БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ АCADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ОСНОВНИ ФОРМУЛИ НА ИНТЕГРАЛНАТА ГЕОМЕТРИЯ НА ДВУОСНОТО ПРОСТРАНСТВО

Грозьо Станилов

Настоящата работа е посветена на интегралната геометрия на тримерното хиперболично двуосно пространство, накратко наричано тук двуосно пространство. В първата част на работата в духа на книгата на Сантало [7] се доказва съществуването на редица интегрални мерки на множества от геометрични елементи. Във втората част на работата, като се използват някои общи резултати от книгата на Чеботарев [6], аналогично на направеното в някои работи по интегрална геометрия на евклидовото пространство от Дринфельд [8—9] се намират функциите на гъстотите на редица множества, а с това и техните интегрални мерки.

Най-напред да припомним някои определения, които са въведени в [1] и се използват и тук. Двуосното пространство предполагаме определено с двойката реални кръстосани прави j, k, наричани абсолютни. Точките, принадлежащи на тези прави, се наричат безкрайни; съответно равнините, минаващи през тях, също се наричат безкрайни. Една права в двуосното пространство, която сече и двете прави j и k, се нарича безкрайна права на това пространство, а правите, които секат само една от абсолютните прави, се наричат изотропни. При това правите, пресичащи първата абсолютна права j, се наричат изотропни прави от първа система (първи тип), а правите, пресичащи втората абсолютна права k — изотропни прави от втора система (втори тип). Също така точките и равнините, инцидентни с правата j, са безкрайни елементи от първа система, а точките и равнините, инцидентни с втората абсолютна права k — безкрайни елементи от втора система. Тогава струва ни се понятен терминът „две безрайни точки от еднакъв тип" и други подобни, които ще се употребяват по-нататък.

В първата част на работата използваме координатни системи, въведени в [4] и притежаващи следните свойства: A_2, A_4 са произволни крайни точки на двуосното пространство, точките A_1, A_2+A_3 са безкрайни точки от първи тип, а точките A_3, A_4+A_1 са безкрайни точки от втори тип. Деривационните уравнения за върховете на такъв репер $A_1A_2A_3A_4$ са

$$dA_1=(\theta_4-\theta_7)A_1-\theta_1(A_2+A_3),$$

$$dA_2=\theta_5A_1+\theta_3A_2+\theta_6A_3+\theta_2A_4,$$
(1)
$$dA_3=(\theta_3-\theta_6)A_3-\theta_2(A_4+A_1),$$
$$dA_4=\theta_7A_1+\theta_1A_2+\theta_8A_3+\theta_4A_4,$$

като формите на Пфаф $\theta_1,\ldots,\theta_8$ удовлетворяват следните структурни уравнения на двуосното пространство:

$$D\theta_1=[\theta_1\,,\ \theta_3-\theta_4+\theta_7],\quad D\theta_2=[\theta_2\,,\ \theta_4-\theta_3+\theta_6],$$
$$D\theta_3=[\theta_1\,,\ \theta_5-\theta_2],\quad D\theta_4=[\theta_2\,,\ \theta_8-\theta_1],$$
(2)
$$D\theta_5=[\theta_2\,,\ \theta_6+\theta_7]+[\theta_5,\ \theta_4-\theta_3-\theta_7],$$
$$D\theta_6=D\theta_7=[\theta_1\,,\ \theta_5]+[\theta_2\,,\ \theta_8],$$
$$D\theta_8=[\theta_1\,,\ \theta_6+\theta_7]+[\theta_8\,,\ \theta_3-\theta_4-\theta_6].$$

Методът, предложен в [7], се състои в следното. Нека множеството H от геометрични елементи се получава като решение на напълно интегруемата система от уравнения на Пфаф

(3)
$$\omega_1=\omega_2=\ \ldots\ =\omega_s=0.$$

Образуваме външното произведение — формата $\varphi=[\omega_1\omega_2\ldots\omega_s]$ от измерение s — и пресмятаме външния диференциал $D\varphi$. При това използват се съответните структурни уравнения, свързващи формите ω_i. Ако се укаже, че $D\varphi=0$, множеството H от геометрични елементи притежава инвариантна интегрална мярка, която се представя с интеграла

(4)
$$m(H)=\int\limits_{(H)}\omega_1\omega_2\ldots\omega_s=\int\limits_{(H)}[\omega_1\omega_2\ldots\omega_s].$$

Формата $\varphi=\omega_1\omega_2\ldots\omega_s$ се нарича **гъстота на множеството** H. Понякога тя се означава като външно произведение, за да се подчертае, че при смяна на параметрите тя се преобразува като външна форма. Ако $D\varphi\neq0$, множеството H не притежава инвариантна интегрална мярка.

Във втората част на работата се използват координатни системи от [1]: върховете A_1, A_2 са безкрайни точки от първи тип, а върховете A_3, A_4 — безкрайни точки от втори тип. Спрямо такава координатна система групата на двуосните колинеации се представя със следните уравнения:

(5)
$$x'_1=a_1^1x_1+a_1^2x_2\qquad x_3^1=a_3^3x_3+a_3^4x_4\,,$$
$$x'_2=a_2^1x_1+a_2^2x_2\,,\qquad x'_4=a_4^3x_3+a_4^4x_4\,.$$

като $a_1^1a_2^2-a_1^2a_2^1\neq0$, $a_3^3a_4^4-a_3^4a_4^3\neq0$. Един от параметрите a_i^k е несъществен. Ние ще положим $a_4^4=1$.

Използваме следните резултати от теорията на непрекъснатите крайни групи. Нека уравненията

(6)
$$x'_i=f_i(x_1x_2,\ldots,x_n\,;\,a_1\,,\,a_2\,,\ldots,\,a_r),\ i=1,2,\ldots,n,$$

представят аналитично група на Ли с r параметри. Тя може да бъде представена още с r линейно независими инфинитезимални оператора

(7)
$$X_k(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\left(\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\right)_{a_k=0},\ i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,r,$$

при условие, че за стойности $a_k=0$ на параметрите се получава тъждественото преобразование на групата. Очевидно операторите имат вида

$$X_k(f)=\zeta_k^i(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \tag{8}$$

Изчисляват се величините

$$\sigma_k=\frac{\partial\xi_k^i}{\partial x_i} \tag{9}$$

и се съставя системата диференциални уравнения в частни производни

$$X_k(f)+\sigma_k f=0. \tag{10}$$

Решението на тази система дава функциите на гъстотите $f(x_1,\ldots,x_n)$ за множеството от точки $(x_1,\ldots,x_n)$. Гъстотата на множеството се дава с формулата

$$f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{11}$$

а интегралът

$$m(H)=\int_{(H)} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \qquad dx_n \tag{12}$$

е търсената инвариантна интегрална мярка (обем) на множеството. Ясно е, че понятието интегрална мярка е обобщение на понятието лице в равнината и обем в пространството.

