БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ВЪРХУ СХОДИМОСТТА НА ЕДИН ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПРОЦЕС ОТНОСНО ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА

Веселин Спиридонов

1. Предварителни понятия

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са функции, дефинирани в един и същ интервал Δ, а $\bar{f}$ и $\bar{g}$ са допълнените им графики според [1]. Хаусдорфово разстояние $r(f, g)$ между $f(x)$ и $g(x)$ наричаме числото

$$r(f, g) = \max\{\max_{X\in\bar{f}} \min_{Y\in\bar{g}} \|X-Y\|_0,\ \max_{X\in\bar{g}} \min_{Y\in\bar{f}} \|X-Y\|_0\},$$

където

$$\|X-Y\|_0 = \max\{|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|\},$$

ако координатите на X и Y съответно са (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Редица свойства на хаусдорфовото разстояние са разгледани в [1] и [2].

Във връзка с апроксимиране на функции относно хаусдорфовото разстояние Сендов [3] въвежда понятието „модул на немонотонност".

Дефиниция 1. Нека $f(x)$ е дефинирана в крайния интервал Δ. Модул на немонотонност на $f(x)$ в Δ наричаме

$$\mu(\delta) = \sup_{|x_1-x_2|\leq\delta} \{\sup_{x_1\leq x\leq x_2} [|f(x_1)-f(x)| + |f(x_2)-f(x)|] - |f(x_1)-f(x_2)|\},$$

където $x_1, x_2 \in \Delta$ и $x_1 \leq x_2$.

Ето някои свойства на модула на немонотонност, установени в [3], които ще ни бъдат необходими по-нататък.

Свойство 1. Необходимо и достатъчно условие функцията $f(x)$ да е монотонна в интервала Δ: е нейният модул на немонотонност в този интервал да бъде тъждествено равен на нула.

Свойство 2. Ако функцията $f(x)$ има модул на непрекъснатост $\omega(\delta)$ и модул на немонотонност $\mu(\delta)$, то $\mu(\delta) \leq 2\omega(\delta)$.

Дефиниция 2. Функцията $f(x)$ ще наричаме локално монотонна в интервала Δ, ако за модула на немонотонност е изпълнено

$$\lim_{\delta\to 0} \mu(\delta) = 0.$$

Свойство 3. Всяка равномерно непрекъсната функция е локално монотонна. Всяка монотонна функция е локално монотонна.

Свойство 4. Необходимо и достатъчно условие функцията $f(x)$ да бъде локално монотонна в крайния отворен интервал Δ е: за всяко $x \in \Delta$ да съществуват лява и дясна граница $f(x-0)$ и $f(x+0)$, като $f(x)$ се намира между $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Свойство 5. Нека $f(x)$ е локално монотонна функция в интервала Δ с модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Нека $x_0 \in \Delta$ и интервалите $\Delta_1=[x_0-\delta, x_0]$, $\Delta_2=[x_0, x_0+\delta]$ се съдържат в Δ. Ако y_0 е произволно число между $f(x-0)$ и $f(x+0)$, неравенството

$$f(x) \geqq y_0 - \frac{1}{2}\mu(2\delta)$$

е изпълнено или за всяко $x \in \Delta_1$, или за всяко $x \in \Delta_2$ и неравенството

$$f(x) \leqq y_0 + \frac{1}{2}\mu(2\delta)$$

е изпълнено или за всяко $x \in \Delta_1$, или за всяко $x \in \Delta_2$.

2. Интерполационен процес на С. И. Рапопорт

Да означим с $R_n(f; x)$ полинома, аналогичен на интеграла на Вале-Пусен за функцията $f(x)$:

$$R_n(f; x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos^{2n} \frac{x_k - x}{2},$$

където

$$x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Известна е следната [5], [6]

Теорема на Рапопорт. Ако $f(x)$ е непрекъсната и 2π-периодична функция, равномерно на цялата ос

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f; x) = f(x).$$

Ако $\omega(\delta)$ е модулът на непрекъснатост на $f(x)$,

$$|R_n(f; x) - f(x)| \leqq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3 + \frac{2\pi}{\sqrt{2n+1}}\right).$$

3. Сходимост на интерполационния процес с полиноми $R_n(f; x)$ по отношение на хаусдорфовата метрика

Ще разгледаме множеството $B_{2\pi}$ от функции $f(x)$, които са локално монотонни и 2π-периодични. За такива функции ще докажем теорема, аналогична на теоремата на Рапопорт, като ще изследваме сходимостта на интерполационния процес по отношение на хаусдорфовата метрика. В [3] и [4] Сендов изследва степента на апроксимиране по отношение на хаусдорфовото разстояние чрез сумите на Фейер, полиномите на Джексон и интегралите на Вале-Пусен и интерполиране чрез полиномите на Ермит—Фейер, които резултати ще използваме.

