma} \{\omega(x, t)\} = 0, \text{ или } \omega(x, t) \equiv 0 \quad ((x, t) \in G),$$

т. е. $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, което трябваше да се докаже.

Във връзка с теоремата за съществуване на решение, която ще докажем по-долу, предварително ще установим следната

Лема 3.1. На всяка точка $A(x_0, t_0) \in \Gamma$ може да се съпостави функция (бариер) $w_A(x, t)$, притежаваща следните свойства:

1. $w_A(x, t)$ е дефинирана и непрекъсната в сечението Ω_A на една достатъчно малка затворена област на точката A и затворената област $\bar{G}$.
2. $w_A(x_0, t_0) = 0$, но $w_A(x, t) > 0$ за всяка точка $(x, t) \in \Omega_A \setminus A$.
3. Навсякъде в Ω_A е изпълнено неравенството $L(w_A) < 0$.

Доказателство. При нашите предположения за границата Γ ние можем да считаме, че в достатъчно малка околност на точката A тя се представя с уравнение от вида $x = \varphi(t)$, където функцията $\varphi(t)$ е еднократно гладка (когато представянето е от вида $t = t(x)$, разсъжденията се извършват по същия начин). Тогава, както това се вижда от [12] (дори ако $\varphi(t)$ удовлетворява само условието на Липшиц), на произволно избраната точка $A \in \Gamma$ отговаря окръжност с център $C(m_A, n_A) \in \bar{G}$, която се допира външно до границата Γ в точката A, или все едно: съществува точка $C(m_A, n_A) \in \bar{G}$ такава, че в сечението Ω_A на една достатъчно малка затворена околност на точката A и затворената област $\bar{G}$ функцията

$$r_A(x, t) = \sqrt{(x-m_A)^2 + (t-n_A)^2} \tag{3.2}$$

удовлетворява неравенството

$$r_A(x, t) \geq r_A(x_0, t_0), \quad (x, t) \in \Omega_A, \tag{3.3}$$

при което равенството се достига само в точката $A(x_0, t_0)$. Като се възползваме от това, ние ще покажем, че и на нашия оператор $L(u)$ съответствува бариер, подобен на този за параболичното уравнение ([12], [10]). Именно ще установим, че функцията

$$\begin{aligned} w_A(x, t) = [r_A(x_0, t_0)]^{-2p} - [r_A(x, t)]^{-2p} = [(x_0-m_A)^2 + (t_0-n_A)^2]^{-p} \\ -[(x-m_A)^2+(t-n_A)^2]^{-p} \end{aligned} \tag{3.4}$$

при достатъчно голямо положително число p удовлетворява условията 1), 2) и 3), посочени в доказаната лема.

Съгласно (3.2) и (3.3) веднага можем да отбележим, че функцията w_A притежава свойствата 1) и 2), каквото и да е положителното число p и колкото и да е малко посоченото достатъчно малко сечение Ω_A. Да фиксираме Ω_A тъй малко, че в него да бъдат изпълнени и неравенствата $\alpha(x, t) > 0$, $\beta(x, t) > 0$ (това можем да направим, защото при нашите предположения уравнението (1.1) „близо до границата е от елиптичен тип"). Ще покажем, че при това числото p може да се избере толкова голямо, щото съответната му функция (3.4) да притежава в Ω_A и свойството 3), т. е. $w_A(x, t)$ да бъде бариер на точка $A \in \Gamma$. За тази цел намираме

$$\begin{aligned} L(w_A) = -2pr_A^{-2p-4}\{2(p+1)[(\alpha+\varepsilon)(x-m_A)^2 + (\beta+\varepsilon)(t-n_A)^2] \\ - r_A^2[\alpha+\beta+2\varepsilon+t-n_A+b(x-m_A)]\} - cw_A(x, t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

и полагаме $\min[\min_{\Omega_A} \alpha(x, t), \min_{\Omega_A} \beta(x, t)] = p_1$, което съгласно с теоремата на Вайерщрас (за непрекъснатите функции в затворени области) е положително число — стойност на $\alpha(x, t)$ или $\beta(x, t)$.