Да се обърнем към групата на двуосните колинеации. В нехомогенни координати $(x_1, x_2, x_3, x_4=1)$ тя се записва във вида

$$\begin{aligned} x_1'&=\frac{a_1^1x_1+a_1^2x_2}{a_4^3x_3+1},\\ x_2'&=\frac{a_2^1x_1+a_2^2x_2}{a_4^3x_3+1},\\ x_3'&=\frac{a_3^3x_3+a_3^4}{a_4^3x_3+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тъждественото преобразование на групата се получава при стойности на параметрите $a_1^1=a_2^2=a_3^3=1$, $a_1^2=a_2^1=a_3^4=a_4^3=0$. Инфинитезималните оператори на двуосната група, взети в ред, съответствуващ на следния ред на параметрите a_1^1, a_3^3, a_1^2, a_3^4, a_2^1, a_2^2, a_4^3, са

$$\begin{aligned} &X_1=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2=x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad X_3=x_2\frac{\partial f}{\partial x_1},\\ &X_4=\frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad X_5=x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_6=x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}.\\ &X_7=-x_3\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Оттук се вижда, че никоя тяхна линейна комбинация с постоянни коефициенти не може да даде нулев оператор. Всеки седем техни линейни комбинации с постоянни коефициенти дават седем нови линейно независими инфинитезимални оператори, които могат да бъдат приети за оператори на двуосната група. Смяната на операторите с нови по същество означава някаква трансформация на координатната система.

За величините σ_i на двуосната група намираме

$$\sigma_1=1,\ \sigma_2=1,\ \sigma_3=0,\ \sigma_4=0,$$
$$\sigma_5=0,\ \sigma_6\ \ 1,\ \sigma_7=-4x_3.$$

Системата

$$X_k+\sigma_k f=0$$

за двуосната група няма решение освен тривиалното $f(x_1,\ldots,x_n)=0$. Следователно множество от точки в двуосното пространство не притежава инвариантна интегрална мярка (обем).

Търсенето на двойни интегрални инварианти (интегрални инварианти на множества от двойки точки или, по-общо, двойки елементи) се свежда до намирането на интегрални инварианти на двойно-разширената група, която има инфинитезимални оператори

$$X_i+\bar{X}_i. \tag{15}$$

Операторът $\bar{X}_i$ се получава от оператора X_i, като в последния заместим променливите x_i с $\bar{x}_i$, при това между променливите $x_i, \bar{x}_i$ не се предполагат никакви връзки.

Горните два метода са приложени за намирането на множества в двуосното пространство, които притежават инвариантни интегрални мерки. В първата част доказваме съществуването или несъществуването на инвариантни мерки на различни множества. При това методът на Картан се явява чудесен инструмент при разрешаването на такива въпроси. Онези множества, за които в първата част сме доказали, че притежават мерки, във втората част отново са предмет на нашето внимание, където при определено координатно представяне на текущия елемент от разглежданото множество се намират функциите на гъстотите им. Друга по-тясна връзка между двете части на работата няма. Естествено е да се постави въпросът: след като в двете части на работата се дават две плътности, например за множеството M_1, дали те са равни с точност до произволен множител. Отговорът е утвърдителен и следва от факта, че при транзитивна група в дадено множество, ако съществува инвариантна плътност, тя е определена еднозначно с точност до постоянен множител. Това би могло да се покаже и във всеки отделен случай. Ето например доказателството за множеството M_3. От формулите (18) и (46) се вижда, че за него имаме две плътности:

$$(dM_3)_1=\frac{[da,db]}{(a-b)^2},\quad (dM_3)_2=[\theta_1,\theta_2-\theta_5].$$

Най-напред минаваме в хомогенни координати, като полагаме

$$A(a,1,0,0)=B_1(b_{11},b_{21},0,0),\ B(b,1,0,0)=B_2(b_{12},b_{22},0,0).$$

Така получаваме

$$(dM_3)_1=(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^{-2}\cdot[b_{21}db_{11}-b_{11}db_{21},\ b_{22}db_{12}-b_{12}db_{22}].$$

Ако разгледаме B_1, B_2 като върхове на репер върху правата j, можем да напишем формулите

$$dB_1=\psi_{11}B_1+\psi_{12}B_2,$$
$$dB_2=\psi_{21}B_1+\psi_{22}B_2.$$

Лесно се показва, че

$$(dM_3)_1=[\psi_{12},\ \psi_{21}].$$

Най-сетне, ако сравним реперите B_1, B_2 и $B_1\equiv A_1$, $B_2\equiv A_2+A_3$ върху правата j, намираме връзките

$$\psi_{12}=-\theta_1,\ \psi_{21}=\theta_5-\theta_2.$$

Тогава лесно следва, че

$$(dM_3)_1=(dM_3)_2.$$

Поради принципа за дуалност, който съществува в двуосното пространство, броят на разглежданите множества е намален значително.

Досега въпроси на интегралната геометрия в нашата страна са разработвани от Петканчин в дисертационния му труд [2] и Обрешков в [3].

Част първа

ТЕОРЕМА ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ИНТЕГРАЛНИ МЕРКИ

§ 1. Множества от точки

Да разгледаме най-напред въпроса за съществуване на интегрална мярка на множество от крайни точки на двуосното пространство. Нека точката A_2 е текуща точка в област, съставена от крайни точки. От формулите (1) следва, че условията за неподвижност на тази точка са

$$\theta_2=\theta_5=\theta_6=0.$$

Тази система е напълно интегруема. Образуваме външното произведение $\psi=[\theta_2\theta_5\theta_6]$. Като използваме (2), непосредствено се убеждаваме, че $D\psi\neq0$. Следователно множество, съставено от крайни точки на двуосното пространство, не притежава инвариантна интегрална мярка, което показахме и във въведението по друг начин.

Множество от безкрайни точки от първи тип можем да считаме описано от точката A_1, условието за неподвижност на която е $\theta_1=0$. Понеже $D\theta_1\neq0$, то множество, съставено от безкрайни точки на двуосното пространство, също не притежава инвариантна интегрална мярка.

§ 2. Множества от прави

Най-напред разглеждаме множество от крайни прави. Условията за неподвижност на крайната права A_2A_4 са

$$\theta_5=\theta_6=\theta_7=\theta_8=0.$$

Образуваме външната форма от четвърто измерение $\psi=[\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8]$. Непосредствената проверка ни убеждава, че $D\psi'=0$. Следователно можем да формулираме следната

Теорема 1. Мярката на множество M_1 от крайни прави на двуосното пространство A_2A_4 съществува и се изразява с интеграла

$$m(M_1)=\int_{(M_1)}\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8\,. \tag{16}$$

Формата $\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8$ се нарича гъстота на множеството от крайни прави в двуосното пространство.

