БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ПОВЪРХНИНИ И КОНГРУЕНЦИИ В ДВУОСНОТО ПРОСТРАНСТВО

Грозю Станилов

В тази работа изследваме редица диференциално-геометрични въпроси, свързани с повърхнини и придружаващи ги конгруенции от прави в хиперболичното двуосно пространство B_3. В § 1 след извеждане на формулите за инфинитезималните преобразувания на върховете на двуосен репер и структурните уравнения на това пространство построяваме каноничен репер, свързан с произволна точка от дадена повърхнина. В § 2 с всяка точка от разглежданата повърхнина свързваме еднопараметрична съвкупност от конгруенции прави, за всяка една от които прилагаме развитата от нас теория на конгруенции от прави от пространството B_3. В § 3 изследваме въпроса за двуосно налагане на две повърхнини, както и двуосно налагане на повърхнините с придружаващите ги конгруенции.

§ 1. Повърхнини в двуосното пространство

Нека хиперболичното двуосно пространство B_3 е определено с абсолютните прави j и k. Ще използваме двуосни координатни системи (B-системи), съответно B-репери, въведени от Б. Петканчин [1], притежаващи следните свойства: A_1 и A_2 са точки от първата абсолютна права j, а A_3 и A_4 са точки от втората абсолютна права k. В аналитични точки произволна B-колинеация, запазваща абсолютните прави, спрямо такава координатна система има представяне

$$
(1)\qquad \begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & x_3' &= a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, & x_4' &= a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned}
$$

като

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Съвкупност от четири аналитични точки $A_1(a_{11}, a_{21}, 0, 0)$, $A_2(a_{12}, a_{22}, 0, 0)$ $A_3(0, 0, a_{33}, a_{43})$, $A_4(0, 0, a_{34}, a_{44})$, зададени със своите координати спрямо начална координатна B-система с върхове $A_1^0(1, 0, 0, 0)$, $A_2^0(0, 1, 0, 0)$, $A_3^0(0, 0, 1, 0)$, $A_4^0(0, 0, 0, 1)$, ще наричаме B-р е п е р, ако $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$. Четирите точки A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 образуват начален B^0-репер. Последният, подложен на произволна B-колинеация, също се преобразува в B-репер. За всеки два B-репера съществува точно една двуосна колинеация, която преобразува единия в другия. Съвкупността на B-реперите е група, в която действуват двуосните преобразувания (1). Двуосната геометрия се поражда тъкмо от тази седемчленна група от преобразувания. Абсолютът на тази геометрия се състои от реалните кръстосани прави j и k, които спрямо произволна B-система имат следните уравнения:

$$j: x_3 = x_4 = 0, \qquad k: x_1 = x_2 = 0.$$

Наред с преобразуванията (1) разглеждаме още така наречените инфинитезимални преобразувания, всяко едно от които е определено по следния начин: на точка с координати (x_i) съответствува точката с координати $(x_i + \tilde{d}x_i)$, като

$$\tilde{d}x_1 = x_1 da_{11} + x_2 da_{12}, \quad \tilde{d}x_3 = x_3 da_{33} + x_4 da_{34},$$
$$\tilde{d}x_2 = x_1 da_{21} + x_2 da_{22}, \quad \tilde{d}x_4 = x_3 da_{43} + x_4 da_{44}.$$

Тук da_{ij} са диференциалите на a_{ij}, разглеждани като функции на една или няколко променливи. При това преобразуване всеки връх A_i на двуосния репер $B(a)$ получава изменение, чиято главна част е dA_i. Аналитичната точка dA_i, отнесена спрямо репера $B(a)$, има представяне

(2)
$$dA_1 = \omega_{11}A_1 + \omega_{21}A_2, \quad dA_3 = \omega_{33}A_3 + \omega_{43}A_4,$$
$$dA_2 = \omega_{12}A_1 + \omega_{22}A_2, \quad dA_4 = \omega_{34}A_3 + \omega_{44}A_4.$$

В тези равенства ω_{ij} са форми на Пфаф и се наричат относителни компоненти на репера $B(a)$. Те определят прехода от репера $B(a)$ към репера $B(a+da)$ и са инвариантни относно произволна двуосна колинеация [9]. За тях имаме изразите

$$\omega_{11} = \frac{1}{\Delta_1}(dA_1, A_2), \quad \omega_{21} = \frac{1}{\Delta_1}(A_1, dA_1), \quad \omega_{12} = \frac{1}{\Delta_1}(dA_2, A_2), \quad \omega_{22} = \frac{1}{\Delta_1}(A_1, dA_2),$$
$$\omega_{33} = \frac{1}{\Delta_2}(dA_3, A_4), \quad \omega_{43} = \frac{1}{\Delta_2}(A_3, dA_3), \quad \omega_{34} = \frac{1}{\Delta_2}(dA_4, A_4), \quad \omega_{44} = \frac{1}{\Delta_2}(A_3, dA_4),$$

които непосредствено следват от (2). При това трябва да се има пред вид, че Δ_1 е означение за детерминантата, съставена от координатите на върховете A_1 и A_2, т. е. $\Delta_1 = (A_1, A_2)$. Тогава понятни са и другите означения.

Структурните уравнения на пространството B_3 при избраното семейство от репери се получават чрез външно диференциране на диференциалната система (2). Получаваме

(3)
$$D\omega_{11} = [\omega_{21}, \omega_{12}] \qquad D\omega_{21} = [\omega_{11} - \omega_{22}, \omega_{21}],$$
$$D\omega_{12} = [\omega_{12}, \omega_{11} - \omega_{22}], \qquad D\omega_{22} = [\omega_{12}, \omega_{21}],$$
$$D\omega_{33} = [\omega_{43}, \omega_{34}], \qquad D\omega_{43} = [\omega_{33} - \omega_{44}, \omega_{43}],$$
$$D\omega_{34} = [\omega_{34}, \omega_{33} - \omega_{44}], \qquad D\omega_{44} = [\omega_{34}, \omega_{43}].$$

Нормировката

$$(4) \qquad (A_1 A_2 A_3 A_4) = 1$$

води до зависимостта

$$(5) \qquad \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0,$$

която ще използваме само в случай, че това опростява формулите.

След тези предварителни бележки можем да пристъпим към изграждането на диференциално-геометричен апарат за изследване на повърхнините. Този въпрос с методики, различни от нашата, е третиран от румънските автори Майер и Дан Папук, от казанския геометър Норден и от Ив. Иванов. Построеният от нас с метода на Картан придружаващ полуканоничен репер на повърхнината геометрически е определен по същия начин като в [6].

Произволна точка A от дадена повърхнина S е функция на два независими параметъра: S: $A = A(u, v)$. По-подробно това означава, че четирите координати на точката A са функции на параметрите u, v. Предполагаме, че повърхнината не съдържа точки от абсолютните прави j и k. Тогава през всяка точка A от S минава точно една безкрайна права, която сече абсолютните прави j и k съответно в точките A_1 и A_3. С подходящи пренормирания винаги можем да постигнем представянето

$$(6) \qquad A = A_1 + A_3,$$

т. е. върху правата A_1A_3 е избрана за единична точка разглежданата точка A. Нашата цел ще бъде да свържем с точката A еднозначно определен двуосен репер.

