БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ АCADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

NOUVEAUX RÉSULTATS CINÉMATIQUES CONCERNANT LA SYNTHÈSE DES MÉCANISMES À MOUVEMENT PLAN ET SPATIAL

D. Mangeron, G. Tudor[1] et V. V. Topentcharov[2]

Le développement rapide des machines à grande vitesse et à régimes non uniformes a nettement augmenté dans les dernières années les exigences techniques auquelles doivent satisfaire leurs mécanismes. C'est la cause de la reprise des études dans le domaine classique de la cinématique des mécanismes, complétée par l'introduction de notions cinématiques complètement nouvelles, à noter celles d'accélérations réduites et d'invariants cinématiques.

Dans une série de notes D. Mangéron a introduit la notion d'accélération réduite d'ordre supérieur [1], [2], extension naturelle de la notion, devenue classique, d'accélération réduite ordinaire (d'ordre 1) [3], [4], [5], qui a été étudiée en détails peu après [6], [7], [8]. Les accélérations réduites ont trouvé leur justification dans l'étude des enveloppes linéaires des courbes bielles intéressantes pour la synthèse des quadrilatères articulés à mouvement plan et pour la formation de l'algorithme de leurs équations [9], dans la synthèse de nouveaux conhoïdographes et l'analyse des courbes et surfaces — enveloppantes linéaires [10], [11], [12].

Le présent article a pour but, tout en reprenant et précisant les définitions des différentes formes d'accélérations réduites d'ordre quelconque, de donner une série de théorèmes, qui sont des généralisations de théorèmes de la Cinématique pure. Nous explicitons les rapports qui existent entre ces théorèmes et les cas particuliers connus, comblant plusieurs lacunes de la théorie et faisant les démonstrations de certains théorèmes par des méthodes très puissantes, explicons les analogies qui existent entre les cas des accélérations ordinaires et ceux qui se présentent dans les généralisations aux accélérations d'ordre supérieur (réduites ou non).

Tout en respectant les normes de rigueur logique, obligatoires dans tout exposé mathématique, nous nous sommes refusés à faire une théorie complètement formalisée, la Cinématique étant en fin de compte destinée aux applications industrielles. On ne se propose non plus d'exposer toute la théorie des éléments cinématiques d'ordre supérieur. C'est l'objet d'une monographie en préparation.

---

[1] Institut Polytechnique de Iasi, Roumanie.
[2] Institut de Mécanique appliqué et d'Electricité de Sofia, Bulgarie.

*

Nous allons définir les accélérations réduites.

Définition 1 (DI). L'accélération réduite au sens large est l'accélération au point $M \in S$, normée moyennant un scalaire, fonction du pseudovecteur $\boldsymbol{\omega}$ — la vitesse de rotation et de ses dérivées par rapport au temps.[1]

Cette définition, étant parfaitement justifiée au point de vue théorique et indiquant le caractère exacte au point de vue algébrique de la réduction des accélérations, n'est pas commode en Cinématique appliquée à cause de sa généralité. Dans le cas ordinaire de la cinématique euclidienne dans l'espace à trois dimensions, il est préférable, pour généraliser la notion d'accélération réduite d'ordre $n=1$, qui possède des propriétés essentiellement géométriques, de prendre pour base la définition suivante:

Définition 2 (D2). L'accélération réduite (simple) d'ordre n et de type A au point M du solide S, notée $\mathbf{a}_{MA}^{(n)}$, est un vecteur, collinéaire au vecteur accélération d'ordre n en M et de norme euclidienne égale au rapport de la norme de l'accélération $\mathbf{a}_M^{(n)}$ et d'un scalaire $A_n - A_n(\mathbf{u})$, dont les valeurs pour $n \in N$ sont données par les formules de récurrence:

$$A_{n+1} = \dot{A}_n + \boldsymbol{\omega}\mathbf{B}_n, \qquad \mathbf{B}_{n+1} = \dot{\mathbf{B}}_n - \boldsymbol{\omega}\mathbf{A}_n,$$

$$A_1 = \omega^2 \qquad \mathbf{B}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \varepsilon,$$