Множество, съставено от изотропни прави (от първа система), можем да считаме определено с правата A_1A_2, която е неподвижна точно когато $\theta_1=\theta_2=\theta_6=0$. Въобще $D[\theta_1\theta_2\theta_6]\neq 0$. Следователно множество от изотропни прави не притежава интегрална мярка.

Множеството от безкрайни прави е еквивалентно с множеството от двойки безкрайни точки от различен тип. Условията за неподвижност на правата A_2A_3 са $\theta_2=\theta_5=0$. Имаме $D[\theta_2\theta_5]\neq 0$, което показва, че мярка на множество от безкрайни прави не съществува.

§ 3. Множества от двойки точки

Множество от двойки крайни точки считаме зададено с точките A_2 и A_4. Равенствата

$$\theta_1=\theta_2=\theta_5=\theta_6=\theta_7=\theta_8=0$$

показват тяхната неподвижност. Лесно се намира, че

$$D[\theta_1\theta_2\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8]=0.$$

Следователно в сила е следната

Теорема 2. Мярката на множество M_2 от двойки крайни точки съществува и се изразява с интеграла

$$m(M_2)=\int_{(M_2)}\theta_1\theta_2\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8\,. \tag{17}$$

Множество от двойки безкрайни точки от еднакъв (първи) тип определяме с точките A_1, A_2+A_3. Условията за тяхната неподвижност са $\theta_1=\theta_2-\theta_5=0$. Получава се

$$D[\theta_1,\ \theta_2-\theta_5]=0,$$

което показва, че е в сила следната

Теорема 3. Мярката на множество M_3 от двойки безкрайни точки от еднакъв (първи) тип съществува и се изразява с интеграла

$$m(M_3)=\int_{(M_3)}\theta_1(\theta_2-\theta_5)\,. \tag{18}$$

В качеството на крайна точка вземаме точката A_2, а в качеството на безкрайна — точката A_1. Такова множество от двойки точки не притежава инвариантна интегрална мярка.

Множеството от двойки безкрайни точки от различен тип също не притежава инвариантна интегрална мярка.

§ 4. Множества от двойки „точка+равнина"

а) Множество от двойки „неинцидентни крайна точка+крайна равнина". За текуща равнина вземаме $A_2A_3A_4$, а за текуща точка — $(A_1+\lambda A_4)$. Важи следната

Теорема 4. Множеството M_4 от двойки „неинцидентни крайна точка+крайна равнина" притежава инвариантна интегрална мярка и тя може да се представи с интеграла

$$m(M_4)=\int_{(M_4)}\theta_1\theta_2\theta_5\theta_7\theta_8 d\lambda. \tag{19}$$

Тук λ е числената инварианта (двойно отношение) на точката $A_1+\lambda A_4$ и равнината $A_2A_3A_4$.

б) Множество от двойки „инцидентни крайна точка+крайна равнина без обща безкрайна права". Това множество ще определим с точката A_4 и равнината $A_2A_4A_3$. То може да се получи като решение на системата

$$\theta_1=\theta_2=\theta_5=\theta_8=\theta_7=0.$$

Имаме

$$D[\theta_1\theta_2\theta_5\theta_8\theta_7]=0$$

и следователно

Теорема 5. Мярката на множеството M_5 от двойки „инцидентни крайна точка+крайна равнина без обща безкрайна права" съществува и се изразява с интеграла

$$m(M_5)=\int\theta_1\theta_2\theta_5\theta_8\theta_7. \tag{20}$$

в) Множество от двойки „инцидентни крайна точка+крайна равнина с обща безкрайна права" не притежава инвариантна интегрална мярка.

г) Множество от двойки „безкрайна точка+крайна равнина" също не притежава мярка.

д) Множество от двойки „безкрайна равнина+крайна точка", които са неинцидентни, не притежава мярка.

е) Множество от двойки „неинцидентни безкрайна точка+безкрайна равнина" е еквивалентно на множество M_3, следователно

Теорема 6. Множеството M_6 от двойки „неинцидентни безкрайна точка+безкрайна равнина" има инвариантна интегрална мярка, която може да се изрази с интеграла

$$m(M_6)=\int_{(M_6)}\theta_2(\theta_1-\theta_8). \tag{21}$$

ж) Не съществува инвариантна интегрална мярка на множество от двойки „инцидентни крайна точка+безкрайна равнина“.

з) Не съществува инвариантна интегрална мярка на множество от двойки „безкрайна равнина+безкрайна точка от един и същи тип“.

§ 5. Множества от двойки „точка+права“

а) Множество от двойки „неинцидентни крайна точка+крайна права“. За определящи такова множество избираме точката A_1+A_3 и правата A_2A_4. Те са неподвижни, когато

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_5 = \theta_8 = \theta_7 = \theta_6 = \theta_3 - \theta_4 = 0.$$

Лесно се проверява, че

$$D[\theta_1\theta_2\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8(\theta_3-\theta_4)] = 0.$$

Следователно

Теорема 7. Множеството M_7 от двойки „неинцидентни крайна точка+крайна права“ притежава интегрална мярка

$$m(M_7) = \int_{(M_7)} \theta_1\theta_2\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8(\theta_3-\theta_4)\,. \tag{22}$$

б) Лесно се показва, че множество от линейни елементи (точка+инцидентна с нея права) няма интегрална мярка.

в) Множество от двойки „крайна права+безкрайна точка“ няма интегрална мярка.

г) Множество от двойки „неинцидентни изотропна права+крайна точка“ можем да зададем с правата A_1A_2 и точката A_2+A_4. Те са неподвижни, когато

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_6 = \theta_8 = \theta_3 - \theta_4 = \theta_5 + \theta_7 = 0.$$

Външният диференциал на формата, образувана от левите страни на уравненията на последната система, се получава равен на нула.

Теорема 8. Множество M_8 от двойки „неинцидентни изотропна права+крайна точка“ има интегрална мярка, която може да се изрази по следния начин:

$$m(M_8) = \int_{(M_8)} \theta_1\theta_2\theta_6\theta_8(\theta_3-\theta_4)(\theta_5+\theta_7)\,. \tag{23}$$

д) Не съществуват инвариантни интегрални мерки на следните множества: множество от двойки „изотропна права+нейна крайна точка“, множество от двойки „безкрайна права+нейна крайна точка“, множество от двойки „безкрайна точка+безкрайна права“, множество от двойки „изотропна права+безкрайна точка от еднакъв (или от различен) тип“.