Най-напред от съвкупноста на всички B-репери в пространството B_3 разглеждаме онези, за които важи равенството (6). Ще ги наричаме **репери от първи ред**. При всеки един от тях при фиксирана точка A са еднозначно определени върховете A_1, A_3. Значи по същество семейството на реперите от първи ред зависи от два параметъра — тези, които определят точките A_2, A_4 съответно върху правите j, k. От (2) и (6) намираме

$$dA = \omega_{11} A + \omega_{21} A_2 + (\omega_{33} - \omega_{11}) A_3 + \omega_{43} A_4.$$

При фиксирана точка A, т. е. за реперите от първи ред, са изпълнени равенствата $\omega_{21} = \omega_{33} - \omega_{11} = \omega_{43} = 0$. Това означава, че при променлива точка A от S формите ω_{21}, ω_{43}, $\omega_{11} - \omega_{33}$ са линейни диференциални форми само на параметрите u, v. Тези форми наричаме **главни форми от първи ред**. Понеже базисът им се състои от двете независими форми du, dv, между тях съществува едно линейно съотношение, което написваме във вида

$$(7) \qquad \omega_{11} - \omega_{33} = \lambda \omega_{21} + \mu \omega_{43}.$$

Това означава, че за нов базис са избрани формите ω_{21}, ω_{43}, които при една повърхнина в общо положение са независими. Те могат да бъдат зависими само ако повърхнината притежава свойството: допирателната равнина в произволна точка A от повърхнината минава през безкрайната права на пространството, определена от същата точка. Ние изключваме от разглеждане такива повърхнини.

Параметрите u, v ще наричаме главни. Придружаващият репер $A_1A_2A_3A_4$ на повърхнината освен от тях зависи още от пет вторични параметъра, които преобразуват реперите от първи ред вътре в самото семейство. Два от тях са споменати по-горе те преместват точките A_2 и A_4 върху абсолютните прави j и k. Произволни са още и нормировките на върховете A, A_2, A_4. С δ ще означаваме символа за диференциране само по вторичните параметри, а значението на формата ω_{ij} при изменение само по тях ще бележим с π_{ij}. Тогава веднага можем да напишем $\pi_{11}-\pi_{33}=0$, $\pi_{21}=\pi_{43}=0$. С d, както обикновено ще означаваме символа за диференциране по всичките параметри. От първата формула на (3) можем да напишем

$$d\omega_{21}(\delta)-\delta\omega_{21}(d)=\begin{vmatrix}\omega_{11}-\omega_{22} & \omega_{21}\\ \pi_{11}-\pi_{22} & \pi_{21}\end{vmatrix}.$$

Именно взето е пред вид, че значението на външния диференциал $D\omega_{21}$ е равно на билинейната коварианта на Фробениус за формата ω_{21}, а стойността на външното произведение $[\omega_{11}-\omega_{22}, \omega_{21}]$ е равна на детерминантата, стояща от дясната страна на последното равенство. По този начин намираме

$$\delta\omega_{21}=\omega_{21}(\pi_{11}-\pi_{22}), \qquad \delta\omega_{43}=\omega_{43}(\pi_{11}-\pi_{44}).$$

Тези равенства показват, че линейните диференциални форми ω_{21}, ω_{43} са относителни инвариантни форми. Ако при един репер от първи ред $\omega_{21}=0$ или $\omega_{43}=0$, и при всеки друг репер от първи ред е изпълнено същото равенство. По-късно ще изясним какво означава геометрично анулиране на формата ω_{21} или ω_{43}.

Диференцираме външно равенството (7):

$$[d\lambda, \omega_{21}]+[d\mu, \omega_{43}]+\lambda D\omega_{21}+\mu D\omega_{43}+D\omega_{33}-D\omega_{11}=0.$$

Като вземем пред вид структурните уравнения, получаваме

$$[\Delta\lambda, \omega_{21}]+[\Delta\mu, \omega_{43}]=0, \tag{8}$$

като сме означили

$$\Delta\lambda=d\lambda+\lambda(\omega_{11}-\omega_{22})+\omega_{12},$$
$$\Delta\mu=d\mu+\mu(\omega_{33}-\omega_{44})-\omega_{34}.$$

На този етап без по-нататъшната специализация на репера можем да определим широтата на решението на Пфафовото уравнение (7), т. е. да определим произвола в определянето на една повърхнина в двуосното пространство. За тази цел ще приложим критерия на Картан [9] за система на Пфаф в инволюция. Имаме $n=2$ аргумента и $s_1=1$ квадратично уравнение — уравнението (8). В последното участвуват $q=2$ нови форми $\Delta\lambda$ и $\Delta\mu$. От равенството $s_1+s_2=q$ намираме $s_2=1$ и тогава числото на Картан $Q=s_1+2s_2=3$. От друга страна, по лемата на Картан от (8) имаме

$$\begin{aligned}-\Delta\lambda&=x_1\omega_{21}+x_2\omega_{43},\\ -\Delta\mu&=x_2\omega_{21}+x_3\omega_{43},\end{aligned} \tag{9}$$

Получиха се три нови функции x_1, x_2, x_3. Значи $N=3$. Понеже $Q=N$, системата на Пфаф, която в случая се състои само от е́дно уравнение, е в инволюция и произволът за определяне на една повърхнина в двуосното пространство B_3 е $s_2=1$ функция на два аргумента.

От (9) при вариация само по вторичните параметри получаваме

$$\delta\lambda+\lambda(\pi_{11}-\pi_{22})+\pi_{12}=0, \quad \delta\mu+\mu(\pi_{11}-\pi_{44})-\pi_{34}=0.$$

Тези равенства показват, че величините λ, μ могат да приемат всяка стойност в зависимост от изменението на вторичните параметри. Ние ще се спрем на значенията $\lambda=0$, $\mu=0$. Тогава $\pi_{12}=0$, $\pi_{34}=0$ и от (7) следва

$$\omega_{11}=\omega_{33}. \tag{10}$$

Равенствата (9) приемат вида

$$\begin{aligned} -\omega_{12}&=x_1\omega_{21}+x_2\omega_{43}, \\ \omega_{34}&=x_2\omega_{21}+x_3\omega_{43}. \end{aligned} \tag{9'}$$

Тогава $dA=\omega_{11}A+\omega_{21}A_2+\omega_{43}A_4$, което показва, че допирателната равнина в точката A от S е равнината AA_2A_4. Обратно, лесно се съобразява, че ако поставим върховете A_2 и A_4 в допирателната равнина към S в точката A, трябва $\lambda=\mu=0$. Можем да формулираме следната

Т е о р е м а. Необходимото и достатъчно условие точките A_2 и A_4 да бъдат пресечните точки на абсолютните прави j и k с допирателната равнина към повърхнината в точката A е $\lambda=\mu=0$.