Като се ползваме от ограничеността в Ω_A на някои функции и като си служим с достатъчно големите положителни константи c_i, намираме оценките

$$\begin{aligned} L(w_A) \leq -2pr_A^{-2p-4}\{2p_1(p+1)\,r_A^2 - (\alpha+\beta+2)\,r_A^2 - c_1 r_A^2\} \\ \leq -2pr_A^{-2p-2}(2pp_1 - c_2) = -4pr_A^{-2p-2}\,p_1(p-c_3), \end{aligned} \tag{3.6}$$

откъдето е съвсем ясно, че числото p може да се избере независимо от ε и от точката $(x, t) \in \Omega_A$ така голямо, че да имаме $L(w_A) < 0$. Очевидно затова е достатъчно да вземем $p = c_3 + 1$ ($r_A \neq 0$, защото $C \in \bar{G}$). Лема 3.1 е доказана.

Теорема 3.2 (за съществуване). Задачата на Дирихле, формулирана в § 1, има решение, т. е. съществува функция $u(x, t)$, която в областта G е двукратно гладка и удовлетворява уравнението (1.1), в затворената област $\bar{G}$ е непрекъсната, а по границата Γ удовлетворява условието (1.2).

Доказателство. Нека $\{\bar{G}_n\}$ е една безкрайна редица от последователно покриващи се затворени области, съдържащи се в областта G, удовлетворяващи релацията

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{G}_n \tag{3.7}$$

и притежаващи достатъчно гладки граници $\Gamma_n \subset G$.

Във всяка от областите $\bar{G}_n$ фамилиите Φ, Φ_k $(k=1, 2, 3)$ съгласно с доказаното в § 2 са равномерно ограничени по $\varepsilon \in (0, 1)$. Като вземем пред вид, че от равномерната ограниченост на множеството Φ_k следва равностепенната непрекъснатост на функциите от $\Phi_{k-1}(\Phi_0=\Phi)$ и известната теорема на Арцела и Асколи, веднага заключаваме, че множествата

$$\{u_\varepsilon(x, t)\},\ \left\{\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial x}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u_\varepsilon(x, t)}{\partial x^2}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u_\varepsilon(x, t)}{\partial t^2}\right\} \quad (\varepsilon \in (0, 1))$$

са компактни по отношение на равномерната сходимост във всяка от затворените области $\bar{G}_n$. Ние ще се възползваме от това обстоятелство, за да конструираме една безкрайна редица от решения $u_\varepsilon(x, t)$ на задачата (1.3), (1.4), която заедно със съответните ѝ редици от производните, участвуващи в оператора $L(u_\varepsilon)$, да бъде равномерно сходяща в областта G, и ще докажем, че граничната функция на тази функционна редица е решение на разглежданата от нас задача на Дирихле.

Да фиксираме една нулева безкрайна редица от стойности на малкия параметър $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \to 0 \tag{3.8}$$

и да разгледаме съответните ѝ функционни редици

$$\{u_{\varepsilon_n}(x, t)\},\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_n}(x, t)}{\partial x}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_n}(x, t)}{\partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u_{\varepsilon_n}(x, t)}{\partial x^2}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u_{\varepsilon_n}(x, t)}{\partial x \partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u_{\varepsilon_n}(x, t)}{\partial t^2}\right\}.$$

Споменатата компактност ни дава възможност, като се възползваме от канторовия диагонален процес, да конструираме една подредица $\{u^n_{\varepsilon_n}(x, t)\}$, така че тя заедно с редиците

$$\left\{\frac{\partial u^n_{\varepsilon_n}}{\partial x}\right\},\ \left\{\frac{\partial u^n_{\varepsilon_n}}{\partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u^n_{\varepsilon_n}}{\partial x^2}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u^n_{\varepsilon_n}}{\partial x \partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial^2 u^n_{\varepsilon_n}}{\partial t^2}\right\}$$

да бъде равномерно сходяща във всяка от областите $\bar{G}_n$.

