БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ВЪРХУ ФОРМУЛАТА НА SYNGE ЗА ВИХРОВОТО СЪПРОТИВЛЕНИЕ И ВЪРХУ КРИТЕРИЯ НА КАМЕНКОВ ЗА УСТОЙЧИВОСТТА НА КАРМАНОВИТЕ ВИХРОВИ УЛИЦИ

Благовест Долапчиев

Познатата формула на Karman [1] за съпротивлението, което изпитва едно тяло (прав кръгов цилиндър, обтичан перпендикулярно на образувателните му), зад което е налице една шахматна вихрова конфигурация, бе потвърдена от Synge [2] при модела на една едностранна вихрова улица, докато тя бе изведена от Карман при модела на една двустранно безкрайна конфигурация. Двустранността или едностранността на вихровата улица е отразена в комплексния потенциал, който Карман, респ. Синг, използват при пресмятането, въз основа на теоремата за импулса, на вихровото съпротивление, които потенциали са съществено различни един от друг. Въпреки това обаче получи се изненадващо пълно формално съвпадение на формулите на Карман и на Синг за вихровото съпротивление. Това обстоятелство е дало повод на Villat [3] да отбележи в своята известна книга по теория на вихрите, че изследването на Синг като математически по-издържано дава гаранция за правилността на изведената от Карман формула.

Повод за новия подход, който възприема Синг в своето изследване, е дало обстоятелството, че Карман в своя модел, от една страна, отчита двустранността на вихровата конфигурация, въз основа на което построява и комплексния потенциал, а, от друга страна, въпреки това той изключва наличието на каквито и да е вихри в лявата полуравнина, където си мисли цилиндъра. При тази схема обаче той приема там влиянието върху пресмятанията само на част от потенциала, в който не е отразено наличието на цилиндъра. Синг поради това възприема идеята изобщо да изключи всякакви вихри в лявата полуравнина, а тялото е там пак само мислимо. Граничният преход, който прави Карман с отдалечаването на тялото в безкрайност, никак не променя работата, защото в лявата полуравнина остава да влияе само транслационното потенциално течение върху мислимото тяло.

В настоящата бележка ние ще покажем, че при традиционната хипотеза за индукция на вихрите при течението съвпадението на двете формули за съпротивлението, намерени от Карман и от Синг, е само привидно.

*

Познатото условие за стабилност на Кармановата вихрова улица при смущения от първи и втори порядък, изведено от Карман [1] и потвърдено от нас [4], е заменено с ново условие на Каменков [5], което не съвпада с това на Карман, но което е възприето от някои автори, като Аржаников — Малцев [6], а Кармановото условие е таксувано като погрешно.

Касае се за един нов критерий за устойчивост на вихровата конфигурация (в смисъла на Кочин; в същност и в [1], и в [4] става дума за така наречената от Кочин най-малка нестабилност), основан на теорията на Ляпунов, съгласно с която Каменков търси екстремума на вихровото съпротивление, при който улицата би била устойчива. Независимо от това, че такъв критерий тук не може да се приложи, без да се спираме на това, дали формулата за вихровото съпротивление се разглежда в Кармановия или в Сингов смисъл, показва се, че такъв екстремум изобщо не съществува. Следователно новото условие, дадено от Каменков и възприето от Аржаников — Малцев, трябва да се отхвърли.

Във връзка с горния проблем могат да се предложат други постановки на задачата, отнасяща се до минимума на вихровото съпротивление, при които да се даде друго тълкуване на закона за индукцията на вихрите, отличен от традиционния, възприеман в литературата по хидродинамика.