Лема 1. За всяко натурално n и $\delta \geqq \pi\sqrt{\frac{\ln n}{2n}}$ е изпълнено неравенството

$$\Phi_n(\delta, x)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k\in\Delta(x)}\cos^{2n}\frac{x_k-x}{2}\leq\frac{2\pi}{\sqrt{n}},$$

където $\Delta(x)$ е множеството от тези индекси k, за които

$$|x-x_k|>\delta,\ x_k=\frac{2k\pi}{2n+1},\quad k=0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Доказателство. Тъй като

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2\pi}\leq\sqrt{\frac{n}{\pi}},$$

$$\left|\cos\frac{x_k-x}{2}\right|\leq\left|1-\left(\frac{x_k-x}{\pi}\right)^2\right|$$

и

$$\left(1-\frac{\ln n}{2n}\right)^{2n}\leq\frac{1}{n},$$

получаваме

$$\Phi_n(\delta, x)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k\in\Delta(x)}\cos^{2n}\frac{x_k-x}{2}$$

$$\leq\frac{2\sqrt{\pi n}}{2n+1}\sum_{k\in\Delta(x)}\left[1-\left(\frac{x_k-x}{\pi}\right)^2\right]^{2n}\leq\frac{2\sqrt{\pi n}}{2n+1}\sum_{k\in\Delta(x)}\left[1-\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2\right]^{2n}$$

$$<2\sqrt{\pi n}\left[1-\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2\right]^{2n}\leq2\sqrt{\pi n}\left[1-\frac{\ln n}{2n}\right]^{2n}\leq\frac{2\sqrt{\pi n}}{n}=\frac{2\pi}{\sqrt{n}}.$$

Като имаме пред вид лема 1, свойство 5 и тъждеството

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k=0}^{2n}\cos^{2n}\frac{x_k-x}{2}=1,$$

по същия начин, както в [4], могат да се докажат следните две леми:

Лема 2. Нека $f(x)\in B_{2\pi}$ и има модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Ако $X(x', y')$ е произволна точка от $\bar{f}$, за всяко $\delta>\pi\sqrt{\frac{\ln n}{2n}}$ може да се намери точка $Y(x'', y'')$ от графиката на полинома $R_n(f; x)$, за която

$$\|X-Y\|_0\leq\max\left[\delta,\ \frac{1}{2}\mu(4\delta)+\frac{4\pi M}{\sqrt{n}}\right],$$

където $M=\sup|f(x)|$.

Лема 3. Ако $X(x', y')$ е произволна точка от графиката на $R_n(f; x)$, за всяко $\delta>\pi\sqrt{\frac{\ln n}{2n}}$ може да се намери точка $Y(x'', y'')$ от $\bar{f}$, за която

$$\|X-Y\|_0\leq\max\left[\delta,\ \frac{4\pi M}{\sqrt{n}}\right].$$

От лема 2 и лема 3 следва

Теорема 1. Нека $f(x)\in B_{2\pi}$ и има модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Ако $R_n(f; x)$ е интерполационният полином на Рапопорт, за всяко $\delta>\pi\sqrt{\frac{\ln n}{2n}}$ е изпълнено

$$r(f, R_n) \leq \max\left[\delta, \frac{1}{2}\mu(4\delta) + \frac{4\pi M}{\sqrt{n}}\right].$$

Ако положим $\delta = \pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, от теорема 1 следва

Теорема 2. При условието на теорема 1 съществува такава положителна константа C, че ако $\mu(\delta) < \frac{\delta}{2}$, то

$$r(f, R_n) \leqq C\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$$

и ако $\mu(\delta) > \frac{\delta}{2}$, то

$$r(f, R_n) \leqq C\mu\left(4\pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