Да означим с $v(x, t)$ нейната граница и да изразим, че функциите $u^n_{\varepsilon_n}(x, t)$ са решения на задачата (1.3), (1.4) (при $\varepsilon=\varepsilon_n$). Получаваме: във всяка затворена област $\bar{G}_n \subset G$, следователно и в цялата област G, е в сила тъждеството

(3.9) $$(\alpha+\varepsilon_n)\frac{\partial^2 u^n_{\varepsilon_n}}{\partial x^2}+(\beta+\varepsilon_n)\frac{\partial^2 u^n_{\varepsilon_n}}{\partial t^2}-\frac{\partial u^n_{\varepsilon_n}}{\partial t}-b\frac{\partial u^n_{\varepsilon_n}}{\partial x}-cu^n_{\varepsilon_n}=f,$$

а върху границата Γ е изпълнено условието

(3.10) $$u^n_{\varepsilon_n}(x, t)|_\Gamma=\theta(x, t).$$

Ако в (3.9) и (3.10) извършим граничния преход при $n\to\infty$, съгласно с доказаната равномерна сходимост и избора на редицата $\varepsilon_n\to 0$ за произволна точка $(x, t)\in G$ ще имаме

(3.11) $$\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+b\frac{\partial v}{\partial x}+cv+f,$$

а за точките от Γ ще бъде изпълнено условието

(3.12) $$v(x, t)|_\Gamma=\theta(x, t).$$

Тъждествата (3.11) и (3.12) показват, че функцията $v(x, t)=\lim\limits_{n\to\infty} u^n_{\varepsilon_n}(x, t)$ удовлетворява в областта G уравнението (1.1), а върху Γ — условието (1.2). От друга страна, поради доказаната равномерна сходимост на редиците от производните на функциите $u^n_{\varepsilon_n}(x, t)$ функцията $v(x, t)$ е двукратно гладка в областта G. В такъв случай, за да бъде доказано, че функцията $v(x, t)$ е решение на разглежданата от нас задача на Дирихле, остава да се покаже още, че тя е непрекъсната в затворената област $\bar{G}$, т. е. че за произволна точка $A(x_0, t_0)\in\Gamma$ е в сила равенството

(3.13) $$\lim_{(x, t)\to(x_0, t_0)} v(x, t)=v(x_0, t_0)=\theta(x_0, t_0)\quad ((x, t)\in\bar{G}).$$

Като се възползваме от лема 3.2, да означим с $w_A(x, t)$ една функция (бариер), притежаваща посочените там свойства 1), 2), 3), и да фиксираме едно положително число η така, че в една достатъчно малка околност $\Delta_\eta\subset\Omega_A$ на точката A да бъде изпълнено неравенството

(3.14) $$|\theta(x, t)-\theta(x_0, t_0)|<\eta,\quad (x, t)\in\Gamma.$$

Това е възможно поради непрекъснатостта на граничната функция $\theta(x, t)$. След това да изберем една положителна константа p така, че да бъдат изпълнени неравенствата

(3.15) $$\varphi_\pm\equiv\pm[\theta(x_0, t_0)-u^n_{\varepsilon_n}(x, t)]-\eta-pw_A(x, t)\leq 0,\quad (x, t)\in\Delta_\eta\cap\bar{G}.$$

Това може да се направи по следните съображения: първо, неравенството (3.15) е изпълнено в $\Gamma\cap\Delta_\eta$ при произволно $p>0$ съгласно с неравенство (3.14), а при достатъчно голямо $p(p>p_0)$ поради равномерната ограниченост в $\bar{G}$ на множеството Φ и свойството 2) на бариера (3.15) е изпълнено и върху останалата част от контура на областта $\Delta_\eta\cap\bar{G}$; второ, като вземем пред вид оценките

$$L_{\varepsilon_n}(\varphi_\pm)=\pm[-c(x, t)\theta(x_0, t_0)-f(x, t)]+c(x, t)\eta-pL(w_A)$$
$$\geq -c_1-pL(w_A),\quad (x, t)\in\Delta_\eta$$