$$A_1(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\omega}\mathbf{u})(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}), \qquad B_1(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_1\mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{u},$$

$$A_2(\mathbf{u}) = 3(\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{u})(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}), \qquad B_2(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_2\,\mathbf{u} = (\ddot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{u})(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}),$$

$$A_3(\mathbf{u}) = 4(\ddot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{u})(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}) + 3(\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{u})(\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{u}) - \qquad B_3(\mathbf{u}) = \cdots$$

$$- \boldsymbol{\omega}^2(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u})(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}),$$

$$A_4(\mathbf{u}) = \cdots$$

La formule de définition de l'accélération réduite d'orde n et de type A est alors

$$\mathbf{a}_{MA}^{(n)} \frac{1}{A_n - A_n(\mathbf{u})} \mathbf{a}_M^{(n)}. \tag{1}$$

Il est évident, d'après DI, que plusieurs définitions d'accélération réduite peuvent être données. Nous énoncerons encore une, qui donne un nouveau type de réduction auquel nous trouverons dans la suite le contenu cinématique, qui est loin d'être trivial.

Définition 3 (D3). L'accélération réduite (simple) d'ordre n et de type B_+ (resp. B_-) au point $M \in S$, notée $\mathbf{a}_{MB+}^{(n)}$, est un vecteur colinéaire à l'accélération d'ordre n en M et de norme euclidienne égale au produit de

[1] Par sa nature mathématique le „vecteur" $\boldsymbol{\omega}$ n'est nullement un vecteur. C'est un bivecteur de rang 3, qui intervient dans les calculs soit au moyens de ses coordonnées covariantes, soit par les coordonnées contravariantes. L'interprétation sous forme de vecteur est due à la propriété particulière de l'espace euclidien à trois dimensions où tout bivecteur peut être identifié à un vecteur. Pour les détails, voir par exemple Elie Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, 1937 (1946).

la norme de $\mathbf{a}_M^{(n)}$ par le coefficient λ_+^n (resp. λ_-^n), ce dernier étant donné par l'expression

$$\lambda_\pm^n = \frac{1}{2}\,\frac{A_n + A_n(\mathbf{u}) \pm \sqrt{(A_n - A_n(\mathbf{u}))^2 - 4B_n^2(\mathbf{u})}}{A_n A_n(\mathbf{u}) + B_n^2(\mathbf{u})}$$

Les accélérations réduites d'ordre n et de type B_+ (B_-) sont alors

$$\mathbf{a}_{MB\pm}^{(n)} = \lambda_\pm^n \mathbf{a}_M^{(n)}.$$

Quelques remarques s'imposent.

Remarque 1. Les accélérations réduites (quel que soit leur type et l'ordre) ne diffèrent des accélérations que par les normes des vecteurs. Il s'en suit, que les champs cinématiques des vecteurs — accélérations $\mathbf{a}^{(n)}$, $\mathbf{a}_A^{(n)}$, $\mathbf{a}_{B+}^{(n)}$, $\mathbf{a}_{B-}^{(n)}$, sont identiques à un coefficient du champ près.

Remarque 2. De fait les accélérations réduites, comme l'indiquent D2 et D3, sont de trois types A, B_+ et B_-. On ne parle que des types A et B, car le signe du radical dans l'expression qui donne les deux valeurs de λ^n n'est pas de nature cinématique (il n'a pas une interprétation cinématique directe). Tandis que le type A est une généralisation directe de l'accélération réduite de type I dans le mouvement plan, il n'en est plus de même pour le type B. Ce dernier recevra une interprétation étroitement liée aux propriétés extrémales des accélérations réduites du type A.

Remarque 3. L'accélération réduite d'ordre 1 est

$$\mathbf{a}_{MA} = \frac{\mathbf{a}_M}{\omega^2 \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})}.$$

L'accélération réduite d'ordre 0 et de type A, si l'on pose $A_0 = 1$, $B_0 = \boldsymbol{\omega}$ et $A_0(\mathbf{u}) = 1$, n'est pas définie et celle du type B_+ (B_-) est

$$\mathbf{a}_{MB\pm}^0 = \mathbf{v}_{MB\pm} = \frac{2 \pm i}{5}\,\mathbf{v}_M.$$

Il est donc tout à fait évident, que le résultat remarquable pour le mouvement plan, où l'accélération réduite pour $n = 1$ est un objet géométrique (le rayon vecteur relatif du point $M \in S$) en ce qui concerne la composante normale, n'est pas valable dans le mouvement spatial. Quant aux accélérations réduites d'ordre 0 (les vitesses réduites) elles n'ont pas de sens au point de vue cinématique et nous les excluons de cette étude.