е) Множество M_9 от двойки „неинцидентни крайна точка+безкрайна права“ еднозначно определя множество M_5 и обратно. Следователно

Теорема 9. Множеството M_9 от двойки „неинцидентни крайна точка+безкрайна права“ притежава интегрална мярка, която се представя така:

$$m(M_9) = \int_{(M_9)} \theta_1\theta_2\theta_5\theta_8\theta_7\,. \tag{24}$$

§ 6. Множества от квадрики, съдържащи абсолютните прави

а) Множество от неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави („сфероиди" по терминологията на Норден [10]).

Нека ръбът A_2A_4 на репера описва рой прави. Главните форми за текущата права A_2A_4 са $\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8$. Възловите точки за тази права, както е известно от [4], се определят с квадратното уравнение

$$\theta_8 t^2 + (\theta_6 + \theta_7)t + \theta_5 = 0.$$

В случая, когато това квадратно уравнение се удовлетворява за всяко t, роят прави представлява неизродена квадрика, съдържаща абсолютните прави j, k [1]. Ясно е, че това е възможно точно когато

$$\theta_5 = \theta_8 = \theta_6 + \theta_7 = 0.$$

Обратно, интегрирането на тази система (тя е напълно интегруема) ни дава трипараметрично многообразие от квадрики, съдържащи абсолютните прави — множество M_{10}. Поставяме въпроса: на множество M_{10} може ли да се съпостави интегрална мярка (обем), инвариантна относно групата на двуосните колинеации? Ще покажем, че отговорът е утвърдителен.

Образуваме формата от трето измерение $[\theta_5, \theta_8, \theta_6 + \theta_7]$. Външният диференциал от тази форма е равен на нула, следователно тя може да бъде наречена гъстота на множеството неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави. Можем да формулираме следната

Теорема 10. Множество M_{10} от неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави, притежава инвариантна интегрална мярка и тя може да се представи с интеграла

$$m(M_{10}) = \int_{(M_{10})} \theta_5\theta_8(\theta_6 + \theta_7). \tag{25}$$

б) Множество от изродени квадрики, съдържащи абсолютните прави.

Ще забележим, че това множество е еквивалентно със следните множества: множеството от двойка безкрайни точки от различен тип; множеството от правите на хиперболичната линейна конгруенция с оси абсолютните прави. Такова множество не притежава инвариантна интегрална мярка.

в) Множество от двойки „неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави".

Като се има пред вид предната теорема, става очевидна следната

Теорема 11. Множеството M_{11} от двойки „неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави", има инвариантна интегрална мярка

$$m(M_{11}) = \int \theta_5\theta_8(\theta_6 + \theta_7)\theta_5'\theta_8'(\theta_6' + \theta_7'), \tag{26}$$

като системата

$$\theta_5 = \theta_8 = \theta_6 + \theta_7 = \theta_5' = \theta_8' = \theta_6' + \theta_7' = 0$$

определя текущия елемент на множеството M_{11}.

г) Множество от двойки „изродена и неизродена квадрики, съдържащи абсолютните прави".

Теорема 12. Множеството M_{12} от двойки „изродена и неизродена квадрики, съдържащи абсолютните прави", притежава инвариантна интегрална мярка и тя може да се представи във вида

$$m(M_{12}) \int \theta_1\theta_2\theta_5\theta_8(\theta_6+\theta_7). \tag{27}$$

Действително произволна неизродена квадрика се представя със системата

$$\theta_5=\theta_8=\theta_6+\theta_7=0,$$

а произволна изродена (с текущ лъч A_1A_3) — със системата

$$\theta_1=\theta_2=0.$$

Образуваме формата от пето измерение

$$[\theta_1\theta_2\theta_5\theta_8(\theta_6+\theta_7)].$$

Имаме

$$D[\theta_1\theta_2\theta_5\theta_8(\theta_6+\theta_7)]=[D(\theta_1\theta_2),\ \theta_5\theta_8(\theta_6+\theta_7)]+[\theta_1\theta_2 D[\theta_5\theta_8(\theta_6+\theta_7)]]=0$$

и това показва верността на теорема 12.

д) Множество от двойки „изродени квадрики, съдържащи абсолютните прави".

Нека правата A_1A_4 описва едната изродена квадрика, а правата A_2A_3 — другата. Условието за тяхната неподвижност има вида

$$\theta_1=\theta_2=\theta_5=\theta_8=0.$$

Външният диференциал на формата $[\theta_1\theta_2\theta_5\theta_8]$ е равен на нула.

Теорема 13. Множеството M_{13} от двойки „изродени квадрики, съдържащи абсолютните прави", има мярка

$$m(M_{13})=\int_{(M_{13})} \theta_1\theta_2\theta_5\theta_8. \tag{28}$$

Част втора

НАМИРАНЕ ФУНКЦИИТЕ НА ГЪСТОТИТЕ

§ 1. Мярка на множество M_1 от крайни прави

Произволна права g, принадлежаща на хиперболичното двуосно пространство, ще представим като пресечница на две подходящо подбрани равнини, например

$$\begin{aligned} x_1&=ax_3+px_4,\\ x_2&=bx_3+qx_4. \end{aligned} \tag{29}$$

Въобще параметрите a, b, p, q са независими и определят правата g. Ще пишем $g(a, b, p, q)$. Аналитичното представяне (29) изключва от разглеждане безкрайните прави на пространството. Изотропните прави от първа система също са изключени, а ако е изпълнено

$$aq-bp=0, \tag{30}$$

лесно може да се съобрази, че правата g е изотропна права от втора система. В настоящия параграф тези прави изключваме от разглеждане, следователно изпълнено е

$$aq-bp\neq 0. \tag{31}$$

Двуосните трансформации (13) преобразуват права g в права $g'(a', b', p', q')$, като

$$\begin{aligned} a' &= \alpha^{-1}[(a\alpha_1^1+b\alpha_1^2)\alpha_4^4-(p\alpha_1^1+q\alpha_1^2)\alpha_4^3],\\ p' &= \alpha^{-1}[-(a\alpha_1^1+b\alpha_1^2)\alpha_3^4+(p\alpha_1^1+q\alpha_1^2)\alpha_3^3],\\ b' &= \alpha^{-1}[(a\alpha_2^1+b\alpha_2^2)\alpha_4^4-(p\alpha_2^1+q\alpha_2^2)\alpha_4^3],\\ q' &= \alpha^{-1}[-(a\alpha_2^1+b\alpha_2^2)\alpha_3^4+(p\alpha_2^1+q\alpha_2^2)\alpha_3^3] \end{aligned} \tag{32}$$