§ 1. Съпоставяне на решенията на Karman и Synge за вихровото съпротивление

Разглеждаме двата комплексни потенциала: на Карман

$$F(z) = Vz + \frac{\gamma i}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(z - z_0')}{\sin \frac{\pi}{2l}(z - z_0'')} \tag{1}$$

и на Синг

$$F(z) = Vz - \frac{\gamma i}{2\pi} \ln \frac{\Gamma\left(\dfrac{z - z_0'}{-2l}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{z - z_0''}{-2l}\right)}, \tag{2}$$

отнасящи се до течението на идеален флуид при наличие в него на една двустранно безкрайна, респ. на една едностранно безкрайна вихрова конфигурация; в тези потенциали $2h$ означава широчината на вихровата улица (разстоянието между двете паралелни вихрови редици), $2l$ е разстоянието между всеки два съседни вихъра от една и съща вихрова редица, γ е постоянната циркулация на всеки вихър, отрицателна за вихрите на горната редица и положителна за тези на долната, V е собствената скорост на несмутения от наличието на вихровите редици флуид, т. е. неговата транслационна скорост, а с $\Gamma(z)$ са означени гама-функции, където z представя афикса на произволна флуидна невихрова точка, а

z_0' и z_0'' са афиксите на основната изходна (нулева) вихрова двойка (два съседни вихъра от двете различни редици).

Формулата за вихровото съпротивление, упражнено върху тялото, произвело улицата, според Карман е

$$R=\varrho\left[(V-2U)\frac{h}{l}+\frac{\gamma}{4\pi l}\right], \tag{3}$$

където ϱ означава плътността на флуида, а U представя индуцираната скорост на вихровата улица сама върху себе си съгласно с възприетата традиционна хипотеза, при която афиксите z могат да възприемат и значения z_0' и z_0''.

Както се вижда от формулата (3), вихровото съпротивление R зависи изобщо от шест параметъра: двете измерения h и l на вихровата конфигурация, циркулацията им γ, скоростта ѝ U, скоростта на флуда в покой V и плътността му ϱ. Тъй като последните два параметъра са дадени отнапред, остават налични четири непознати величини за определянето на съпротивлението R. Но Карман ги редуцира само на два вследствие намерените от него две нови релации, които характеризират неговите шахматни вихрови улици в случай, че те в Карманов смисъл и при първо и второ приближение са устойчиви. Тези две релации са:

а) за постъпателната скорост на вихровата улица

$$U=\frac{\gamma}{4l}\operatorname{th}\left(\pi\frac{h}{l}\right); \tag{4}$$

б) за условието за устойчивост на Карман

$$\operatorname{sh}\left(\pi\frac{h}{l}\right)=1. \tag{5}$$

Тук трябва да формулираме споменатите традиционни хипотези, важащи в хидродинамиката за индукцията на вихрите, които съвсем не следват от основите на тази механична дисциплина, а са възприети също за постулати:

I постулат. Един вихров център индуцира върху друг вихров център такава скорост, каквато се индуцира, ако последният вихров център би бил една обикновена невихрова флуидна частица.

II постулат. Един вихров център не индуцира върху себе си никаква скорост.

Втората формула (5) е необходимото условие за устойчивост на вихровата конфигурация, която при намереното съотношение не се разтурва, а се движи като цяло със скорост (4).

Тук трябва да подчертаем, че в същност Карман достига не до формулата (3), а до вида ѝ

$$R=\varrho\gamma\frac{h}{l}(V-U)+\frac{\varrho\gamma^2}{4\pi l}\left(1-\operatorname{th}\pi\frac{h}{l}\cdot\pi\frac{h}{l}\right), \tag{6}$$

следващ непосредствено чрез прилагане на теоремата за импулса и с извършване на такъв граничен преход, при който контролната повърхнина, включваща цилиндъра и част от вихровите двойки, да обхваща цялата Гаусова равнина. Вземе ли се обаче под внимание релацията (4) и последната се внесе в (6), достига се тъкмо до формулата (3).

До формулата (6) се стига по различни начини, щом се приеме двустранно безкрайната улица на Карман. Но всички те, от една страна, използват комплексния потенциал (1), а, от друга страна, задържат вляво на мислено наличния цилиндър само потенциала Vz.