Сега можем да изкажем теорема, аналогична на теоремата на Рапопорт:

Теорема 3. Ако $f(x)$ е локално монотонна и 2π-периодична функция, за хаусдорфовото разстояние $r(f, R_n)$ е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} r(f, R_n) = 0.$$

Ако $\mu(\delta)$ е модулът на немонотонност на $f(x)$, съществува положителна константа C такава, че ако $\mu(\delta) < \frac{\delta}{2}$, то

$$r(f, R_n) \leqq C\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$$

и ако $\mu(\delta) \geqq \frac{\delta}{2}$, то

$$r(f, R_n) \leqq C\mu\left(4\pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

Оценката $\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ не може да бъде подобрена съществено (т. е. с положителна степен на n). За доказателството на това твърдение ще изберем следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \sin x \geqq 0, \\ 0, & \text{ако } \sin x < 0. \end{cases}$$

Ще докажем следната

Лема 4. За всяко натурално n може да се намери такава положителна константа C, че ако $\delta \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$, да бъде изпълнено неравенството

$$\Phi_n(\delta, x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k \in \Delta(x)} \cos^{2n}\frac{x_k - x}{2} > \frac{2C}{\sqrt{n}},$$

където $\Delta(x)$ е множеството от тези индекси k, за които

$$|x - x_k| > \delta, \quad x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Доказателство. Да изберем константите C_1, C_2 и индекса l по такъв начин, че неравенството

$$\cos\frac{x_k-x}{2}\geqq 1-C_1(x_k-x)^2$$

да бъде изпълнено за $0\leqq\frac{x_k-x}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$, неравенството,

$$\left[1-\frac{C_3^2}{n}\right]^{2n}\geqq C_2,$$

където C_3 е някаква фиксирана положителна константа, да бъде изпълнено за всяко натурално n и ако x е фиксирано, да бъдат изпълнени

$$|x_{l-1}-x|\leqq\delta,\quad |x_l-x|>\delta.$$

Тъй като

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{2\pi}\geqq\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{\pi}},$$

получаваме

$$\Phi_n(\delta, x)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k\in\Delta(x)}\cos^{2n}\frac{x_k-x}{2}\geqq\frac{\sqrt{\pi n}}{2(2n+1)}\sum_{k\in\Delta(x)}[1-C_1(x_k-x)^2]^{2n}$$

$$\geqq\frac{\sqrt{\pi n}}{2(2n+1)}[1-C_1(x_l-x)^2]^{2n}\geqq\frac{\sqrt{\pi n}}{2(2n+1)}\left[1-\frac{C_3^2}{n}\right]\geqq\frac{C_2\sqrt{\pi n}}{2(2n+1)}=\frac{C_4}{\sqrt{n}}.$$

В горните неравенства константата C_3 е избрана по такъв начин, че изпълнява неравенството

$$C_3\geqq\sqrt{C_1 n}\,(x_l-x).$$

Тъй като $\Phi_n(\delta, x)$ намалява с растенето на δ, можем да изберем константите C_1, C_2 и C_3 по такъв начин, че $C_4=2C$. С това лемата е доказана.

Да разгледаме полинома $R_n(f;x)$ за избраната функция $f(x)$. Имаме

$$R_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k=0}^{n}\cos^{2n}\frac{x_k-x}{2}.$$

За $x=\frac{C}{\sqrt{n}}$, където C е константата от лема 4, имаме

$$R_n\left(f;\frac{C}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{1}{2}\Phi_n(\delta, x)\leqq 1-\frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Хаусдорфовото разстояние $r(f, R_n)$ в този случай ще бъде

$$r(f, R_n)=\max\left\{\left|0-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|,\ \left|1-R_n\left(f;\frac{C}{\sqrt{n}}\right)\right|\right\}\geqq\frac{C}{\sqrt{n}},$$

което показва, че оценката в теорема 3 не може да бъде по-добра от $\frac{C}{\sqrt{n}}$.