Théorème 1 (de la distribution des accélérations réduites d'ordre n). Les accélérations réduites d'ordre n et de type A (resp. B_+ et B_-) sont des fonctions linéaires des coordonnées de $M \in S$ dans le système de référence mobile et leur distribution s'exprime par la formule

(2) $$\mathbf{a}_A^{(n)} = \mathbf{a}_{oA}^{(n)} \| + \Omega_{nA} | \varrho$$

où par sont notées les matrices-colonnes des vecteurs et Ω_{nA} est une matrice carrée de dimension $n \times n$, dont les éléments sont déterminés au moyen de la formule de récurrence

$$\omega_{n+1,i}^{\;j} = \dot{\omega}_{n,i}^{\;j} + \sum_{k=1}^{3} \Theta_i^k \omega_{nk}^{\;j} \quad (i=1, 2, 3;\; j=0, 1, 2, 3)$$

$$\Theta_i^i = 0, \quad \Theta_1^2 = -\Theta_2^1 = r, \quad \Theta_2^3 = -\Theta_3^2 = p, \quad \Theta_1^3 = -\Theta_3^1 = q, \quad \omega = p\mathbf{f} + q\mathbf{g} + r\mathbf{h},$$

divisée par le facteur normeur correspondant au type de réduction de l'accélération. Donc la matrice Ω_{nA} ne diffère de la matrice de distribution des éléments cinématiques d'ordre n [14], que par le facteur $1/A_n - A_n(\mathbf{u})$ (resp. par λ_+^n ou λ_-^n).

La démonstration du théorème est manifestement la même que dans le cas des accélérations (non réduites), car les champs vectoriels cinématiques normés ou non ne présentent différence qu'au point de vue norme euclidienne des vecteurs du champs et la distribution étant la même.[1]

Pour faciliter les démonstrations des théorèmes qui suivent il est très utile de définir pour le cas des accélérations réduites la notion de permanence d'une propriété d'un champ vectoriel cinématique.

D é f i n i t i o n 4. Une propriété P du champ cinématique des accélérations est dite $n-A$-permanente (resp. $n-B_+$-permanente; $n-B_-$-permanente), si étant vraie pour $n=1$ et pour les accélérations non normées, elle est vraie pour tout $n \in N$ et pour le champ des accélérations réduites du type A (resp. du type B_+; B_-).[2]

Cette définition serait démunie de sens sans le théorème suivant, que donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une propriété P soit $n-A$-permanente.

T h é o r è m e 2 (de permanence). Une propriété P du champ des accélérations d'ordre $n=1$ non normées est $n-A$-permanente (resp. $n-B_+$-permanente; $n-B$ — permanente) si et seulement si elle est déduite de la propriété du champ d'avoir sa distribution des vecteurs linéaire dans le sens du théorème 1, notée $P(L)$.

Ce théorème est déduit immédiatement du fait qu'un théorème de ce type étant vrai pour les accélérations (ordinaires) [14], [15], il est encore vrai pour les champs des accélérations réduites, puisque au point de vue de structure (voir D2, D3, R1 et T1) il n'existe pas de différence entre ces champs. Et le théorème étant basé sur la propriété $P(L)$, n'est nullement affecté par cette différence.

Mais la réciproque du théorème n'est pas vraie.

C o r o l l a i r e 2.1. Une propriété vraie pour $n \neq 1$ et pour les accélérations réduites, n'est pas forcément vraie pour les accélérations.

