БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

РАЗРЕШИМИ С РАДИКАЛИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Иван Байчев

В настоящата работа установяваме едно достатъчно условие за разрешимост с радикали на алгебрични уравнения, без да си служим с връзките на Галуа и теорията на групите. Аналозите на теоремите на Силов за полета, които тук използваме, са вече доказани по такъв път от Дуйчев в [1] и [2].

Нека P е поле и K е негово истинско разширение. Подполето L на K се нарича минимално, ако $P \subset L \subseteq K$ и не съществува подполе Δ такова, че $P \subset \Delta \subset L$.

Теорема. Нека P е крайно разширение на полето на рационалните числа и $f(x)=0$ е нормално алгебрично уравнение над P от нечетна степен n. Да означим с K полето на разлагане на полинома $f(x)$ над P. Ако всичките минимални нодполета на K са от степен q или q^2 спрямо P, където q е просто число, уравнението $f(x)=0$ е разрешимо с радикали над P.

Доказателство. Нека $K=P(\alpha)$, където α е един от корените на уравнението

$$f(x)=0, \tag{1}$$

и $n=p^{\lambda}m$, където p е най-големият прост делител на n, като $(m, p)=1$,

Нека още

$$\varphi(x)=0 \tag{2}$$

е неразложимо над P уравнение от степен m с корени $\theta_1=\theta, \theta_2, \ldots, \theta_m$ от които $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ принадлежат на полето $P(\theta)$.

Да предположим, че $k<m$. Подполето $P(\theta)$ притежава $s=m/k$ различни спрегнати подполета в K спрямо P.

Действително спрегнатите с $P(\theta)$ подполета са изоморфни над P, следователно всяко от тях съдържа по k корена на уравнението (2) и две различни такива подполета не съдържат един и същ корен на (2).

Да разгледаме уравнението

$$\psi(x)=(x-\theta_1)(x-\theta_2)\ldots(x-\theta_k)=x^k-\sigma_1 x^{k-1}+\cdots+(-1)^k\sigma_k=0, \tag{3}$$

където

$$\sigma_i=\sum\theta_1\theta_2\ldots\theta_i, \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Нека

$$P(\sigma_1, \sigma, \dots, \sigma_k) = P(\beta),$$

където

$$\beta = \sigma_1 + A_1\sigma_2 + \cdots + A_{k-1}\sigma_k$$

и $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ са числа от P.

Ще покажем, че

$$[P(\beta):P] = s. \tag{4}$$

Нека $\omega(x) = 0$ е неразложимото над P уравнение за β и r е неговата степен. Ако $\beta_1 = \beta, \beta_2, \dots, \beta_m$ са спрегнатите на β спрямо $P(\theta)$, полиномът

$$G(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_m)$$

е с коефициенти от P и има общ корен β с $\omega(x)$. Но тогава $G(x)$ се дели на $\omega(x)$ и понеже всеки корен на $G(x)$ е корен и на $\omega(x)$, то

$$G(x) = c[\omega(x)]^l,$$

където c е число от P. Така получаваме, че числата $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ се разпределят на r групи по l равни.

Понеже β_1 е симетрична функция на $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$,

$$\beta_1 = \beta_2 = \qquad = \beta_k,$$

откъдето получаваме, че $k \leqq l$.

От друга страна, ако $\sigma(x)$ е неразложимият над $P(\beta)$ делител на $\varphi(x)$, на който е корен θ, то понеже $P(\beta, \theta) = P(\theta)$, $\sigma(x)$ е от степен

$$[P(\theta): P(\beta)] = \frac{[P(\theta):P]}{[P(\beta):P]} = \frac{m}{r} = l.$$

Но $\sigma(x)$ дели $\psi(x)$, понеже двата полинома имат общ корен θ, следователно $l \leqq k$.

Така получаваме, че $l = k$, откъдето следва (4), а също и неразложимостта на уравнението (3) над $P(\beta)$.