Направеният избор показва, че B-реперът $A_1A_2A_3A_4$ геометрически е напълно определен. Възможни са само три пренормирания — на A и върховете A_2, A_4. Такъв репер наричаме п о л у к а н о н и ч е н. Той се характеризира напълно с (10). Да припомним, че (9') е получена с външно диференциране на това равенство. Величините x_1, x_2, x_3 зависят както от главните, така и от вторичните параметри. Формите ω_{12}, ω_{34} също не зависят от вторичните параметри. Сега можем да напишем

$$\delta\omega_{21}=\omega_{21}(\pi_{11}-\pi_{22}), \quad \delta\omega_{12}=\omega_{12}(\pi_{22}-\pi_{11}),$$

$$\delta\omega_{43}=\omega_{43}(\pi_{11}-\pi_{44}), \quad \delta\omega_{34}=\omega_{34}(\pi_{44}-\pi_{11}).$$

Ако положим $\varphi_1=\omega_{12}\omega_{21}$, $\varphi_2=\omega_{34}\omega_{43}$, то $\delta\varphi_1=\delta\varphi_2=0$. Значи тези квадратни форми са инвариантни. Инвариантна е, разбира се, и тяхната разлика

$$\mathrm{II}=\varphi_2-\varphi_1=\omega_{34}\omega_{43}-\omega_{12}\omega_{21}=x_1(\omega_{21})^2+2x_2\omega_{21}\omega_{43}+x_3(\omega_{43})^2. \tag{11}$$

Анулирането на тази квадратна форма дава асимптотичните линии на повърхнината. Действително асимптотичните линии се определят от условието $(A, A_2, A_4, d^2A)=0$, което с леки пресмятания поради линейната независимост на точките A_1, A_2, A_3, A_4 дава $\mathrm{II}=0$.

Като диференцираме външно равенствата (9') и приложим известната лема на Картан, получаваме

$$\begin{aligned} dx_1+2x_1(\omega_{11}-\omega_{22})&=y_1\omega_{21}+y_2\omega_{43}, \\ dx_2+x_2(\omega_{11}+\omega_{33}-\omega_{22}-\omega_{44})&=y_2\omega_{21}+y_3\omega_{43}, \\ dx_3+2x_3(\omega_{33}-\omega_{44})&=y_3\omega_{21}+y_4\omega_{43}. \end{aligned} \tag{12}$$

При вариация по вторичните параметри последните равенства приемат вида

$$\begin{aligned} &\delta x_1+2x_1(\pi_{11}-\pi_{22})=0, \\ (12') \qquad &\delta x_2+x_2(2\pi_{11}-\pi_{22}-\pi_{44})=0, \\ &\delta x_3+2x_3(\pi_{11}-\pi_{44})=0. \end{aligned}$$

Оттук намираме, че изразът

$$(13) \qquad J=\frac{x_2^2}{x_1x_3}$$

е инварианта — не зависи от промяната на нормировките на точките A, A_2, A_4, тъй като $\delta J=0$. Инвариантна е и квадратната форма

$$(14) \qquad \mathrm{I}=x_2\omega_{21}\omega_{43},$$

тъй като и за нея е изпълнено $\delta\mathrm{I}=0$. Лесно можем да дадем геометрично тълкуване на случая, когато се анулира формата I, а с това и обещаните геометрични тълкувания на равенствата $\omega_{21}=0$ или $\omega_{43}=0$. От израза за dA при $\omega_{21}=0$ получаваме $dA=\omega_{11}A+\omega_{43}A_4$, което показва, че допирателната права към координатната линия ω_{21} 0 е онази допирателна права към S в точката A, която сече втората абсолютна права k. Аналогично координатната линия $\omega_{43}=0$ има за допирателна онази тангента на S, която сече първата абсолютна права j. Ясно е, че така въведените координатни линии имат чисто двуосен характер и накратко може да се каже, че нулевите линии на квадратичната форма I са параметричните (координати) линии на повърхнината.

Да дадем едно геометрично тълкуване за инвариантата J. Ако с δ' означим двойното отношение на двете параметрични и двете асимптотични тангенти към повърхнината S в една и съща точка A, инвариантата J се изразява чрез δ' по следния начин:

$$(15) \qquad J=\frac{(1+\delta')^2}{4\delta'}$$

Ако инвариантата $J=1$, то $\delta'=1$ и обратно. Сега двете асимптотични допирателни съвпадат и точки върху S, за които е изпълнено това равенство, биха могли да бъдат наречени параболични.

Преминаваме към по-нататъшната специализация на репера. Равенствата (12′) показват, че в общия случай при $x_1\neq0$, $x_3\neq0$ можем да постигнем $x_1=1$, $x_3=1$. Това означават две определени нормирания на върховете на репера. Каноничен репер може да се постигне, ако се направи още нормировката (4). Тогава всички вторични параметри са вече фиксирани и реперът е еднозначно определен. Освен това всички форми ω_{ij} се изразяват чрез двете базисни форми ω_{21}, ω_{43} с помощта на коефициенти, които имат инвариантен характер. За опростяване на формулите ще положим

$$\begin{aligned} (16) \qquad &\omega_{22}-\omega_{44}=a\omega_{21}+b\omega_{43}, \\ &\omega_{11}=\omega_{33}=p\omega_{21}+q\omega_{43}. \end{aligned}$$

Като вземем пред вид (5), (9') и (10), получаваме следните основни формули в теорията на повърхнините в двуосното пространство B_3 при избрания от нас репер:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\omega_{12}=-(\omega_{21}+x_2\omega_{43}), \quad \omega_{34}=x_2\omega_{21}+\omega_{43},\\ &\omega_{11}=\omega_{33}=p\omega_{21}+q\omega_{43},\\ &\omega_{22}=\frac{1}{2}(a-2p)\omega_{21}+\frac{1}{2}(b-2q)\omega_{43},\\ &\omega_{44}=-\frac{1}{2}(a+2p)\omega_{21}-\frac{1}{2}(b+2q)\omega_{43}. \end{aligned}$$

Величините a, b, p, q, x_2 са инварианти. Квадратните форми (11) и (14) добиват вида

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{I}=x_2\omega_{21}\omega_{43},\\ &\mathrm{II}=(\omega_{21})^2+2x_2\omega_{21}\omega_{43}+(\omega_{43})^2. \end{aligned}$$

Сега ще направим едно приложение на изведените формули (17). Ще покажем, че задаването на двете квадратни форми (18) е достатъчно за определянето на повърхнина в двуосното пространство, разбира се при условие, че са съблюдени условията за интегруемост (3).