En effet il existe un exemple élémentaire qui confirme C 2.1. L'accélération réduite de type I (qui correspond en quelque sorte au type A) dans le

[1] Cette situation devient tout à fait naturelle dans l'interprétation des champs vectoriels cinématiques (champs des vitesse, des accélérations et des accélérations d'ordre supérieur) comme ensemble des buts d'une application définie sur l'espace mobile et de valeurs dans l'espace des vecteurs euclidiens. Une étude complète dans ce sens est à paraître prochainement.

[2] La notion de n-permanence pour les éléments d'ordre supérieur en Cinématique est introduite dans [14] et développée dans [15]. C'est l'outil accommodé par excellence à l'étude des analogies entre champs de différent ordre.

mouvement plan est un élément géométrique, en ce qui concerne sa composante normale. Il n'en est plus de même pour la composante normale de l'accélération $\mathbf{a}_M$, qui n'est pas invariante dans un changement du paramètre temps (t), différant de la translation.

Du théorème 2 de permanence on déduit plusieurs propriétés des champs des accélérations réduites, à noter la distribution biaxiale des accélérations réduites d'ordre $n=1$, qui n'est plus possible pour $n \geqq 2$ (propriété démontrée pour les accélérations dans [16], [17]), l'identité des centres instantannés des accélérations pour les quatre champs cinématiques (propriété qui reste valable pour tout type de réduction des accélérations dans le sens de D1), l'existence d'un ellipsoïde des accélérations pour tout n et tour scalaire, etc.

Définitions 5. Deux droites sont C-conjuguées (cinématiquement conjuguées) si l'une est déduite de l'autre par une propriété P des éléments cinématiques.

Cette définition permet de donner plusieurs théorèmes et d'éclaircir le sens de propositions déjà énoncées.

Théorème 3 (des droites C-conjuguées réduites). Le lieu des extrémités des accélérations réduites d'ordre n et de type A (resp. de type B_+, B_- ou quel que soit le type de réduction dans le sens de D1) des points M d'une droite $\mathcal{D} \in S$ est une droite $\mathcal{D}_{nA} \in S$ (resp. $\mathcal{D}_{nB+}$, $\mathcal{D}_{nB-}$ ou autre).

Le théorème est classique pour les accélérations à $n=1$ [13], [23]. Etant déduit de la propriété de distribution linéaire P(L), il est encore vrai pour tout $n \in N$. Comme c'est une propriété de caractère affine, d'après T2 elle est aussi $n-A$-permanente (resp. $n-B$-permanente). Donc puisque la droite existe pour $n=1$ elle existe pour tout n et pour tout type de réduction du champ des accélérations.

Une démonstration directe du théorème[1] permet d'obtenir la forme explicite de l'équation de la droite $\mathcal{D}_{nA}$, qui en notations cinématique est

$$\mathcal{D}_{nA}: \mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \mu\mathbf{u} + \mathbf{a}_M^{(n)} \quad (M \in \mathcal{D}: \mathbf{r}_0 + \mu\mathbf{u}).$$

On en déduit quelques corollaires, dont les démonstrations, d'ailleur très élémentaires, sont omises.

Corollaire 3.1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{nA}$ sont orthogonales.[2]

Corollaire 3.2. Les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_{nA}$, $\mathcal{D}_{nB_+}$ et $\mathcal{D}_{nB_-}$ n'ont pas des points communs dans le cas général et pour un choix arbitraire de $\mathcal{D}$.

Corollaire 3.3. Si le centre instantanné des accélérations d'ordre n Q_n appartient à la droite $\mathcal{D}$, les cinq droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{nA}$, $\mathcal{D}_{nB_+}$, $\mathcal{D}_{nB_-}$ et $\mathcal{D}_n$ ont un point commun. C'est, comme il s'en suit des commentaires donnés à propos de T2 le point Q_n. Si le mouvement n'a pas de particularités cinématiques, il est unique.

---

[1] Pour un théorème de même caractère, voir une démonstration directe et développée dans [18]. Elle est simplement accommodable pour le cas que nous traitons ci-dessus.

[2] Il n'en est plus de même pour les autres couples de droites qui peuvent être formées, au moins dans le cas général,

Corollaire 3.4. Les cas particuliers d'éléments communs des droites C-conjuguées à $\mathcal{D}$ sont:

(a) La droite $\mathcal{D}$ de verseur $\mathbf{u}$ est telle que $\mathbf{a}_M \wedge \mathbf{u}$ 0 $(\forall M \in \mathcal{D})$. Dans ce cas toutes les droites sont identiques à $\mathcal{D}$.