и $\alpha=\alpha_3^3\alpha_4^4-\alpha_3^4\alpha_4^3$. Преобразованията (32) образуват група, индуцирана от двуосната точкова група (13) и действуваща в пространството на правите от двуосното пространство. Инфинитезималните оператори на тази група са:

$$\begin{aligned} &X_1=a\frac{\partial f}{\partial a}+p\frac{\partial f}{\partial p}, \quad X_2=b\frac{\partial f}{\partial b}+q\frac{\partial f}{\partial q},\\ &X_3=b\frac{\partial f}{\partial a}+q\frac{\partial f}{\partial p}, \quad X_4=a\frac{\partial f}{\partial b}+p\frac{\partial f}{\partial q},\\ &X_5=-a\frac{\partial f}{\partial a}-b\frac{\partial f}{\partial b},\\ &X_6=-a\frac{\partial f}{\partial p}-b\frac{\partial f}{\partial q}, \quad X_7=-p\frac{\partial f}{\partial a}-q\frac{\partial f}{\partial b}. \end{aligned} \tag{33}$$

Оттук за величините σ_i получаваме

$$\begin{aligned} &\sigma_1=2,\ \sigma_2=2,\ \sigma_3=0,\ \sigma_4=0,\\ &\sigma_5=-2,\ \sigma_6=0,\ \sigma_7=0. \end{aligned} \tag{34}$$

Системата диференциални уравнения (10) има сега вида

$$\begin{aligned} &a\frac{\partial f}{\partial a}+p\frac{\partial f}{\partial p}+2f=0, \quad b\frac{\partial f}{\partial b}+q\frac{\partial f}{\partial q}+2f=0,\\ &b\frac{\partial f}{\partial a}+q\frac{\partial f}{\partial p}=0, \qquad a\frac{\partial f}{\partial b}+p\frac{\partial f}{\partial q}=0,\\ &a\frac{\partial f}{\partial a}+b\frac{\partial f}{\partial b}+2f=0,\\ &a\frac{\partial f}{\partial p}+b\frac{\partial f}{\partial q}=0, \qquad p\frac{\partial f}{\partial a}+q\frac{\partial f}{\partial b}=0. \end{aligned} \tag{35}$$

Функцията на гъстотата за множеството от прави е решение на тази система. От последното уравнение получаваме

$$f=f(aq-bp, p, q). \tag{36}$$

Третото уравнение на система (35) показва, че функцията (36) има по-специалния вид

$$f=f(aq-bp, q). \tag{37}$$

Аналогично четвъртото уравнение дава

$$f = f(aq - bp). \tag{38}$$

Ако изразим условието, че тази функция удовлетворява първото уравнение (35), лесно намираме

$$f = \frac{C}{(aq - bp)^2}, \tag{39}$$

като произволната константа C (същото правим и в следващите параграфи) ще заместим с единица. Значи (39) е функцията на гъстотата за множество M_1 от крайни прави $g(a, b, p, q)$, а самата гъстота е диференциалната форма

$$(aq - bp)^{-2}\, da\, db\, dp\, dq. \tag{40}$$

Следователно интегралната мярка на множество M_1 от крайни прави $g(a, b, p, q)$, представени с (29), се дава с интеграла

$$m(M_1) = \int_{(M_1)} \frac{da\, db\, dp\, dq}{(aq - bp)^2}. \tag{41}$$

Тази мярка е единствената интегрална мярка на множество M_1 от прави, която е инвариантна относно групата на двуосните трансформации (13). Единствеността на мярката показва, че двуосната група е транзитивна в множеството M_1 от крайни прави [10].

§ 2. Мярка на множество M_2 от двойки крайни точки

Да разгледаме множество M_2 от двойки крайни точки $M(x_1, x_2, x_3)$, $\overline{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ на двуосното пространство. Според казаното в уводната част на настоящата работа, за да намерим интегралните инварианти на множеството M_2, трябва да разширим двуосната група (13); двойно разширената група ще има оператори (според (15))

$$\begin{aligned}
&x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3},\\
&x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2}\\
&x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \bar{x}_3 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3}, \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \bar{x}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1},\\
&-x_3\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) - \bar{x}_3\left(\bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + \bar{x}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3}\right).
\end{aligned} \tag{42}$$

Намирането на интегралните инварианти на множеството M_2 се свежда по такъв начин до намирането на решението на следната система от частни диференциални уравнения:

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + 2f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3} = 0,\\
&x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \bar{x}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + 2f = 0, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} = 0,\\
&x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \bar{x}_3 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3} + 2f = 0, \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \bar{x}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} = 0,\\
&x_3\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + \bar{x}_3\left(\bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + \bar{x}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \bar{x}_3 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3}\right) + 4(x_3 + \bar{x}_3) f = 0.
\end{aligned}
$$

Лесно се показва, че тази система от частни диференциални уравнения е съвместима и има следното единствено решение:

$$
(44)\qquad f(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{1}{(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)^2 (x_3 - \bar{x}_3)^2}.
$$

Следователно интегралната мярка на множеството M_2 от двойки точки $M(x_1, x_2, x_3), \bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ на двуосното пространство се изразява с интеграла

$$
(45)\qquad m(M_2) = \int\limits_{(M_2)} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3}{(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)^2 (x_3 - \bar{x}_3)^2}
$$

§ 3. Множество от двойки безкрайни точки от еднакъв тип

Точките $A(a, 1, 0, 0)$, $B(b, 1, 0, 0)$ принадлежат на първата абсолютна права j. При двуосните преобразования (5) координатите им се преобразуват по законите

$$
a^* = \frac{\alpha_1^1 a + \alpha_1^{\sim}}{\alpha_2^1 a + 1}, \qquad b^* = \frac{\alpha_1^1 b + \alpha_1^{\sim}}{\alpha_2^1 b + 1}.
$$

Инфинитезималните оператори на тази група преобразования са

$$
\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}, \quad a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b},
$$
$$
a^2\frac{\partial f}{\partial a} + b^2\frac{\partial f}{\partial b}.
$$

Системата, която ще определи функциите на гъстотите, е

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} = 0,\\
&a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + 2f = 0,\\
&a^2\frac{\partial f}{\partial a} + b^2\frac{\partial f}{\partial b} + 2(a+b)f = 0
\end{aligned}
$$

и има единствено решение

$$
f = \frac{1}{(a-b)^2}.
$$

Следователно мярката на множеството M_3 от двойки безкрайни точки $A(a, 1, 0, 0)$, $B(b, 1, 0, 0)$ от първи тип се дава с интеграла

$$m(M_3) = \int \frac{da\, db}{(a-b)^2}. \tag{46}$$

§ 4. Множество от двойки неинцидентни крайна точка + крайна равнина

За да намерим интегралната мярка на това множество, най-напред ще решим една помощна задача. Нека $M(p, q, r, 1)$ е произволна крайна точка на двуосното пространство. През нея минава една единствена безкрайна права на пространството, която пресича абсолютните прави съответно в точките $J(p, q, 0, 0)$, $K(0, 0, r, 1)$. Тогава точката

$$\bar{M} = \lambda J + K = \bar{M}(\lambda p, \lambda q, r, 1)$$

е произволна точка върху правата JK.