Действително нека са дадени квадратните форми (18). Забелязваме, че комбинацията, образувана от тях,

$$\mathrm{II}-2\,\mathrm{I}=(\omega_{21})^2+(\omega_{43})^2,$$

е сума от два квадрата. По този начин се намират линейните диференциални форми ω_{21}, ω_{43}, а с това и величината x_2 — от първото уравнение на (18). Като използваме (17), веднага констатираме, че са известни и формите ω_{12}, ω_{34}. Като използваме някои от структурните уравнения, намираме

$$(19)\qquad \begin{aligned} &2q-\frac{1}{2}b=-\frac{1}{\psi}D\omega_{21}, \quad x_2\left(2p-\frac{1}{2}a\right)-\left(2q-\frac{1}{2}b\right)=\frac{1}{\psi}D\omega_{12},\\ &2p+\frac{1}{2}a=\frac{1}{\psi}D\omega_{43}, \quad x_2\left(2q+\frac{1}{2}b\right)-\left(2p+\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{\psi}D\omega_{34}, \end{aligned}$$

като

$$\psi=[\omega_{21}, \omega_{43}].$$

При $x_2 \neq 0$ тези уравнения позволяват еднозначното определяне на изразите $2q-\frac{1}{2}b$, $2q+\frac{1}{2}b$, $2p-\frac{1}{2}a$, $2p+\frac{1}{2}a$, а с това и до познаване на всичките форми ω_{ij}. Условията за интегруемост са [3] и следствията от (17). Така доказахме следната

Теорема. Квадратните форми (18) определят повърхнина в двуосното пространство с точност до произволна B-колинеация (1).

По-нататък в нашата работа ще използваме почти навсякъде въведения полуканоничен репер, освен ако изрично не е казано противното.

Сега ще потърсим някои линии върху повърхнината. Произволна линия (направление) върху S се задава с помощта на равенството $\omega_{43}=f\omega_{21}$, като $f=f(u, v)$ е произволна функция на параметрите u, v. Роят, образуван от допирателните прави към тази линия, е, разбира се, развиваем. Произволна права от този рой се определя с точките A и $B=A_2+fA_4$. Допирателната равнина η в произволна точка $M=A+tB$ към този рой се определя с точките A, B и dM и понеже роят е развиваем, тя не зависи от t. Нейната безкрайна права се определя с точките $J=A_1+xA_3$ и $K=A_3+yA_4$, като

$$x=\frac{df+f(\omega_{11}-\omega_{22})}{f(\omega_{31}f-\omega_{12})},\quad y=xf.$$

Правата JK сече разглежданата допирателна в точка, която не винаги е допирната точка A от повърхнината S. Естествено е да се въведат онези линии $f(u, v)$ върху S, за които безкрайната права JK минава през точката A. За тези линии получаваме диференциалното уравнение от втори ред

$$df+f(\omega_{44}-\omega_{22})=0. \tag{20}$$

От друга страна, Ив. Иванов в [7] нарича геодезична линия от първи род върху повърхнината такава линия, чиято оскулачна равнина в произволна точка от линията минава през единствената безкрайна права, определена от тази точка. Такива линии, чието съществуване е очевидно независимо от повърхнината, ние нарекохме минимални [5]. За тях е изпълнено условието $(A, dA, d^2A, A_1)=0$, и то с леки пресмятания приема вида (20), с което преди малко въведохме други специални линии върху повърхнината. Тогава, като използваме някои резултати от [2], лесно съобразяваме, че специалните линии върху повърхнината, определени с диференциалното уравнение (20), са онези линии върху S, чиито тангентни роеве са параболични.

Накрая ще въведем една специална класа от повърхнини S. Наред с повърхнината S: $A=A(u, v)$, като $A=A_1+A_3$, разглеждаме повърхнината $\bar{S}$: $\bar{A}=\bar{A}(u, v)$, като $\bar{A}=A_2+A_4$. Сега предполагаме пълна канонизация на репера. Допирателната равнина към S в A минава по ръба A_2A_4 на репера. За $d\bar{A}$ имаме

$$d\bar{A}=\omega_{12}A_1+\omega_{34}A_3+\omega_{22}\bar{A}+(\omega_{44}-\omega_{22})A_4.$$

Търсим онези повърхнини в B_3, за които допирателната равнина към $\bar{S}$ в $\bar{A}$ минава по ръба A_1A_3. Тези повърхнини S ще наричаме с п е ц и а л н и. За тях е изпълнено условието

$$\omega_{22}-\omega_{44}=0$$

и поради независимостта на формите ω_{21}, ω_{43} следва $a=b=0$. В този случай конгруенцията $[A\bar{A}]$ има за фокуси точките A и $\bar{A}$ $(x_2\neq-1)$. Нещо повече, тя се оказва W-конгруенция, тъй като асимптотичните линии върху двете повърхнини S и $\bar{S}$ се определят с едно и също диференциално уравнение.

§ 2. Конгруенции, придружаващи повърхнината

При произволно определени нормировки на точката A от повърхнината S и на върховете A_2, A_4 на придружаващия полуканоничен репер разглеждаме конгруенцията, чиято всяка права е определена с точките A и $\bar{A}$, като

$$A=A_1+A_3,\quad \bar{A}=A_2+A_4. \tag{21}$$

По същество това означава въвеждане на еднопараметрично семейство от конгруенции. За коя да е конгруенция от семейството ще приложим развитата от нас теория на конгруенции прави в двуосното пространство [4]. Най-напред търсим фокусите на правата $A\bar{A}$ и съответните развиваеми роеве на конгруенцията, минаващи през същата права. Нека $M(\varrho,\sigma)=\varrho A+$ $+\sigma\bar{A}$ е произволна точка от правата $A\bar{A}$. Като вземем пред вид (21) и (2). получаваме

$$dM=(d\varrho+\varrho\omega_{11}+\sigma\omega_{12})A_1+(d\sigma+\varrho\omega_{21}+\sigma\omega_{22})A_2$$
$$+(d\varrho+\varrho\omega_{33}+\sigma\omega_{34})A_3+(d\sigma+\varrho\omega_{43}+\sigma\omega_{44})A_4.$$

Ако M е фокусът F на правата $A\bar{A}$, трябва да бъде изпълнено

$$dF=\lambda A+\mu\bar{A}.$$

Така получаваме равенствата

$$d\varrho+\varrho\omega_{11}+\sigma\omega_{12}=\lambda,\quad d\sigma+\varrho\omega_{21}+\sigma\omega_{21}=\mu,$$
$$d\varrho+\varrho\omega_{33}+\sigma\omega_{34}=\lambda,\quad d\sigma+\varrho\omega_{43}+\sigma\omega_{43}=\mu.$$

Оттук чрез елиминираме на λ и μ намираме

$$\sigma(\omega_{12}-\omega_{34})=0,\quad \varrho(\omega_{21}-\omega_{43})+\sigma(\omega_{22}-\omega_{44})=0.$$

Имаме следните две възможности:

а) $\sigma=0$. Развиваемият рой на конгруенцията, който има за централна точка $F_1=A$, се дава с $\omega_{21}=\omega_{43}$.