(b) Deux facteurs normeurs sont égaux. Les droites qui leurs corréspondent sont identiques. Soit par exemple $\lambda_+^n = \lambda_-^n$: on a $\mathcal{D}_{nB_+} = \mathcal{D}_{nB_-}$.

Définition 6. Une croix de Kotelnikov généralisée d'ordre n est un couple de sous-espaces linéaires de même dimension de l'espace euclidien à k dimensions en mouvement euclidien, tel que le second sous-espace du couple soit le lieu des extrémités des vecteurs des éléments cinématiques d'ordre $n+1$ (accélérations d'ordre n), réduites dans le sens de D2, des points de l'espace mobile, qui appartiennet au premier sous-espace du couple.

Les droites conjuguées sont des restrictions de cette définition à l'espace euclidien à trois dimensions, ou en étant son élargissement, étant liée par une propriété cinématique plus générale.

Théorème 4 (des croix de Kotelnikov généralisées). Les accélérations réduites d'ordre n et d'un type déterminé des points M_i de la droite $\mathcal{D} \in S$ en mouvement spatial général appartiennent à une croix de Kotelnikov généralisée au sens de D5.

Corollaire 4.1. Chaque type de réduction du champ des accélérations d'un certain ordre détermine une croix de Kotelnikov, qui sera noté K_J^n, l'indice supérieur étant celui de l'ordre de la croix et l'indice inférieur — du type de réduction (dans les cas que nous traitons $J = B_+, B_-, A$). Les croix de Kotelnikov généralisées K_A^n, $K_{B_+}^n$ et $K_{B_-}^n$ ne sont identiques qu'en cas de particularités cinématiques du mouvement.

Corollaire 4.2. Les croix de Kotelnikov K_J^n dans le mouvement plan sont deux droites orthogonales de ce plan. Il n'existe que trois type de croix de Kotelnikov dans le mouvement plan: pour les accélérations réduites de type I $(J = \mathrm{I})$, pour le type II $(J = \mathrm{II})$ et pour les accélérations non réduites.

Nous énoncerons trois théorèmes sur les droites C-conjuguées.

Théorème 5 (des deux droites C-conjuguées A-réduites). L'angle complèxe déterminé par le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{nA})$ des droites C-conjuguées A-réduites dans le sens de T4, présenté sous la forme dite (par abus de languague) duale, est donné par la formule

$$a_n = \Theta_n + d_n \,.\, \mathrm{w} \quad (\mathrm{w}^2 = 0).$$

Ici nous avons noté par Θ_n l'angle défini par les verseurs des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{nA}$ et par d_n la longueur de la perpendiculaire commune des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{nA}$.

L'expression trigonométrique de T4 est

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \Theta_n + d_n \mathrm{w}(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta),$$

où l'angle Θ_n est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\{[\mathbf{u} + \lambda_n(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u})^{(n)}]^2 \quad [1 - \lambda_n(A_n - A_n(\mathbf{u})]^2\}^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda_n(A_n - A_n(\mathbf{u}))}.$$

La démonstration est assez volumineuse, quoique élémentaire au point de vue raisonnement mathématique. Comme elle ne donne rien d'intéressant à part le résultat ci-dessus, nous ne l'exposons pas.

Théorème 6 (des complèxes quadratiques C-conjugués). Si un point $M \in S$ appartient au complexe quadratique $\mathcal{E}^2$, formé des droites $\mathcal{D}(\mathbf{u}) \in S$, l'extrémité M' du vecteur de l'accélération réduite d'ordre n et de n'importe quel type de $M \in S$, appartient au complexe quadratique $\mathcal{E}_J^2$ des droites $\mathcal{D}_{nJ}$, C-conjuguées J-réduites de $\mathcal{D}$ ($J = A$, B_+, B_-).