Разглеждаме множество от четворки точки $M(p, q, r, 1)$, $\bar{M}(\lambda p, \lambda q, r, 1)$, $A(a, 1, 0, 0)$, $C(0, 0, c, 1)$. Параметрите p, q, r, a, c, λ на това множество се преобразуват по законите

$$\begin{gathered} \lambda^* = \lambda, \quad p^* = \frac{a_1^1 p + a_1^2 q}{a_1^3 r + 1} \\ q^* = \frac{a_2^1 p + a_2^2 q}{a_4^3 r + 1}, \quad r^* = \frac{a_3^3 r + a_3^4}{a_4^3 r + 1}, \\ a^* = \frac{a_1^1 a + a_1^2}{a_2^1 a + a_2^2}, \quad c^* = \frac{a_3^3 c + a_3^4}{a_4^3 c + 1}. \end{gathered} \tag{47}$$

Нека интегралната мярка на това множество се дава с интеграла

$$\int f(\lambda, p, q, r, a, c)\, d\lambda\, dp\, dq\, dr\, da\, dc.$$

Очевидно в инфинитезималните оператори на групата (47) не участвува производната $\partial f / \partial \lambda$; следователно тя няма да участвува и в системата, която определя функцията $f(\lambda, p, q, r, a, c)$. Това показва, че тази функция ще бъде от същия вид както при множеството M_9 от § 9, именно

$$f = \frac{1}{(p-aq)^2 (r-c)^2} \tag{48}$$

Тогава интегралната мярка на множеството от четворки точки $M(p, q, r, 1)$, $\bar{M}(\lambda p, \lambda q, r, 1)$, $A(a, 1, 0, 0)$, $C(0, 0, c, 1)$ се представя очевидно с интеграла

$$\int f(\lambda) \frac{d\lambda\, dp\, dq\, dr\, da\, dc}{(p-aq)^2 (r-c)^2} \tag{49}$$

като функцията $f(\lambda)$ е произволна функция.

Сега лесно можем да намерим мярката на множеството M_4, съставено от двойки неинцидентни крайна точка+крайна равнина. Нека текущата точка на множеството M_4 е $M(p, q, r, 1)$, а равнината се задава с уравнението

$$\varepsilon: u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Последната пресича правата j в точката $A(a, 1, 0, 0)$, а правата k — в точката $C(0, 0, c, 1)$, като

$$a = -\frac{u_2}{u_1}, \quad c = -\frac{u_4}{u_3}$$

Единствената безкрайна права през точката $M(p, q, r, 1)$ пресича равнината ε в точката $M(\lambda p, \lambda q, r, 1)$, като

$$\lambda = -\frac{r u_3 + u_4}{p u_1 + q u_2}.$$

Полагаме $u_1 = 1$ и като вземем пред вид формулата (49), намираме, че интегралната мярка на множеството M_4 се представя с интеграла

$$\int_{(M_4)} f\left(\frac{r u_3 + u_4}{p + q u_2}\right) \frac{dp\, dq\, dr\, du_2\, du_3\, du_4}{(p + q u_2)^2 (r u_3 + u_4)^2}. \tag{50}$$

Този интегрален израз може да бъде написан и в по-симетричен вид. Да положим

$$u_2 = \bar{r}, \quad u_3 = \bar{q}, \quad u_4 = \bar{p},$$

а също така и

$$f = \frac{p + q\bar{r}}{\bar{p} + \bar{q} r} \varphi.$$

Така получаваме

$$m(M_4) = \int_{(M_4)} \varphi \left(\frac{p + q\bar{r}}{\bar{p} + \bar{q} r}\right) \frac{dp\, dq\, dr\, d\bar{p}\, d\bar{q}\, d\bar{r}}{(p + q\bar{r})^2 (\bar{p} + \bar{q} r)^2}, \tag{51}$$

като φ е произволна функция. Формулата (51) дава следователно мярката на множеството M_4 от двойки неинцидентни крайна точка+крайна равнина, като точката има координати $M(p, q, r, 1)$ равнината има уравнение

$$\varepsilon: x_1 + \bar{r} x_2 + \bar{q} x_3 + \bar{p} x_4 = 0.$$

Лесно може да се покаже, че изразът $(p + q\bar{r}) : (\bar{p} + \bar{q} r)$ е числената инварианта на точката и равнината. Присъствието на произволната функция φ в (51) е указание, че двуосната група е интранзитивна в множеството M_4 [10].

§ 5. Множество от двойки инцидентни крайна точка + крайна равнина

Нека текущата равнина ε има уравнение

$$\varepsilon\quad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$

и съдържа крайната точка $M(p,q,r,1)$. Тогава изпълнено е условието

$$\varepsilon:\ u_1(x_1-px_4)+u_2(x_2-qx_4)+u_3(x_3-rx_4)=0.$$

От друга страна, равнината ε пресича абсолютните прави j,k в точките $A(a,1,0,0)$, $C(0,0,c,1)$, като

$$a=-\frac{u_2}{u_1},\quad c=r+pu_1+qu_2\quad (u_3=1).$$

Прилагайки отново получената формула в § 9, получаваме резултата: множеството M_5 от двойки инцидентни крайна точка крайна равнина има интегрална мярка, която се изразява с интеграла

$$m(M_5)=\int\limits_{(M_5)}\frac{dp\,dq\,dr\,du_1\,du_2}{(pu_1+qu_2)^3}. \tag{52}$$

Текущата точка има координати $M(p,q,r,1)$, а текущата равнина има уравнение

$$\varepsilon:\ u_1(x_1-px_4)+u_2(x_2-qx_4)+x_3-rx_4=0.$$

§. 6. Множество от двойки безкрайна точка + безкрайна равнина от различен тип

Нека равнината ε съдържа абсолютната права k. Тогава тя се представя с уравнение от вида

$$\varepsilon:\ x_1-\lambda x_2=0.$$

Пресечната точка на тази равнина с абсолютната права j е точката $B(\lambda,1,0,0)$. Нека текущата безкрайна точка на разглежданото множество е $A(a,1,0,0)$. Прилагаме формулата от § 3. Така намираме

$$m(M_6)=\int\limits_{(M_6)}\frac{da\,d\lambda}{(a-\lambda)^2}, \tag{53}$$

т. е. мярката на множество M_6 от двойки точка от първи тип $A(a,1,0,0)$ и безкрайна равнина от втори тип с уравнение $\varepsilon:\ x_1-\lambda x_2=0$.