б) $\sigma\neq 0$. От първото уравнение на последната система намираме $\omega_{12}=\omega_{34}$, а от второто — $\varrho=\omega_{22}-\omega_{44}$, $\sigma=\omega_{43}-\omega_{21}$. Тогава развиваемият рой на конгруенцията $\omega_{12}=\omega_{34}$ има за централна точка

$$F_2=(\omega_{22}-\omega_{44})A+(\omega_{43}-\omega_{21})\bar{A}.$$

Значи придружаващата конгруенция $[A\bar{A}]$ има за първа фокална повърхнина изходната повърхнина S. Развиваемите роеве на тази конгруенция се дават с равенството

$$(\omega_{21}-\omega_{43})(\omega_{12}-\omega_{34})=0. \tag{22}$$

Сега търсим параболичните роеве на конгруенцията. Предполагаме, че произволен рой се представя във вида

$$\omega_{21}=f\omega_{43},\quad f=f(u,v).$$

Произволна точка M от правата $A\bar{A}$ на този рой е представена във вида $M(t)=A+t\bar{A}$. Допирателната равнина към него в точката $M(t)$ се определя тангенциалните си координати по следния начин:

$$\eta=(A, \bar{A}, dM)=[A, \bar{A}, \omega_{12}tA_1+(\omega_{21}+\omega_{22}t)A_2+\omega_{34}tA_3+(\omega_{43}+\omega_{44}t)A_4].$$

Тя сече абсолютните прави j и k съответно в точките $J=A_1+\lambda A_2$ и $K=A_3+\mu A_4$, като

$$\lambda=\mu=\frac{\omega_{21}-\omega_{43}+(\omega_{22}-\omega_{44})t}{(\omega_{12}-\omega_{34})t}$$

Безкрайната права JK сече разглежданата права $A\bar{A}$ в точката $M'(t')=A+t'\bar{A}$, като

(23) $$t'=\frac{\omega_{21}-\omega_{43}+(\omega_{22}-\omega_{44})t}{(\omega_{12}-\omega_{34})t}.$$

Съответствието $t\to t'$ е проективност с двойни елементи, които се определят от квадратното уравнение

(24) $$(\omega_{12}-\omega_{34})t^2+(\omega_{44}-\omega_{22})t+\omega_{43}-\omega_{21}=0.$$

Определените оттук точки $M(t_{1,2})$ върху правата $A\bar{A}$ се наричат възлови точки на Петканчин за роля $f=f(u, v)$ [1]. Параболични са онези рoеве, за които квадратното уравнение (24) има двоен корен. За тях е в сила

(25) $$(\omega_{22}-\omega_{44})^2+4(\omega_{12}-\omega_{34})(\omega_{21}-\omega_{43})=0.$$

Сравнявайки (22) с (25), можем да формулираме следната

Теорема. Необходимото и достатъчно условие за съвпадане на развиваемите и параболичните роеве на конгруенцията е за тази конгруенция да бъде изпълнено равенството

$$\omega_{22}-\omega_{44}=0.$$

При пълна канонизация на репера това условие е еквивалентно с равенствата

$$a=b=0.$$

Значи повърхнината S се оказва специална и $[A\bar{A}]$ е W-конгруенция.

Като вземем пред вид (9) за полуканоничен репер и полагането $\omega_{22}-\omega_{44}=a\omega_{21}+b\omega_{43}$, уравнението на възловите точки (24) добива вида

(24') $$[(x_1+x_2)f+(x_2+x_3)]t^2+(af+b)t+(f-1)=0,$$

а уравнението на параболичните роеве става

(25') $$(af+b)^2-4(f-1)[(x_1+x_2)f+x_2+x_3]=0.$$

Възловите точки на два роя f и f' образуват хармонична група тогава и само тогава, когато за тях е изпълнено условието

(26) $$f'=\frac{(2x_1-2x_3+ab)f+(4x_2+4x_3+b^2)}{(4x_1+4x_2-a^2)f-(2x_1-2x_3+ab)}$$

Съответствието $f \to f'$, установено с последното равенство, е инволюция в семейството роеве с параметър f и двойните елементи на тази инволюция са тъкмо параболичните роеве на конгруенцията. Тази инволюция има чисто двуосен характер, докато инволюцията, породена от условието за хармонично пресичане на два роя, има проективен характер. Два роя f и f' се секат хармонично тогава и само тогава, когато е изпълнено условието

$$f'=\frac{(x_1-x_3)f+2(x_2+x_3)}{2(x_1+x_2)f-(x_1-x_3)} \tag{27}$$

Двойните елементи на тази инволюция са развиваемите роеве на конгруенцията.

Двете инволюции (26) и (27) имат в общия случай една обща двойка спрегнати роеве. За да ги намерим, трябва да приравним десните страни на (26) и (27). За опростяване на формулите ще използваме каноничен репер. При $x_2 \neq -1$ двете инволюции добиват вида

$$f'=\frac{abf+c}{df-ab}, \qquad f'=\frac{1}{f},$$

като $c=4(x_2+x_3)+b^2$, $d=4(x_1+x_2)-a^2$. Общата двойка роеве се дават с

$$f_1=-\frac{b}{a}, \qquad f_2=-\frac{a}{b}. \tag{28}$$

Роят, чиито възлови точки са хармонично спрегнати с фокусите на конгруенцията, нарекохме в [4] главен (хармоничен) рой. Лесно се намира, че главният рой на конгруенцията се дава с

$$f_1=-\frac{b}{a}. \tag{29}$$

Тогава другият рой от общата двойка роеве (28) е абсолютният рой на конгруенцията

$$f_2=-\frac{a}{b}. \tag{30}$$

Изследванията, които направихме в този параграф, ни дават възможност да намерим нови мрежи линии върху повърхнината S в двуосното пространство. Да резюмираме въведените линии в този и предния параграф.

1. Асимптотичните линии върху S се дават с диференциалното уравнение $\mathrm{II}=0$; те имат проективен характер.

2. Параметричните линии се дават с диференциалното уравнение $\mathrm{I}=0$; те имат двуосен характер.

3. Минималните линии върху повърхнината се дават с диференциалното уравнение от втори ред (20); те имат двуосен характер.

4. Линиите върху S, отсечени от развиваемите роеве на конгруенцията $[AA]$, се дават с диференциалното уравнение (22), което при каноничен репер приема вида

$$\mathrm{III}=(\omega_{21})^2-(\omega_{43})^2=0. \tag{31}$$

Те образуват спрегната мрежа линии относно асимптотичните и параметричните линии на повърхнината.

5. Параболичните линии върху S се получават от пресичането на параболичните роеве на придружаващата конгруенция $[A\bar{A}]$ със самата повърхнина. Определят се с квадратното уравнение (25) и имат двуосен характер.

6. Абсолютните роеве на придружаващата конгруенция $[A\bar{A}]$, когато точката A се мени върху повърхнината, отсичат върху S едносистема от линии, които са дават с диференциалното уравнение $b\omega_{21}+a\omega_{43}=0$; те имат двуосен характер.

7. Главните роеве на конгруенцията отсичат върху S едносистема от линии, които се определят с диференциалното уравнение $\omega_{22}-\omega_{44}=a\omega_{21}+b\omega_{43}=0$; те имат двуосен характер.