(c_1 — достатъчно голяма положителна константа, независеща от ε_n, x, t и p) и свойството 3) на бариера, можем да заключим, че числото $p>p_0$ може да бъде избрано толкова голямо, щото да са удовлетворени и неравенствата

$$\Gamma(\varphi_{\pm})\geqq 0,\ (x, t)\in \Delta_n\cap\overline{G}. \tag{3.16}$$

Съгласно с лема 1.2 неравенствата (3.16) показват, че функциите $\varphi_{\pm}$ не притежават положителен локален максимум във вътрешността на областта $\Delta_n\cap G$. Това обстоятелство заедно с предишния ни извод, според който функциите $\varphi_{\pm}$ не приемат положителни стойности върху границата на областта $\Delta_n\cap G$, благодарение на теоремата на Вайерщрас (за непрекъснатите в затворени области функции) ни дава основание да заключим, че неравенствата (3.15), в които числото p е вече фиксирано (независимо от n) по посочения подходящ начин, са в сила за всички точки на затворената област $\overline{\Delta}_n\cap\overline{G}$. Да ги решим относно $u^n_{\varepsilon_n}(x, t)$. Получаваме

$$\theta(x_0, t_0)-\eta-pw_A(x, t)\leq u^n_{\varepsilon_n}(x, t)\leq\theta(x_0, t_0)+\eta+pw_A(x, t), \tag{3.17}$$

$$(x, t)\in \overline{\Delta}_n\cap\overline{G}.$$

От (3.17) чрез извършване на граничния преход при $n\to\infty$ получаваме

$$\theta(x_0, t_0)-\eta-pw_A(x, t)\leq v(x, t)\leqq\theta(x_0, t_0)+\eta+pw_A(x, t). \tag{3.18}$$

От (3.18) при $(x, t)\to(x_0, t_0)$ получаваме

$$\theta(x_0, t_0)-\eta\leq\varliminf_{(x, t)\to(x_0, t_0)} v(x, t)\leqq\varlimsup_{(x, t)\to(x_0, t_0)} v(x, t)\leqq\theta(x_0, t_0)+\eta. \tag{3.19}$$

Най-сетне от (3.19) пред вид на това, че положителното число η е съвсем произволно, заключаваме

$$\varliminf_{(x, t)\to(x_0, t_0)} v(x, t)=\varlimsup_{(x, t)\to(x_0, t_0)} v(x, t)=\lim_{(x, t)\to(x_0, t_0)} v(x, t)=\theta(x_0, t_0)=v(x_0, t_0).$$

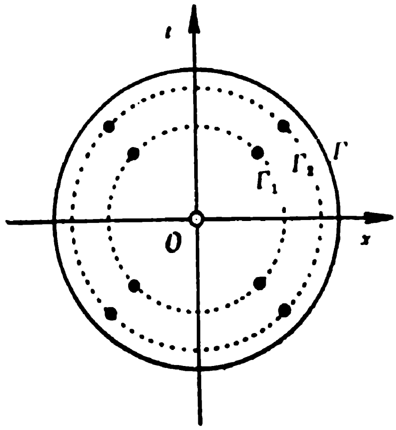
Така равенството (3.13) е доказано, а с това и самата теорема 3.2.

Забележка 3.1. От изложеното доказателство на теорема 3.2 пред вид забележка 2.1 е ясно, че при допълнителни предположения за гладкост на функциите $a(x, t)$, $\beta(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ може да се твърди, че решението на разглежданата задача (1.1)—(1.2) притежава съответната по-висша гладкост.