La démonstration découle immédiatement de D5 et T3. L'intérêt principal de T6 est qu'on introduit un objet géométrique, qui étant formé d'éléments linéaires n'est pas un hyperplan, dans un calcul cinématique et son élément C-conjugué est un objet géométrique de même espèce.

Les droites des complexes $\mathcal{E}_n^2$ et $\mathcal{E}_{nJ}^2$, C-conjuguées forment des angles, qui dépendent en général des verseurs de la droite $\mathcal{D}$ du complexe de base $\mathcal{E}_n^2$, ce qui met en évidence l'intérêt, que présente le théorème suivant.

Théorème 7 (d'isogonalité). Si deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{nA}$ appartiennent aux complexes C-conjugués A-réduits $\mathcal{E}_{on}^2$ et $\mathcal{E}_{nA}^2$, où le complexe $\mathcal{E}_{on}^2$ est formé par les droites $\mathcal{D}$ ($\mathbf{u}$) dont les verseurs satisfont à l'équation algébrique, provenante des formules de récurrence de D2

$$A_n(\mathbf{u}) = 0,$$

l'angle Θ_n défini par leurs verseurs $\mathbf{u}_0$ ot $\mathbf{u}_{0A}$ est indépendant des verseurs eux-mêmes et est une fonction des éléments cinématiques angulaires (le vecteur rotation et ses dérivées)

$$\cos \gamma_n = f(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\omega}}).$$

En effet, si dans le théorème 5 on remplace la condition de définition des complexes $\mathcal{E}_n^2$ et $\mathcal{E}_{nA}^2$: $A_n(\mathbf{u}) = 0$, les conditions du théorème 7 sont accomplies et le résultat des formules du théorème 5 démontre le théorème 7.

Il n'en est plus de même évidemment pour la distance de la perpendiculaire commune au deux droites C-conjuguées du couple $\mathcal{E}_{0n}^2$ et $\mathcal{E}_{nA}^2$ — d_n. Elle est fonction des verseurs $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_{0A}$ des droites en question.

Théorème 8 (des propriétés extrémales). Les accélérations réduites d'ordre n et de type A possèdent des proporiétés extrémales. (Ils existent des points à valeurs extrémales de l'accélération réduite.)

Démonstration. Soit

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{M0} + \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 \qquad (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = 0,\ \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 = 1),$$

l'équation du plan (P) invariablement lié au solide S en mouvement spatial général. Le lieu des points — extrémités des vecteurs-accélérations d'ordre n $\mathbf{a}_M^{(n)}$ normés par un facteur de réduction dans le sens de D1, est le plan (P_n), dont l'équation est

$$\mathbf{r}_{nM}^* = \mathbf{r}_{M0} + \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{a}_M^{(n)}$$

μ_1 et μ_2 étant des paramètres, $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ — des verseurs, tel que $\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2$ ou encore, vue la définition de $\mathbf{a}_M^{(n)}$

$$\mathbf{r}_{nM}^*=\mathbf{r}_{M0}+\frac{d^{(n+1)}}{dt^{(n+1)}}(\mathbf{r}_{M0}+\mu_1\mathbf{u}_1+\mu_2\mathbf{u}_2).$$

Mais pour la distribution des accélérations d'ordre n dans le solide S on a la formule (donnée sous une forme presque identique dans [19])

$$\mathbf{a}_M^{(n)}=\mathbf{a}_{M0}^{(n)}+(-A_n-\mathbf{B}_n\wedge)\mathbf{r}+\sum\boldsymbol{\omega}^{(j)}(\mathbf{C}_{nj}\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{r}=x\mathbf{u}_1+y\mathbf{u}_2+z\mathbf{u}_3,$$

où les notations A_n et B_n sont d'après D2, le vecteur $\mathbf{C}_{nj}$ est donné par les formules de récurrence suivantes

$$\mathbf{C}_{nj}=\mathbf{C}_{n-1,\,j-1}+D\mathbf{C}_{n-1,\,j}\qquad (j=0,1,\ldots,n-1;\quad n=1,2,\ldots)$$

$$\mathbf{C}_{10}=\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{C}_{n-1,\,-1}=\mathbf{B}_{n-1}$$

où D est l'opérateur différentiel absolu $D\equiv\frac{d}{dt}-\boldsymbol{\omega}\wedge\ldots$ Et encore

$$A_{n+1}=\dot{A}_n+\boldsymbol{\omega}\mathbf{B}_n,\quad \mathbf{B}_{n+1}=\dot{\mathbf{B}}_n-\boldsymbol{\omega}A_n.$$