В предния параграф показахме, че двете квадратни форми I и II определят повърхнината. Първата квадратна форма може да бъде заменена с третата квадратна форма на повърхнината (31). Действително, ако са дадени две квадратни форми, които сме означили с II и III, веднага можем да представим III в разлика от два квадрата и с това са намерени формите ω_{21}, ω_{43}. След тора от II ще намерим величината x_2. По-нататък определянето на формите ω_{ij} става като в § 1. И тъй, квадратните форми II и III определят повърхнина в двуосното пространство с точност до произволна B-колинеация.

§ 3. Двуосно налагане на повърхнини и придружаващите ги конгруенции

В § 1 с всяка точка A от повърхнината S свързахме еднозначно определен полуканоничен репер $A_1A_2A_3A_4$, определен по следния начин:

$$A=A_1+A_3; \tag{6}$$

върховете A_2 и A_4 са пресечни точки на абсолютните прави j и k с допирателната равнина към S в A. Този репер се характеризираше с равенството

$$\omega_{11}=\omega_{33}, \tag{10}$$

което след външно диференциране дава

$$\begin{aligned}\omega_{12}&=x_1\omega_{21}+x_2\omega_{43},\\ \omega_{34}&=x_2\omega_{21}+x_3\omega_{43}.\end{aligned} \tag{9'}$$

Понятието двуосно налагане на две повърхнини е аналогично на понятието проективно налагане [8], [9]. Казваме, че повърхнината $S^*: B=B(u^*, v^*)$ двуосно се налага върху повърхнината $S: A=A(u, v)$, ако между точките на двете повърхнини е установено взаимно еднозначно съответствие и на всяка двойка съответни точки A, B е присъединена двуосна колинеация (1), която преобразува повърхнината S^* в повърхнината S' така, че точката B' съвпада с точката A, а всички безкрайно близки точки B' съвпадат със съответните им точки A до безкрайно малки от втори ред. За безкрайно малки от първи ред приемаме нарастванията на координатите на повърхнината при прехода от точката A към точката $\bar{A}$.

По формулата на Тейлор за повърхнината S ще имаме развитие от вида

$$\bar{A}=A+dA+\frac{1}{2}d^2A+\cdots$$

и аналогично за втората повърхнина S'. От определението на двуосно налагане следва, че трябва да бъде изпълнено равенството

$$B'=dB'+\frac{1}{2}d^2B'+\cdots=\left(A+dA\quad\frac{1}{2}d^2A+\cdots\right)\left(\varrho+\varrho_1+\frac{1}{2}\varrho_2+\cdots\right)$$

с точност до безкрайно малки от втори ред. В това равенство ϱ е скаларна функция на координатите u, v, ϱ_1 — линейна диференциална форма на същите променливи u, v, а ϱ_2 — квадратна форма на du, dv. От предното равенство получавзме следните три равенства:

$$\begin{aligned} B'&=\varrho A,\\ dB'&=\varrho dA+\varrho_1 A, \qquad (32)\\ d^2B'&=\varrho d^2A+2\varrho_1 dA+\varrho_2 A. \end{aligned}$$

Преди да пристъпим към следствията от тези изисквания, да припомним, че относителните компоненти ω^*_{ij} на повърхнината S^* са инваринатни, т. е. след преобразуването (1) те не се изменят: значи $\omega^*_{ij}=\omega'_{ij}$.

Предполагаме, че повърхнината S е отнесена спрямо полуканоничен репер, а повърхнината S^* спрямо онзи репер $B_1B_2B_3B_4$, който при горното преобразуване се трансформира в репера $A_1A_2A_3A_4$; значи $B'_i=A_i$. Тогава от първото равенство на (32) веднага следва, че $\varrho=1$. Понеже $B'=B'_1+B'_3$, ръбът B_1B_3 на репера $B_1B_2B_3B_4$ е безкрайната права, определена от точката B.

Второто условие на (32) заедно с предното и казаните по-горе предпоставки ни осигурява двуосно налагане от първи ред на повърхнините. Поради независимостта на точките A_1, A_2, A_3, A_4 от него следват

$$\omega'_{11}=\omega_{11}+\varrho_1 \quad \omega'_{33}=\omega_{33}+\varrho_1, \qquad (33)$$

$$\omega'_{21}=\omega_{21}, \qquad \omega'_{43}=\omega_{43}. \qquad (34)$$

Равенствата (34) определят съответствието между двете повърхнини. Едното от равенствата (33) определя ϱ_1, а като елиминираме от двете тази величина и вземем пред вид (10), получаваме

$$\omega'_{11}=\omega'_{33}, \qquad (10')$$

което показва, че реперът $B_1B_2B_3B_4$ на повърхнината S^* е също полуканоничен — от типа на репера $A_1A_2A_3A_4$. Значи по същество (33) са ограничения на репера $B_1B_2B_3B_4$. Чрез външно диференциране на (10') получаваме

$$-\omega'_{12}=x'_1\omega_{21}+x'_2\omega_{43}, \quad \omega'_{34}=x'_2\omega_{21}+x'_3\omega_{43}, \qquad (9'')$$

а външното диференциране на (34) ни дава

$$(\omega'_{11}-\omega_{11})-(\omega'_{22}-\omega_{22})=\lambda\omega_{21},$$
$$(34') \qquad (\omega'_{33}-\omega_{33})-(\omega'_{44}-\omega_{44})=\mu\omega_{43}.$$

На пръв поглед равенствата (34′) изглежда да са ограничения за двете повърхнини. Това обаче не е така. За да покажем последното твърдение, ще специализираме придружаващите репери на двете повърхнини по особен начин. Да диференцираме външно първото и третото равенство на системата (12), като предварително сме въвели инвариантните производни $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{3,1}$, $x_{3,2}$ на функциите x_1, x_3 чрез полаганията

$$dx_1=x_{1,1}\omega_{21}+x_{1,2}\omega_{43}, \quad dx_3=x_{3,1}\omega_{21}+x_{3,2}\omega_{43}.$$

Така получаваме

$$d(y_1-x_{1,1})+(y_1-x_{1,1})(\omega_{11}-\omega_{22})+2y_1(\omega_{11}-\omega_{22})+4x_1\omega_{12}=z_1\omega_{21}+z_2\omega_{43},$$
$$d(y_2-x_{1,2})+(y_2-x_{1,2})(\omega_{33}-\omega_{44})+2y_2(\omega_{11}-\omega_{22})=z_2\omega_{21}+z_3\omega_{43},$$
$$d(y_3-x_{3,1})+(y_3-x_{3,1})(\omega_{11}-\omega_{22})+2y_3(\omega_{33}-\omega_{44})=z'_1\omega_{21}+z'_2\omega_{43},$$
$$d(y_4-x_{3,2})+(y_4-x_{3,2})(\omega_{33}-\omega_{44})+2y_4(\omega_{33}-\omega_{44})+4x_3\omega_{34}=z'_2\omega_{21}+z'_3\omega_{43}.$$

При изменение само по вторичните параметри второто и третото от тези равенства приемат вида

$$\delta(y_2-x_{1,2})+(y_2-x_{1,2})(\pi_{11}-\pi_{44})+2y_2(\pi_{11}-\pi_{22})=0,$$
$$\delta(y_3-x_{3,1})+(y_3-x_{3,1})(\pi_{11}-\pi_{22})+2y_3(\pi_{11}-\pi_{44})=0.$$