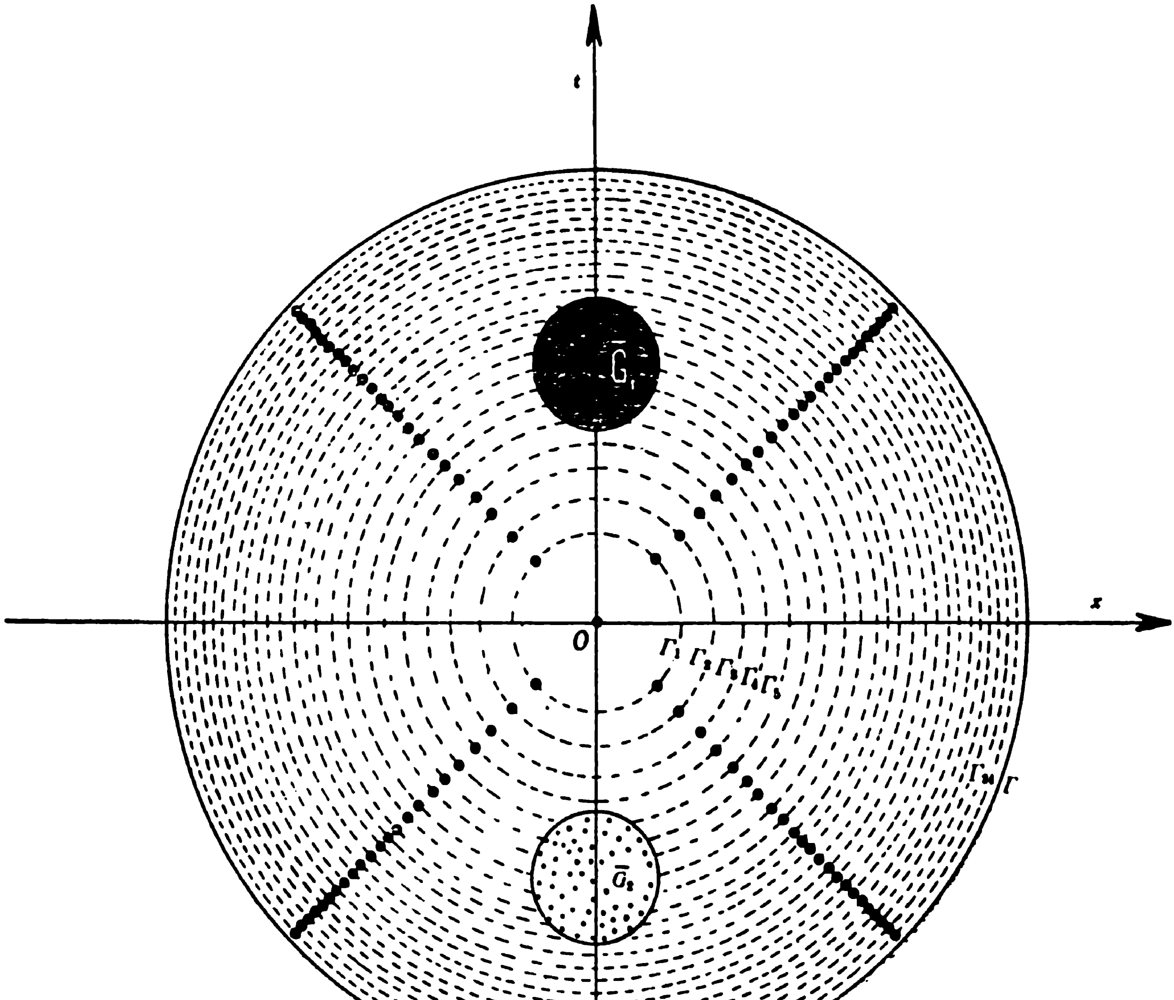
Накрая нека разгледаме два примера, които заедно с приложените към тях чертежи илюстрират доста нагледно допустимите израждания, при които теоремите 3.1, 3.2 ни гарантират съществуването и единствеността на гладко решение на задачата на Дирихле.