Etant donné le plan (P), la tangente trigonométrique de l'angle défini par les vecteurs unitaires normaux aux plans (P) et son correspondant (P_n), atteint un extrémum pour les deux valeurs du paramètre λ, données par l'expression

$$\lambda_n',\ \lambda_n''=\frac{A_n+A_n(\mathbf{u}_3)\pm\sqrt{[A_n-A_n(\mathbf{u}_3)]^2-4B_n^2(\mathbf{u}_3)}}{A_nA_n(\mathbf{u}_3)+B_n^2(\mathbf{u}_3)},\quad \mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2$$

solutions de l'équation algébrique du second degré[1]

$$\lambda^2(A_n\,.\,A_n(\mathbf{u}_3)+B_n^2(\mathbf{u}_3))-\lambda(A_n+A_n(\mathbf{u}_3))+1=0.$$

A la fois on obtient les valeurs de λ pour lesquelles la dite propriété extrémale se manifeste et on démontre la propriété elle-même, puisque des valeurs de λ qui la satisfont existent et sont réelles.

Corollaire 8.1. A chaque plan $(P)\in S$ correspondent deux plans (P_n^+) et (P_n^-), qui ont les propriétés extrémales. Leurs équations sont

$$(P)\quad \mathbf{r}_M=\mathbf{r}_{M0}+\mu_1\mathbf{u}_1+\mu_2\mathbf{u}_2+\mu_3\mathbf{u}_3,$$

$$(P_n^+)\quad \mathbf{r}_{Mn}^+=\mathbf{r}_{M0}+\mu_1\mathbf{u}_1+\mu_2\mathbf{u}_2+\mu_3\mathbf{u}_3+\mathbf{a}_M^{(n)+}\qquad (\mathbf{a}_M^{(n)+}=\lambda_n^+\mathbf{a}_M^{(n)}),$$

$$(P_n^-)\quad \mathbf{r}_{Mn}^-=\mathbf{r}_{M0}+\mu_1\mathbf{u}_1+\mu_2\mathbf{u}_2+\mu_3\mathbf{u}_3+\mathbf{a}_M^{(n)-}\qquad (\mathbf{a}_M^{(n)-}=\lambda_n^-\mathbf{a}_M^{(n)}).$$

Ces plans possèdent deux propriétés essentielles, que nous allons formuler dans les théorèmes suivants.

---

[1] Cette équation est obtenue en dérivant la tangente trigonométrique de l'angle formé par les normales des plans (P) et (P_n) et en l'annulant. Les calculs, qui ne présentent aucun intérêt sont omis.

Théorème 9 (des croix de Kotelnikov des plans extrémaux). Les plans (P) et (P_n^+) (resp. (P) et (P_n^-)), définis dans le théorème 8 et dans C8.1, forment une croix de Kotelnikov au sens de la définition 6.

La démonstration découle immédiatement de la définition même des croix de Kotelnikov généralisées et de celle des plans considérés.

Théorème 10. Le trièdre défini par le triplet de plans (P, P_n^+, P_n^-) est un trièdre orthogonal pour tout $n \in N$.

Cette propriété découle du fait, que les plans (P_n^+) et (P_n^-) sont formés par les droites C-conjuguées A-réduites, qui d'après T3 et C3.1. sont orthogonales pour tout $A(\mathbf{u})$. Les plans (P_n^+) et (P_n^-) ne sont que des cas particuliers, obtenus pour des valeurs particulières de $A(\mathbf{u})$ ou plus précisément de $A_n - A_n(\mathbf{u})$, donc elles satisfont à C3.1. Comme les deux plans en question sont distincts (la racine de l'équation du second degré n'étant pas supposée double), il s'en suit que $\mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{v}(P_n^+) = 0$, $\mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{v}(P_n^-) = 0$, $\mathbf{v}(P_n^+) \wedge \mathbf{v}(P_n^-) \neq 0 (\mathbf{v}^2 = 1)$ d'où $\mathbf{v}(P) \mathbf{v}(P_n^+) \mathbf{v}(P_n^-) = \pm 1$.