Доказаната теорема 3 представлява обобщение на теоремата на Рапопорт. Действително нека $f(x)$ е непрекъсната и 2π-периодична функция. В [2] е доказана следната

Теорема 4. Ако $f(x)$ е непрекъсната функция и $\{f_n(x)\}$ е редица от непрекъснати функции в интервала Δ, за които

$$\lim_{n\to\infty} r(f_n, f) = 0,$$

то равномерно в интервала Δ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

От теорема 4 се вижда, че първата част от теоремата на Рапопорт непосредствено следва от теорема 3. Що се касае до оценката на степента на сходимост, като имаме пред вид свойство 2, получаваме

$$r(f, R_n) \leqq C\mu\left(4\pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) \leqq 2C\omega\left(4\pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right),$$

ако $\mu(\delta) \geqq \frac{\delta}{2}$. Вижда се, че в един по-тесен клас от функции, какъвто е класът на непрекъснатите функции, оценката евентуално ще бъде по-добра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов Бл., Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **55**, кн. 1, 1960/1961, 1—39.
2. Сендов Бл. и Б. Пенков, ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции, Изв. на Мат. инст. при БАН, VI, 1962, 27—50.
3. Сендов Бл., Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние, Год. на Соф. унив., Мат. фак., **58**, 1963/64, 107—140.
4. Сендов Бл., Върху интерполационния процес на Фейер (под печат).
5. Раппопорт С. И., Об одном процессе приближения функций тригонометрическими полиномами, ДАН СССР, **56**, № 1, 1947, 11—12.
6. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Москва, 1949, 574.

Постъпила на 9. X. 1964 г.

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ОТНОСИТЕЛЬНО ХАУСДОРФОВСКОЙ МЕТРИКИ

Веселин Спиридонов

(Резюме)

В работе рассматривается интерполяционный процесс С. И. Раппопорт [5, 6]. Если обозначим через $R_n(f; x)$ полином

$$R_n(f; x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos^{2n} \frac{x_k - x}{2},$$

известна следующая теорема:

Если $f(x)$ непрерывная и 2π-периодическая функция, то равномерно на всей оси

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f;x)=f(x).$$

Здесь доказана следующая

Теорема. Если $f(x)$ локально монотонная (по дефиниции Бл. Сендова [3]) и 2π-периодическая функция, то для хаусдорфовского расстояния $r(f, R_n)$ между $f(x)$ и $R_n(f;x)$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} r(f, R_n)=0.$$

Если $\mu(\delta)$ модуль немонотонности $f(x)$ (это понятие тоже введено в [3]), устанавливаются следующие оценки степени сходимости: если $\mu(\delta)<\frac{\delta}{2}$, то

$$r(f, R_n)\leq C\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$$

и если $\mu(\delta)\geq\frac{\delta}{2}$, то

$$r(f, R_n)\leq C\mu\left(4\pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

Оценку $\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ существенно улучшить нельзя.

В работе показано, что эта теорема является обобщением теоремы С. И. Раппопорт.

ON THE CONVERGENCE OF AN INTERPOLATION PROCESS WITH REGARD TO HAUSDORFF'S METRICS

Vesselin Spiridonov

(Summary)

The paper examines the interpolation process of S. I. Rappoport [5], [6]. If we denote by $R_n(f;x)$ the polynomial

$$R_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\cos^{2n}\frac{x_k-x}{2},$$

there is the following theorem:

If $f(x)$ is a continuous and 2π-periodic function, then uniformly over the entire axis

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f;x)=f(x).$$

The following is proved here:

Theorem. If $f(x)$ is a locally monotonous (according to the definition of Bl. Sendov [3]) and 2π-periodic function, then for the Hausdorff's distance $r(f, R_n)$ between $f(x)$ and $R_n(f; x)$ is fulfilled

$$\lim_{n\to\infty} r(f, R_n)=0.$$

If $\mu(\delta)$ is the modulus of non-monotoneness of $f(x)$ (this is a concept introduced in [3] as well), the following evaluations are established for the degree of convergence:

$$\text{if } \mu(\delta)<\frac{\delta}{2}, \quad \text{then} \quad r(f, R_n)\leq C\sqrt{\frac{\ln n}{n}};$$

$$\text{if } \mu(\delta)\geq\frac{\delta}{2}, \quad \text{then} \quad r(f, R_n)\leq C\mu\left(4\pi\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

The evaluation $\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ cannot be improved essentially.

It is pointed out in the paper that this theorem is a generalization of S. I. Rappoport's theorem.