Те показват, че в общия случай $y_2\neq 0$, $y_3\neq 0$ можем да направим две нормирания, като положим

$$(35) \qquad y_2=x_{1,2}, \quad y_3=x_{3,1}.$$

Нормировката (4) води до каноничен репер, който за разлика от предния, за който важат формулите (17), ще наричаме **нормален** придружаващ репер на повърхнината. Сега първото и третото равенство на (12) показват, че $\omega_{11}-\omega_{22}$, $\omega_{33}-\omega_{44}$ са пропорционални съответно на ω_{21}, ω_{43} и следователно можем да положим $\omega_{11}-\omega_{22}=4m\omega_{21}$, $\omega_{33}-\omega_{44}=4n\omega_{43}$. Така получаваме следните основни формули в теорията на повърхнините в двуосното пространство при избрания нормален репер:

$$\omega_{11}=\omega_{33}=m\omega_{21}+n\omega_{43},$$
$$(36) \qquad \omega_{22}=-3m\omega_{21}+n\omega_{43}, \quad \omega_{44}=m\omega_{21}-3n\omega_{43},$$
$$\omega_{12}=-x_1\omega_{21}-x_2\omega_{43}, \quad \omega_{34}=x_2\omega_{21}+x_3\omega_{43}.$$

Като се използват току-що намерените формули, лесно може да се съобрази, че (34′) не са ограничения за повърхнините — именно трябва да се има пред вид, че при двете повърхнини е въведен нормален репер. Значи изискванията за двуосна наложимост от първи ред на повърхнините не налагат никакви отраничения за последните. Този резултат може да се изкаже и така:

Теорема. Всеки две повърхнини са двуосно наложими от първи ред.

Не стои обаче така въпросът за двуосна наложимост от втори ред. Действително от последното условие на (32) получаваме връзките

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
&d\omega'_{11}+\omega'_{11}\omega'_{11}+\omega'_{21}\omega'_{12}=d\omega_{11}+\omega_{11}\omega_{11}+\omega_{21}\omega_{12}+2\varrho_1\omega_{11}+\varrho_2,\\
&d\omega'_{33}+\omega'_{33}\omega'_{33}+\omega'_{43}\omega'_{34}=d\omega_{33}+\omega_{33}\omega_{33}+\omega_{43}\omega_{34}+2\varrho_1\omega_{33}+\varrho_2,\\
&d\omega'_{21}+\omega'_{11}\omega'_{21}+\omega'_{21}\omega'_{22}=d\omega_{21}+\omega_{11}\omega_{21}+\omega_{21}\omega_{22}+2\varrho_1\omega_{21},\\
&d\omega'_{43}+\omega'_{33}\omega'_{43}+\omega'_{43}\omega'_{44}=d\omega_{43}+\omega_{33}\omega_{43}+\omega_{43}\omega_{44}+2\varrho_1\omega_{43}.
\end{aligned}
$$

Оттук намираме преди всичко, че

$$
\mathrm{II}'=\omega'_{34}\omega'_{43}-\omega'_{12}\omega'_{21}=\omega_{34}\omega_{43}-\omega_{12}\omega_{21}=\mathrm{II},
$$

което може да се запише по следния начин:

$$
(x_1-x'_1)(\omega_{21})^2+2(x_2-x'_2)\omega_{21}\omega_{43}+(x_3-x'_3)(\omega_{43})^2=0.
$$

Поради произвола в избора на направленията $\omega_{21}:\omega_{43}$ следват

$$
x'_1=x_1,\quad x'_2=x_2,\quad x'_3=x_3.
$$

Те показват, че $\omega'_{12}=\omega_{12}$, $\omega'_{34}=\omega_{34}$. От (33) и последните две равенства на (37) следват

$$
\omega'_{ii}-\omega_{ii}=\varrho_1\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).
$$

За двата репера можем да въведем тривиалните нормировки посредством (4). От последните равенства и (5) заключаваме, че $\varrho_1=0$ и сега всички $\omega'_{ij}=\omega_{ij}$. Това означава, че двете повърхнини са двуосно еквивалентни. Така доказахме следната

Теорема. Ако между две повърхнини съществува двуосно налагане от втори ред, повърхнините са двуосно еквивалентни, т. е. след подходяща B-колинеация те съвпадат.

Сега към условията за двуосно налагане от първи ред на повърхнините ще присъединим условията за двуосно налагане от първи ред на придружаващите конгруенции. Понятието двуосно налагане на две конгруенции се дефинира по аналогичен начин като понятието двуосно налагане на две повърхнини. Само в равенствата (32) координатите на точка трябва да се заменят с плюкеровите координати на правата $A\bar{A}$. По този начин условията за допиране от първи ред на придружаващите конгруенции ще се запишат с помощта на следните две равенства:

$$
(38)\qquad
\begin{aligned}
&(B'\bar{B}')=(A\bar{A}),\\
&d(B'\bar{B}')=d(A\bar{A})+\sigma_1(A\bar{A}).
\end{aligned}
$$

Първото условие не ни дава нищо. Като вземем пред вид, че

$$
\begin{aligned}
d(A\bar{A})=&(\omega_{11}+\omega_{22})(A_1A_2)+(\omega_{34}-\omega_{12})(A_1A_3)+(\omega_{11}+\omega_{44})(A_1A_4)\\
&+(\omega_{22}+\omega_{33})(A_3A_2)+(\omega_{21}-\omega_{43})(A_2A_4)+(\omega_{33}+\omega_{44})(A_3A_4),
\end{aligned}
$$

второто условие ни позволява да напишем

$$
(39)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_{34}'-\omega_{12}'=\omega_{34}-\omega_{12}, &&\omega_{11}'+\omega_{22}'=\omega_{11}+\omega_{22}+\sigma_1,\\
&\omega_{11}'+\omega_{44}'=\omega_{11}+\omega_{44}+\sigma_1, &&\omega_{22}'+\omega_{33}'=\omega_{22}+\omega_{33}+\sigma_1,\\
&\omega_{21}'-\omega_{43}'=\omega_{21}-\omega_{43}, &&\omega_{33}'+\omega_{44}'=\omega_{33}+\omega_{44}+\sigma_1
\end{aligned}
$$

Първото равенство на тази система ни дава непосредствено

$$
(40)\qquad x_1'+x_2'=x_1+x_2,\quad x_2'+x_3'=x_2+x_3.
$$

Същото външно диференцирано след известни преобразувания приема вида

$$
(x_2'-x_2)(a+b)[\omega_{21},\ \omega_{43}]=0.
$$

Като изключим случая, когато $a+b=0$, следва

$$
(41)\qquad x_2'=x_2.
$$

От (40) и (41) получаваме

$$
x_1'=x_1,\quad x_2'=x_2.
$$

Тогава $\omega_{12}'=\omega_{12}$, $\omega_{34}'=\omega_{34}$. Ако за двата репера направим нормировките (4), от (5) и от равенството, което се получава като съберем първото и третото равенство от дясната колона на (39), заключаваме, че $\sigma_1=0$. Така получаваме

$$
\begin{aligned}
\omega_{11}'-\omega_{11}+\omega_{22}'-\omega_{22}&=0,\\
\omega_{33}'-\omega_{33}+\omega_{44}'-\omega_{44}&=0
\end{aligned}
$$