§ 7. Мярка на множество от двойки неинцидентни крайна точка + крайна права

Нека точката $M(x_1,x_2,x_3)$ е крайна точка на двуосното пространство. Двуосните преобразования я преобразуват по закона (13). При тези преобразования правата $g(a,b,p,q)$, представена с уравненията (29), както видяхме, се трансформира по закона (32).

Сега разглеждаме седеммерното пространство на точките $(x_1, x_2, x_3, a, b, p, q)$. В него действува групата от преобразования (13), (32). Инфинитезималните оператори на тази група са

$$
(54)\qquad
\begin{aligned}
X_1 &= \quad a\frac{\partial f}{\partial a}+p\frac{\partial f}{\partial p}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\\
X_2 &= \quad b\frac{\partial f}{\partial b}+q\frac{\partial f}{\partial q}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2},\\
X_3 &= \quad b\frac{\partial f}{\partial a}+q\frac{\partial f}{\partial p}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_1},\\
X_4 &= \quad a\frac{\partial f}{\partial b}+p\frac{\partial f}{\partial q}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_2},\\
X_5 &= -a\frac{\partial f}{\partial a}-b\frac{\partial f}{\partial a}+x_3\frac{\partial f}{\partial a},\\
X_6 &= -a\frac{\partial f}{\partial p}-b\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial x_3},\\
X_7 &= -p\frac{\partial f}{\partial a}-q\frac{\partial f}{\partial b}-x_3\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}
$$

Ако положим

$$
(55)\qquad X_i=0,\ i=1,\dots,7,
$$

което означава търсенето на численни инварианти на точката $(x_1, x_2, x_3, a, b, p, q)$, или все едно търсене на численни инварианти за двойката крайна права+крайна точка в двуосното пространство [6], получаваме система от седем частни диференциални уравнения, която има единственото решение $f(x_1, x_2, x_3, a, b, p, q)=0$. Това показва, че крайна точка и крайна права в двуосното пространство не притежават численa инварианта.

От (54) изчисляваме функциите

$$
(56)\qquad \sigma_1=3,\ \sigma_2=3,\ \sigma_3=0,\ \sigma_4=0,\quad \sigma_5=-1,\ \sigma_6=0,\ \sigma_7=4x_3
$$

и тогава системата частни диференциални уравнения

$$
(57)\qquad
\begin{aligned}
&a\frac{\partial f}{\partial a}+p\frac{\partial f}{\partial p}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+3f=0,\\
&b\frac{\partial f}{\partial b}+q\frac{\partial f}{\partial q}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+3f=0,\\
&b\frac{\partial f}{\partial a}+q\frac{\partial f}{\partial p}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\qquad =0,\\
&a\frac{\partial f}{\partial b}+p\frac{\partial f}{\partial q}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\qquad =0,\\
&a\frac{\partial f}{\partial a}+b\frac{\partial f}{\partial b}-x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+\ f=0,\\
&a\frac{\partial f}{\partial p}+b\frac{\partial f}{\partial q}-\quad\frac{\partial f}{\partial x_3}\qquad =0,\\
&p\frac{\partial f}{\partial a}+q\frac{\partial f}{\partial b}+x_3\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)+4x_3f=0
\end{aligned}
$$

ще ни определи интегралните инварианти на множеството от точки M_7

Системата (57) ще решим последователно. Общият интеграл на първото ѝ уравнение е

$$f = x_1^{-3} \varphi\left(\frac{a}{x_1}, \frac{p}{x_1}, b, q, x_2, x_3\right).$$

Като изразим условието, че тази функция е решение на второто уравнение, получаваме

$$f = x_1^{-3} x_2^{-3} \varphi\left(\frac{a}{x_1}, \frac{b}{x_2}, \frac{p}{x_1}, \frac{q}{x_2}, x_3\right).$$

Петото уравнение на системата ни дава

$$f = x_1^{-3} x_2^{-3} x_3 \varphi\left(\frac{ax_3}{x_1}, \frac{bx_3}{x_2}, \frac{p}{x_1}, \frac{q}{x_2}\right).$$

Третото уравнение показва, че

$$f = x_3(qx_1 - px_2)^{-3} \varphi\left(\frac{bx_3}{x_2}, \frac{q}{x_2}, \frac{bx_1 - ax_2}{qx_1 - px_2} x_3\right),$$

а четвъртото, че

$$f = x_3(qx_1 - px_2)^{-3} \varphi\left(\frac{bx_1 - ax_2}{qx_1 - px_2} x_3, \frac{aq - bp}{qx_1 - px_2} x_3\right).$$

Като заместим в шестото уравнение, получаваме

$$f = (bx_1 - ax_2)^{-1}[qx_1 - px_2 + x_3(bx_1 - ax_2)]^{-2} \varphi\left(\frac{bx_1 - ax_2}{aq - bp}\right);$$

функцията φ се определя окончателно от последното уравнение. Получаваме

$$f = (aq - bp)^{-1}[(qx_1 - px_2) + x_3(bx_1 - ax_2)]^{-2} \tag{58}$$

и това е функцията на гъстотата за множество M_7 от двойки крайна точка+крайна права.

Следователно интегралната мярка на множеството M_7 от двойки крайна точка+крайна права на двуосното пространство се изразява с интеграла

$$m(M_7) = \int_{(M_7)} \frac{da\, db\, dp\, dq\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{(aq - bp)[(qx_1 - px_2) + x_3(bx_1 - ax_2)]^2}, \tag{59}$$

а гъстотата на това множество се дава с формата

$$(aq - bp)^{-1}[(qx_1 - px_2) + x_3(bx_1 - ax_2)]^{-2}\, da\, db\, dp\, dq\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{60}$$