Пример 1. Задачата на Дирихле за уравнението

$$\left[\cos^2\frac{\pi(1+x^2+t^2)}{2}+(x^2-t^2)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos^2\frac{\pi(1+x^2+t^2)}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+2u, \tag{3.20}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

разглеждано в кръговата област $\bar{G} \equiv x^2+t^2 \leqq 5$, при гранично условие от вида (1.2) удовлетворява всичките условия на теоремите 3.1, 3.2 и следователно притежава единствено гладко решение. Нещо повече, съгласно със забележка 3.1 това решение е безкрайнократно гладко.

Близо до границата Γ на областта G (черт. 1) уравнението (3.20) е от елиптичен тип, а в нейната вътрешност се изражда. В точката $O(0, 0)$ и в пресечните точки на окръжностите $\Gamma_1 \equiv x^2+t^2= 2$ и $\Gamma_2 \equiv x^2+t^2=4$ с правите $x=\pm t$ то се изражда в уравнение от първи ред (даже обикновено), а в останалите точки на тези окръжности — в уравнение от параболичен тип.

Пример 2. Също така задачата на Дирихле за уравнението

$$a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+2u, \tag{3.21}$$

където

$$a(x, t)=\begin{cases} 0 \quad \text{в} \quad \bar{G}_1 \equiv x^2+(t-4)^2 \leqq 1, \\ (x^2+t^2-8t+15)^3(x^2+t^2+8t+15)^4\left[\cos^2\frac{\pi(1+x^2+t^2)}{2}+(x^2-t^2)^2\right] \\ \qquad\qquad \text{за} \ (x, t)\bar{\in}\bar{G}_1, \end{cases}$$

$$\beta(x, t)=\begin{cases} 0 \quad \text{в} \ \bar{G}_1 \ \text{и} \ \bar{G}_2 \equiv x^2+(t+4)^2 \leqq 1, \\ (x^2+t^2-8t+15)^3(x^2+t^2+8t+15)^4\cos^2\frac{\pi(1+x^2+t^2)}{2} \ \text{за} \ (x, t)\bar{\in}\bar{G}_1 \cup \bar{G}_2, \end{cases}$$

разглеждано в областта $\bar{G} \equiv x^2+t^2 \leqq 49$, при гранично условие от вида (1.2) съгласно с доказаните теореми притежава единствено двукратно гладко решение.

Близо до границата Γ на областта G (черт. 2) уравнението (3.21) е от елиптичен тип, а в нейната вътрешност се изражда в уравнение от първи ред и в уравнение от параболичен тип. В затворената област $\bar{G}_1$ и в пресечните точки на окръжностите $\Gamma_k \equiv x^2+t^2=2k$ $(k=0, 1, \ldots, 24)$ с правите $x=\pm t$ то се изражда в уравнение от първи ред, а в останалите точки на тези окръжности и в затворената област $\bar{G}_2$ — в уравнение от параболичен вид.

Забележка. Настоящата работа е решение на една от задачите, формулирани на учредителната сбирка на семинара по частни диференциални уравнения при Софийския университет от Т. Генчев, комуто изразявам своята дълбока благодарност както за постановката на задачата, така и за моралната подкрепа, която ми оказваше при преодоляването на някои от срещнатите затруднения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В., О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, 77, № 2, 1951, 181—183.
2. Олейник О. А., Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, 87, № 6, 1952, 885—888.
3. Введенская Н. Д., Об одной краевой задаче для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, 91, № 4, 1953, 711—714.

4. Вишик М. И., Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Матем. сб., **35** (77), 1954, 513—568.

5. Михлин С. Г., К теории вырождающихся эллиптических уравнений, ДАН СССР, **94**, № 2, 1954, 183—185.

6. Fichera G., Sulle equazioni differenziali lineari ellitticoparaboliche del secondo ordine, Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie (VIII), 5, 1956.

Fichera G., On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order, Boundary problems in differential equations, Madison, 1960, 97—120 (работата се цитира по руския й превод в Математика, **7**:6, 1963, 99—120).

8. Ильин А. М., О задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа, вырождающегося на некотором множестве внутренних точек области, ДАН СССР, **102**, № 1, 1955, 9—12.