Нека H е минимално подполе на $P(\beta)$ и $\varphi_1(x) = 0$ е неразложимото над H уравнение за θ. Коефициентите на това уравнение са от полето $P(\beta)$ и понеже то има общ корен θ с неразложимото над $P(\beta)$ уравнение (3), $\psi(x)$ дели $\varphi_1(x)$. Следователно полето $P(\theta) = H(\theta)$ съдържа k корена на уравнението $\varphi_1(x) = 0$. Тогава, ако разглеждаме H като основно поле, получаваме, че броят на различните спрегнати с $P(\theta)$ подполета в K спрямо H е

$$s_1 = [P(\beta): H]. \tag{5}$$

Съгласно с една от теоремите на Силов

$$s = 1 + \delta p, \quad s_1 = 1 + \delta_1 p.$$

Тогава от (4) и (5) получаваме

$$[H:P] = \frac{[P(\beta):P]}{[P(\beta):H]} = \frac{s}{s_1} = \frac{1+\delta p}{1+\delta_1 p} = 1 + \tau p,$$

където $\tau > 0$.

Но по условие $[H:P]=q$ или q^2, където q е очевидно прост делител на n, следователно

$$1+\tau p=q,$$

или

$$1+\tau p=q^2.$$

Първото равенство е невъзможно, понеже $q<p$. От второто равенство имаме

$$\tau p=q^2-1=(q+1)(q-1)$$

и тъй като $p\geqq q+1$, то $p=q+1$. Но това е възможно само при $p=3$, $q=2$, което противоречи на условието, че n е нечетно число.

С това е установено, че $k=m$, т. е. че уравнението (2) е нормално над P. То е от нечетна степен и всичките минимални подполета на $P(\theta)$ са от степен q или q^2 спрямо P, понеже са минимални подполета на K. Да предположим, че теоремата е в сила за това уравнение и то е разрешимо с радикали над P. Ако $f_1(x)$ е неразложимият над $P(\theta)$ делител на $f(x)$, на който числото α е корен, то понеже $P(\theta,\alpha)=P(\alpha)=K$ и $[K:P(\theta)=p^\lambda$, уравнението $f_1(x)=0$ е от степен p^λ и е разрешимо с радикали над $P(\theta)$. Но тогава и уравнението (1) ще бъде разрешимо с радикали над P. В такъв случай индуктивно следва, че теоремата е в сила и за уравнението (1).

Ще отбележим накрая, че $P(\beta)$ е минималното подполе на $P(\theta)$, над което $P(\theta)$ е нормално.

Действително $P(\theta)$ е нормално над $P(\beta)$, понеже е поле на разлагане на полинома $\psi(x)$. Ако Δ е истинско подполе на $P(\beta)$, над което $P(\theta)$ е нормално, да означим с $\varphi_2(x)$ неразложимия над Δ делител на $\varphi(x)$, на който числото θ е корен. Понеже $\Delta(\theta)=P(\theta)$, степента на $\varphi_2(x)$ е

$$[P(\theta):\Delta]>[P(\theta):P(\beta)]=k$$

и $P(\theta)$ е поле на разлагане на полинома $\varphi_2(x)$. Тогава $P(\theta)$ ще съдържа повече от k корена на уравнението (2), което противоречи на условието.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуйчев Й., Разрешими с радикали алгебрични уравнения, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **53**, 1958/59, кн. 1,13—17.
2. Дуйчев Й., Едно достатъчно условие за разрешимост с радикали на алгебрични уравнения, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **54**, 1959/60, кн. 1, 167—171.

Постъпила на 5. VIII. 1964 г.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, РАЗРЕШИМЫЕ В РАДИКАЛАХ

Иван Байчев

(Резюме)

Элементарным путем, не используя теорию групп и теорию Галуа, доказывается следующая

Теорема. Пусть P конечное расширение поля рациональных чисел и $f(x)=0$ нормальное алгебраическое уравнение нечетной степени n над P. Обозначим через K поле разложения многочлена $f(x)$. Если все минимальные подполя поля K имеют степень q или q^2, где q простое число, уравнение $f(x)=0$ разрешимо в радикалах над P.

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES RÉSOLUBLES PAR RADICAUX

Ivan Bajčev

(Résumé)

Par des moyens élémentaires, sans utiliser la théorie des groupes et la théorie de Galois on démontre le théorème suivant:

Soit P une extension finie du corps des nombres rationnels et soit $f(x)=0$ une équation algébrique et normale sur P de degré impair n. Désignons par K le corps de décomposition du polynome $f(x)$. Si tous les sous-corps minimaux du K sont de degré q ou q^2, q étant un nombre premier, l'équation $f(x)=0$ est résoluble par radicaux sur P.