Dans le cas tout à fait particulier d'une racine double, le trièdre en question dans le théorème n'est pas défini.

Certaines remarques s'imposent.

Les théorèmes ci-présents sont des généralisations de théorèmes plus ou moins connus dans le mouvement plan ou de certains mouvements spatiaux particuliers. Le caractère nettement appliqué des cas élémentaires pour l'analyse et la synthèse des mécanismes justifie les généralisations en question.

La majorité des notions et propositions, que nous venons d'énoncer et de démontrer sont à généraliser dans la Cinématique des euclidiens à p dimensions ($p > 3$). Le problème de la possibilité de pareille généralisation ainsi que la généralisation elle-même paraîtra prochainement pour compléter cette étude, quelques essais dans ce domaine étant déjà publié [20], [21], [22].

BIBLIOGRAPHIE

1. Манжерон Д., Доклады АН СССР, **102**, № 5, 1955, 897—898.
2. Манжерон Д., Доклады АН СССР, **112**, № 1, 1957, 27—28.
3. Манжерон Д., К. Дрэган, Исследование механизмов методом приведенных ускорений, Труды Второго Всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и синтез механизмов, Москва, 1960, 111—122, 209—210.
4. Mangeron D., C. Dragan, Revue de Mécanique Appl., II (1), 1957, 145—156.
5. Mangeron D., D. Tavhélidze, Bull. Inst. polit. Iasi, VII(IX), 1—2, 1961, 253—256.
6. Mangeron D., V. V. Topentcharov, Bull. Inst. polit. Iasi, VIII (XII), 3—4, 1962, 285—288.
7. Mangeron D., C. Dragan, N. Irimiciuc, Matematica, Cluj, **4** (27), 1, 1962, 159—200.
8. Mangeron D., D. Kamitadze, Bull. Inst. polit. Iasi, VIII(XII), 1—2, 1962, 289—294.
9. Mangeron D., P. Lebedev, Bull. Inst. polit. Iasi, VIII (XII), 1—2, 1962, 317—320.
10. Mangeron D., Variations of accelerations of any order from the standpoint of dual geometry and their application to the theory of mecanisms and machines. The Eighth Congress of theoretical and applied mecanics, Delhi, Oct. 10—12, 1963, 71—73.
11. Манжерон Д., Е. Кроатору, Доклады АН СССР, **148**, № 1, 1963, 54—56.

12. Манжерон Д., Я. С. Зильберман, Труды Ростовского на Дону инст. железнодор. трансп., XXIX, 1961, 5—10.
13. Garnier R., Cours de Cinématique, vol. I et II, Paris, Gauthier-Villars, 1960, 1956,
14. Topentcharov V. V., Sur les éléments cinématiques et certaines propriétés du mouvement, Matematica, Cluj **6** (29), 2 1964.
15. Topentcharov V. V., Propriétés permanentes des champs vectoriels en Cinématique, 1965 (sous presse).
16. Topentcharov V. V., B. I! Tchechancov, St. si Serc. Mec. Appl., XIII, 4, 1962, 1031—1034.
17. Топенчаров В. В., М. С. Константинов, П. И. Генова, Год. на МЕИ, X, 1, 1961, 95—103.
18. Mangeron D., E. Croatoru, Rendiconti Acc. naz. dei Lincei, s. VIII, XXXII (4), 1962, 505—508.
19. Кроатору Е., Д. Манжерон, В. В. Топенчаров, Год. на МЕИ, XI, 1, 1962, 73—83.
20. Топенчаров В. В., Год. на МЕИ, XV, 1, 1965 (под печат).
21. Topentcharov V. V., B. I. Tchechancov, C. R. de l'Ac. Bulg. des Sci., **16**, No. 6, 1963, 573—576.
22. Topentcharov V. V., B. I. Tchechancov, Bul. de l'IP, Iasi, XI (XV), 1964.

Постъпила на 14. IX. 1964 г.