Неотчитането на налични вихри там именно е дало повод на Синг да ограничи своя потенциал (2) само за дясната половина на Гаусовата равнина и така да определи вихровото съпротивление върху тялото. При това приемане обаче той приема тихомълком и възможността за транслационно придвижване на едностранно безкрайната вихрова улица с постоянната скорост $V-U>0$, без да знае отнапред (или да предположи това) дали това е възможно, както то е възможно с намерената от Карман скорост (4) на придвижване на двустранно безкрайната конфигурация на базата на постулатите I и II. Допущането, че такава скорост U съществува, налага ревизия на традиционната хипотеза за индукция на вихрите от Синговата улица. С други думи, предстои ни да потърсим скоростта на кой да е вихър от едностранно безкрайната улица по начина, приет от Карман, т. е. при традиционната хипотеза, изказана с постулатите I и II.

Наистина да означим с $-2k$ разликата $x_0'-x_0''$ между абсцисите на основната двойка и да пресметнем конюгованата скорост на кой да е, например μ-тия, вихър на горната редица. Тогава лесно пресмятаме

$$\dot{\bar{z}}_{\mu}'-\dot{\bar{z}}_{\mu+1}'=-\frac{\gamma i}{4\pi l\mu}+\frac{\gamma i}{4\pi}(l\mu-k+ih)^{-1},\quad \mu=1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

което не означава нищо друго, освен че всеки вихров център във всеки момент $t>t_0$ притежава своя собствена скорост, отлична от скоростта на всеки от останалите вихри. Това ще рече, че вихровата конфигурация в момента $t\neq t_0$ не се запазва като такава, а се разтурва. Но този факт означава, че за придвижване, и то равномерно и праволинейно, на Синговата улица и дума не може да става, следователно не може да става дума и за някаква периодичност на движението, което лежи в основата на метода за пресмятане на съпротивлението. Прочее, приемането на традиционната хипотеза отхвърля съдържанието на функцията U за скоростта на вихровата конфигурация, откъдето съвършено същата формула (6), която и Синг получава за вихровото съпротивление, става безпредметна, щом не съществува никаква определена функция U, която фигурира в (6), считана за формула на Синг. Приемането на същото съдържание на U, поне в смисъл на единствена компонента на скоростта на едностранно безкрайната улица по направление на целокупното течение, обратно, отхвърля хипотезата за индукцията на вихровите центрове съгласно с постулатите I и II. Обаче малко вероятно е Синг да е имал пред вид това отклонение от тях. Най-малкото за това, защото сега U става съвсем неопределена, с което не само че параметрите на съпротивлението не се намаляват, а се вмъква една непозната функция.

Макар методът на Синг за определяне на съпротивлението теоретично — от математична гледна точка — да е по-приемлив, свързан с модела на едностранно безкрайната вихрова улица, който от своя страна коригира Кармановия еклектичен подход, резултатът, който Синг намира с формулата (6), няма практическа стойност. Поради това не би било справедливо да приемем, че с този резултат той потвърждава Кармановата формула за вихровото съпротивление, както отбелязва Вилла. Кармановата формула все още страда от недостатъка, че е намерена при отсъствие във флуида на препятствието, чието наличие пък твърде много усложнява работата. Опит да бъде включено последното е направен от Космодемянски [7], но поради спомената трудност не е доведен докрай. Космодемянски видоизменя по познат начин потенциала (1), като суперпонира към него както кръговия цилиндър, обтичан от флуида, така и инверзните вихри, осигуряващи това обтичане. Тази задача обаче все още стои открита в нейния най-пълен вид.

По-нататък ние искаме да дадем известно обяснение за формалното съвпадение на формулите (6) на Карман и Синг (но не и на формулата (3), която, както видяхме, няма място при Синговия смисъл на U).

При конструирането на потенциала (1) обикновено в хидродинамическата литература се процедира така, че към двата първоначални потенциала на вихрите z_0' и z_0'', образуващи основната вихрова двойка, се присъединяват последователно и почифтно потенциалите на всяка следваща вихрова двойка отляво и отдясно. След това се извършва граничен преход с помощта на познатата формула

$$x \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right] = \sin x. \tag{8}$$

Да допуснем сега, че Кармановата двустранно безкрайна улица се разпада на две едностранно безкрайни улици в смисъла на Синг и да пресметнем комплексните потенциали за всяка от тях съгласно с формулата (2) на Синг. Като извършим сумирането на така намерените частични потенциали, ние достигаме отново до потенциала (1).