и равенствата (34) показват, че $\lambda=\mu=0$. Отново получаваме всички $\omega_{ij}'=\omega_{ij}$ и значи двете повърхнини са двуосно еквивалентни. Можем да изкажем следната

Теорема. Ако между две повърхнини съществува двуосно налагане от първи ред така, че и придружаващите конгруенции са също двуосно наложими от първи ред, двете повърхнини са двуосно еквивалентни, т. е. след подходяща двуосна колинеация съвпадат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин Б., Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **48**, 1953/54, кн. 1 (мат. и физ.), ч. I, 33—67.
2. Петканчин Б., Параболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **49**, 1954/55, кн. 1 (мат. и физ.), ч. I, 48—84.
3. Станилов Г., Комплекси от прави в двуосната геометрия, Изв. на Мат. инст. на БАН, т. VIII, 1964, 23—56.
4. Станилов Г., Конгруенции от прави в биаксиалната геометрия, Год. на Соф. унив., Мат. фак., **58**, 1964.
5. Станилов Г., Минимални линии в двуосната геометрия, Физ-мат. спис., **7**, кн. 1, 1964, 51—53.
6. Иванов Ив., Основные формулы дифференциальной геометрии биаксиального пространства, Докл. БАН, **14**, 1, 1961, 11—13.

7. Иванов Ив., Геодезические линии первого рода биаксиального пространства как минимальные линии, Докл. БАН, 15, 7, 1962, 697—698.
8. Иванов Ив., Върху налагането на повърхнини в хиперболичното двуосно пространство, Докл. БАН, 17, 8, 1964, 685—688.
9. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана, Москва—Ленинград, 1948.

Постъпила на 9. VII. 1964 г.

ПОВЕРХНОСТИ И КОНГРУЭНЦИИ В БИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Грозю Станилов

(Резюме)

Биаксиальное пространство B_3 определяется двумя вещественными скрещивающимися абсолютными прямыми j и k. Мы используем реперы $A_1A_2A_3A_4$, для которых A_1 и A_2 принадлежат j, а A_3 и A_4 принадлежат k. Инфинитезимальные преобразования даются формулами (2), причем формы Пфаффа ω_{ij} удовлетворяют уравнениям структуры (3).

В § 1 строим дифференциально-геометрический аппарат для исследования поверхности. Полуканонический репер, связанный с поверхностью $S: A=A(u, v)$, определяется при помощи (6) и кроме того A_2 и A_4 принадлежат касательной плоскости к поверхности S в точке A. Имеет место соотношение (8). Широта решения — одна функция двух аргументов. Квадратичные формы (11) и (14) будут инвариантными. Уравнение $\mathrm{I}=0$ дает параметрические линии, а $\mathrm{II}=0$ — асимптотические линии поверхности. Величина J, определенная посредством (13), будет инвариантом, для нее дано геометрическое толкование (15). Нормирования $x_1=x_3=1$ и (4) приводят к каноническому реперу. Основные формулы будут (17), а квадратичные формы (18) определяют поверхность в B_3. Уравнение (20) дает минимальные линии поверхности.

В § 2 к поверхности присоединяем конгруэнцию (21). Ее развертывающиеся поверхности даются при помощи (22) или (31), а (25) определяет параболические поверхности конгруэнции. Инволюции (26) и (27) имеют общую пару поверхностей (28). Таким образом на поверхности определены новые системы линий: (22), (25), (29) и (30). Квадратичные формы II и (31) тоже определяют поверхность.

В § 3 вводим понятие биаксиального изгибания поверхности и конгруэнции. Любые две поверхности биаксиально наложимы первого порядка. Если две поверхности биаксиально наложимы второго порядка, то они биаксиально эквивалентны. Тот же результат получается, если к условию биаксиальной наложимости первого порядка двух поверхностей присоединим условия биаксиальной наложимости первого порядка сопровождающих конгруэнций.

FLÄCHEN UND KONGRUENZEN IM ZWEIACHSIGEN RAUM

Grosju Stanilov

(Zusammenfassung)

Der zweiachsige Raum B_3 wird durch zwei reelle windschiefe Geraden j und k bestimmt. Wir benutzen die Gesamtheit der Tetraeder, in denen A_1 und A_2 auf der absoluten Geraden j, während A_3 und A_4 auf der anderen absoluten Geraden k liegen. Die Infinitesimaltransformationen der Grundpunkte eines Tetraeders aus dieser Gesamtheit sind durch (2) gegeben. Die Pfaffschen Formen θ_i genügen den Strukturgleichungen (3) des Raumes B_3.

Eine Fläche S liegt vor, wenn ein beliebiger Punkt A der Fläche eine Funktion von zwei Parametern u, v ist. Mit jedem Punkt der Fläche verbinden wir im § 1 ein halbkanonisches Tetraeder, wobei (6) gilt und A_2, A_4 in der Tangentialebene der Fläche S im Punkte A liegen. Die quadratischen Formen (11) und (14) sind Invarianten. Die Nullinien der Form I sind die Koordinatenlinien, die Nullinien der Form II dagegen die Asymptotenlinien. Die Invariante J lässt eine geometrische Deutung zu (15). Die Normierungen (4) und $x_1 = x_3 = 1$ führen zu einem kanonischen Tetraeder. Die Fundamentalformen dabei sind (17). Die Fläche bestimmt man durch die quadratischen Formen (18). Die Gleichung (20) bestimmt die Minimallinien der Fläche.

Im § 2 betrachten wir die die Fläche begleitende Kongruenz (21). Die Gleichung (22) oder (31) bestimmt die Torsen und (25) — die parabolischen Regelscharen der Kongruenz. Wenn die Knotenpunkte der zwei Regelscharen f und f' eine harmonische Gruppe bilden, so gilt (26). Die beiden Regelscharen schneiden sich harmonisch, wenn (27) gilt. Die Regelscharen (28) und (29) bilden das einzige gemeinsame Paar der Involutionen (26), (27). Auf diese Weise finden wir neue Liniennetze auf der Fläche: (22), (25), (29), (30).

Im § 3 führen wir den Begriff der zweiachsigen Abwicklung bei den Flächen und den Kongruenzen ein. Je zwei beliebige Flächen sind zweiachsig-abwickelbar von der 1. Ordnuug. Wenn zwei Flächen zweiachsig-abwickelbar von der 2. Ordnung sind, so sind sie zweiachsig-äquivalent. Wenn zwei Flächen zweiachsig-abwickelbar von der 1. Ordnung sind und auch die begleitenden Kongruenzen zweiachsig-abwickelbar von der 1. Ordnung sind, so sind die Flächen zweiachsig-äquivalent.