9. Ильин А. М., Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения, Матем. сб., **50** (92), 1960, 443—498.

10. Ильин А. М., А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Усп. мат. наук, XVII, 3 (105), 1962, 3—146.

11. Miranda C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Berlicn — Göttingen — Heidelberg, 1955 (гл. III, 21, I — по превода на руски език, Москва, 1957).

12. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Москва—Ленинград, 1961, 365—367.

13. Бернштейн С. Н., Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, ДАН СССР, **18**, № 7, 1938, 385—388.

Постъпила на 23. V. 1964 г.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ В ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И В УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Иван Райчинов

(Резюме)

Пусть $\bar{G}$ ограниченная и замкнутая область с границей Γ, которая в достаточно малой окрестности каждой из своих точек может быть представлена уравнением вида $x=x(t)$ (или $t=t(x)$), где функция $x(t)$ (соответственно $t(x)$) однократно гладкая.

В предлагаемой работе исследуется первая граничная задача для уравнения

$$(1.1)\qquad \alpha(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)\,u+f(x,t)$$

(α, β, b, c, f — трехкратно гладки), которое в рассматриваемой области $\bar{G}$ может быть уравнением эллиптического типа, параболического типа или уравнением первого порядка в зависимости от следующих условий:

а) $\alpha(x,t)\geqq 0$, $\beta(x,t)\geqq 0$ для $(x,t)\in\bar{G}$;

б) множества G_α и G_β, где соответственно $\alpha(x,t)=0$ и $\beta(x,t)=0$, связаны соотношением $G_\alpha\subseteqq G_\beta$;

в) существует замкнутая область $\bar{D}=D-S$ с границей S, которая подчиняется условиям: в$_1$) $G_\beta \subset \bar{D} \subset G$, причем расстояния между множествами G_β и S и между S и Γ являются положительными числами; в$_2$) в $\bar{D}$ выполнено неравенство $\alpha(x, t) \geqq \beta(x, t)$;

г) $c(x, t)>0$ для $(x, t) \in \bar{G}$ (это условие не существенно !).

Доказываются теоремы о существовании и единственности классического решения задачи Дирихле.

ON DIRICHLET'S PROBLEM FOR A CLASS OF ELLIPTIC EQUATIONS DEGENERATING IN THE INTERIOR OF THE REGION INTO PARABOLIC EQUATIONS AND INTO FIRST-ORDER EQUATIONS

Ivan Raichinov

(*Summary*)

Let $\bar{G}$ be a bounded and closed region with boundary Γ which, in a sufficiently small neighbourhood of each of its points, can be represented by an equation of the type $x=x(t)$ (or $t=t(x)$) where the function $x(t)$ ($t(x)$ respectively) is smooth.

In the present paper is studied the first boundary problem for the equation

$$\alpha(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}+c(x, t) u+f(x, t) \tag{1.1}$$

(α, β, b, c, f — triply smooth) which in the region $\bar{G}$ may be an equation of the elliptic type, of the parabolic type, and a first-order equation, in accordance with the following conditions:

a) $\alpha(x, t) \geqq 0$, $\beta(x, t) \geqq 0$ for $(x, t) \in \bar{G}$;

b) The sets G_α and G_β, composed of the points of $\bar{G}$ in which the functions $\alpha(x, t)$ and $\beta(x, t)$ respectively reduce to zero, are connected with the relation $G_\alpha \subset G_\beta$;

c) There exists a closed region $\bar{D}=D \subset S$ with boundary S subject to the conditions: c$_1$) $G_\beta \subset D \subset G$, the distances between the sets G_β and S and between S and Γ being positive numbers, c$_2$) the inequality $\alpha(x, t) \geqq \beta(x, t)$ holds in $\bar{D}$.

d) $c(x, t)>0$ for $(x, t) \in \bar{G}$ (this condition is inessential!)

Theorems are proved for the existence and uniqueness of the classical solution of the Dirichlet's problem.