От друга страна, методът на Карман за пресмятане на съпротивлението, както видяхме, е еквивалентен с приемането за отпадането на лявата вихрова конфигурация. Може да се предположи, че става компенсиране на разликите при безкрайния граничен процес, с чиято помощ контролната повърхнина, въведена, за да приложим теоремата за импулса, ще обхваща цялата флуидна равнина на паралелно течение с наличие на двустранна улица.

Да се спрем по-нататък на втората бележка за опита на Каменков да коригира както условието на Карман за устойчивост на вихровата конфигурация, така и самата формула за вихровото съпротивление.

§ 2. Анализ на решението на Каменков, „коригиращо" Кармановото условие за стабилност

Преди Кочин [8] пръв Каменков прави опит да приложи теорията на Ляпунов за изследване въпроса за устойчивостта на Кармановата вихрова улица, считана стабилна с условието (5), добито при линейната теория. За целта Каменков в работата си [5] изхожда от следните две теореми, чието доказателство той счита да е дал:

I. Ако изразът R за вихровото съпротивление е интеграл на смутеното движение, то течението е устойчиво за ония стойности на параметрите на R, за които R е минимум.

II. Ако, обратно, R не представя такъв интеграл, то смутеното движение е стабилно за такива стойности на параметрите, за които R е максимум.

Да потърсим необходимите условия за екстремум на R, дадено с (3). Имаме

$$\frac{\partial R}{\partial h}=0, \quad \frac{\partial R}{\partial l}=0. \tag{9}$$

Като извършим комбинацията

$$h\frac{\partial R}{\partial h}+l\frac{\partial R}{\partial l}=0, \tag{10}$$

лесно достигаме до трансцедентното уравнение за отношението h/l. Пресмятаме

$$\operatorname{th}\left(\pi\frac{h}{l}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi\frac{h}{l}\right)^{-1}, \tag{11}$$

$$\frac{h}{l}=0{,}245. \tag{12}$$

Каменков нарича това новонамерено значение на отношението на широчината на вихровата конфигурация към отстоянието между два кои да е съседни вихъра от една и съща редица „условие за устойчивост“ (стабилно нареждане) на конфигурацията. Съпоставено с познатото условие на Карман, следващо от (5)

$$\frac{h}{l}\approx 0{,}281, \tag{13}$$

„новото“ условие се отличава малко от Кармановото, но като условие за един „точков стабилитет“ то е друго. Прибързано според нас в неотдавна излязлата книга Аэродинамика (преведена и на немски език) Кармановото условие за стабилност (13) е таксувано като погрешно и е прието за „ново“ условие това на Каменков (12).

В необходимите условия за екстремум (9) (Каменков има пред вид минимум, макар че вихровото съпротивление R нито в смисъла на Карман, нито в смисъла на Синг не е никакъв интеграл на смутеното движение на вихровата конфигурация) има да се решат две уравнения относно h и l, докато Каменков ги решава относно отношението h/l и циркулацията γ. Тъй като разполагаме и с (4), Каменков свежда въпроса за вихровото съпротивление до един единствен параметър h, а именно

$$R=1{,}82\,V^2h, \tag{14}$$

тогава, когато намерената от Карман формула (3) с допълнителните релации (4) и (5), (12) води до израза

$$R=2\varrho V^2 l\left[0{,}793\,\frac{U}{V}-0{,}314\left(\frac{U}{V}\right)^2\right], \tag{15}$$

който съдържа два параметъра, чието определяне става опитно.

Като означим с

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 R}{\partial h \partial l}\right)^2-\frac{\partial^2 R}{\partial h^2}\frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \tag{16}$$

дискриминантата, даваща критерия за екстремума на вихровото съпротивление, с малко по-дълги пресмятания достигаме до стойността

$$\Delta_0=\varrho^2\frac{\gamma^2}{l_0^2}\left(\pi h_0+\frac{l_0}{4\pi h_0}\right)^2>0, \tag{17}$$

която показва, че за значенията h_0 и l_0 на параметрите h и l съпротивлението не добива нито минимум, нито максимум. Това означава, че намереното от Каменков условие за устойчивост е илюзорно. Изискването (12) или (11) е еквивалентно с (10), което не е необходимо условие за екстремум, а само комбинация от необходимите условия (9) и такъв. Ако то е изпълнено, h и l ще се получат като функция на ϱ, V и γ.

Ако бяхме използвали не Кармановата формула за вихровото съпротивление, а тази на Синг (6) и поискаме вихровото съпротивление R на едностранно безкрайната вихрова улица да бъде екстремум (например минимално), съответствуващо на устойчивото протичане на конфигурацията, ние бихме били в състояние при тези условия да определим закона на транслационната скорост U. В тоя случай ние се натъкваме на една система от частни диференциални уравнения от вида (9), в която $\partial U/\partial h$ и $\partial U/\partial l$ относно R са свързани с израза (6). На този и подобни нему проблеми ние ще се спрем другаде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman Th., Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1911—1912.
2. Synge J. L., Mathematical investigation of the thrust experienced by a cylinder in a current, the motion being periodic, Proc. Royal Irish Acad., 1927.
3. Villat H., Théorie des tourbillons, Paris, 1930.
4. Dolaptschiew Bl. Über die Stabilität der Karmanschen Wirbelstraße, ZAMM, 1937—1938.
5. Каменков Г. В., О вихревой теории лобого сопротивления, Сб. научн. труд. Казаньск. авиац. инст., 1934.
6. Аржаников Н. С. и В. Н. Мальцев, Аэродинамика, 1956.
7. Космодемьянский А. А., Некоторые вопросы аэродинамического сопротивления, Уч. записки МГУ, 1940.
8. Кочин Н. Е., О неустойчивости вихревых цепочек Кармана, ДАН СССР, 1938.

Постъпила на 19. VII. 1965 г.

О ФОРМУЛЕ СИНГА ДЛЯ ВИХРЕВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И О КРИТЕРИИ КАМЕНКОВА ДЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК КАРМАНА

Благовест Долапчиев

(Резюме)

Хотя Карман рассматривает двухсторонне бесконечную, а Синг — односторонне бесконечную вихревую цепочку, они получают одну и ту же формулу для вихревого сопротивления, испытываемого телом, производящим эту вихревую конфигурацию. В работе доказывается, что это совпадение иллюзорное, так как функция U, представляющая собой трансляционную скорость цепочки, в случае Синга является неопределенной при предположении традиционной гипотезы об индукции вихря на вихрь, что отнюдь не следует из основных законов гидродинамики.

С другой стороны, Каменков, исследуя минимум функции сопротивления R методом теории устойчивости движения Ляпунова, получил, что значение отношения h/l, характеризирующее устойчивое расположение шахматной Кармановой цепочки, равняется 0,245, а не 0,281, как это считалось до сих пор. Показывается, что результат Каменкова не основателен, так как R не является ни интегралом некоторой системы возмущающих движений, ни обладает экстремумом.

ON THE SYNGE'S FORMULA FOR THE VORTEX RESISTANCE AND ON THE KAMENKOV'S CRITERION FOR THE STABILITY OF THE KARMAN'S VORTEX STREETS

Blagovest Dolaptchiev

(Summary)

In spite of the fact that Karman has investigated an infinite antisymmetric two-sided vortex street and Synge — an one-sided one, both found the same expression for the vortex resistance. It is proved that this is an illusion because the function U — the velocity of translation of the vortex configuration along the fluid flow — does not exist in the case of Synge's one-sided vortex street. This is true if we assume the traditional hypothesis for the induction of a vortex on vortex, which is by no means a consequence of the basic laws of hydrodynamics. If we assume another hypothesis for the induction we may obtain another deviation from the known Karman expression for translation velocity.

On the other hand, Kamenkov has found for the ratio h/l the value 0.245 instead of 0.281, following from Karman's condition for stability. But this result given by Kamenkov cannot be accepted because the resistance is not an integral of a system of perturbed motions and has neither a maximum nor a minimum, which Kamenkov demands for the validity of the theorems used.