§ 8. Мярка на множество от двойки неинцидентни крайна точка+изотропна права

Изотропната права $g(\lambda, \mu, \nu)$ от втора система ще определим като пресечница на равнините

$$(61) \qquad x_1 = \lambda x_2, \quad x_2 = \mu x_3 + \nu x_4.$$

Нейните параметри се преобразуват по законите

$$\lambda' = \frac{a_1^1 \lambda + a_1^2}{a_2^1 \lambda + a_2^2},$$

$$\mu' = a^{-1}(a_2^1 \lambda + a_2^2)(\mu a_4^4 - \nu a_4^3),$$

$$\nu' = a^{-1}(a_2^1 \lambda + a_2^2)(-\mu a_3^4 + \nu a_3^3).$$

Тези преобразования образуват група с оператори

$$X_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \ X_2 = -\mu \frac{\partial f}{\partial \mu}, \ X_3 = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \ X_4 = -\mu \frac{\partial f}{\partial \nu},$$

$$X_5 = \lambda X_6, X_6 = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial f}{\partial \nu}, \ X_7 = -\nu \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Диференциалната система, която ще ни определи интегралните инварианти на множество M_8, има вида

$$(62) \qquad \begin{aligned}
& x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + 2f = 0, \quad x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} - \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0, \\
& x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} - \mu \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0, \\
& x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \lambda \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} + \lambda \nu \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0, \\
& x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2f = 0, \\
& x_3 \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) + \nu \frac{\partial f}{\partial \mu} + 4 x_3 f = 0.
\end{aligned}$$

Тя има единствено решение

$$(63) \qquad f = (x_1 - \lambda x_2)^{-2} (\mu x_3 + \nu)^{-2},$$

а интегралната мярка на множество от крайна точка+изотропна права се определя с интеграла

$$(64) \qquad m(M_8) = \int\limits_{(M_8)} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3\, d\lambda\, d\mu\, d\nu}{(x_1 - \lambda x_2)^2 (\mu x_3 + \nu)^2}.$$

§ 9. Мярка на множество от двойки безкрайна права+крайна точка, неинцидентни

Разглеждаме множество, образувано от крайни точки $M(x_1, x_2, x_3)$ и безкрайна права, определена с безкрайните точки $A(a, 1, 0, 0)$, $C(0, 0, c, 1)$. Определянето на функцията на гъстотата за това множество се свежда до решаването на системата

$$\frac{\partial f}{\partial a}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad a\frac{\partial f}{\partial a}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+2f=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}+\frac{\partial f}{\partial x_3}=0, \quad c\frac{\partial f}{\partial c}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+2f=0, \tag{65}$$

$$a\frac{\partial f}{\partial a}-x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \quad a^2\frac{\partial f}{\partial a}-x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+2af=0,$$

$$c^2\frac{\partial f}{\partial c}+x_3\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)+2(c+2x_3)f=0.$$

Оказва се, че последните две уравнения са следствие от предните, чието най-общо решение се дава с функцията

$$f=(x_1-ax_2)^{-2}(x_3-c)^{-2}. \tag{66}$$

Следователно интегралната мярка на множеството M_9 от двойки неинцидентни крайна точка+безкрайна права се дава с интеграла

$$m(M_9)=\int\limits_{(M_9)}\frac{dx_1\,dx_2\,dx_3\,da\,dc}{(x_1-ax_2)^2(x_3-c)^2}. \tag{67}$$

§ 10. Мярка на множество от неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави

Уравнението на произволна повърхнина от втора степен, съдържаща абсолютните прави j, k, се записва във вида

$$ax_1x_3+bx_1x_4+cx_2x_3+x_2x_4=0. \tag{68}$$

Следователно в двуосното пространство има трипараметрична съвкупност от квадрики, минаващи през абсолюта j, k.

Повърхнината (68) е изродена точно когато е изпълнено

$$a-bc=0. \tag{69}$$

Да направим едно приложение на току-що казаното. Пространството на квадриките (a, b, c) притежава абсолюта (69). Следователно пространството на квадриките е локално изоморфно с тримерното пространство на Лобачевски, а следователно и с тримерното евклидово пространство. Но в тримерното евклидово пространство едно множество от точки притежава инвариантна интегрална мярка (обем). Това показва, че множество от неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави (множество M_{10}), в двуосното пространство също притежава инвариантна интегрална мярка. След като установихме това, нашата цел ще бъде да намерим израз за тази мярка чрез параметрите a, b, c.

Двуосните колинеации (5) преобразуват параметрите a, b, c по формулите

$$a^*=\frac{aa_1^1a_3^3+ba_1^1a_4^3+ca_3^3a_2^1+a_2^1a_4^3}{aa_1^2a_3^4+ba_1^2+ca_2^2a_3^4+a_2^2},$$

$$
(70) \qquad b^* = \frac{a a_1^1 a_3^4 + b a_1^1 + c a_2^1 a_3^4 + a_2^1}{a a_1^2 a_3^4 + b a_1^2 + c a_2^2 a_3^4 + a_2^2},
$$

$$
c^* = \frac{a a_3^3 a_1^2 + b a_1^2 a_4^3 + c a_2^2 a_3^3 + a_2^2 a_4^3}{a a_1^2 a_3^4 + b a_1^2 + c a_2^2 a_3^4 + a_2^2}.
$$

Едно внимателно вглеждане в тези формули показва, че един от параметрите a_i^j е несъществен. Полагаме $a_2^2 = 1$ и разглеждаме получената група от преобразования. Инфинитезималните ѝ оператори се дават с равенствата

$$
X_1 = a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b}, \quad X_2 = a\frac{\partial f}{\partial a} + c\frac{\partial f}{\partial c}
$$

$$
(71) \qquad X_3 = c\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}, \quad X_4 = -ab\frac{\partial f}{\partial a} - b^2\frac{\partial f}{\partial b} + (a - bc)\frac{\partial f}{\partial c},
$$

$$
X_5 = b\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c}, \quad X_6 = -ac\frac{\partial f}{\partial a} + (a - bc)\frac{\partial f}{\partial b} - c^2\frac{\partial f}{\partial c}.
$$

Системата $X_i = 0$ няма решение освен тривиалното $f(a, b, c) = \mathrm{const}$. Това означава, че една квадрика (a, b, c) в двуосното пространство няма числена инварианта.

Системата, която ще ни даде интегралните инварианти на множеството M_{10}, има вида

$$
a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + 2f = 0, \quad a\frac{\partial f}{\partial a} + c\frac{\partial f}{\partial c} + 2f = 0,
$$

$$
(72) \qquad c\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad -ab\frac{\partial f}{\partial a} - b^2\frac{\partial f}{\partial b} + (a - bc)\frac{\partial f}{\partial c} - 4bf = 0,
$$

$$
b\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c} = 0, -ac\frac{\partial f}{\partial a} + (a - bc)\frac{\partial f}{\partial b} - c^2\frac{\partial f}{\partial c} - 4cf = 0
$$

и има следното единствено решение (както в началото е уговорено, с точност до константа):

$$
(73) \qquad f(a, b, c) = (a - bc)^{-2}.
$$

Тази функция е функцията на гъстотата за множеството M_{10}, а самата гъстота е

$$
(74) \qquad \frac{da\,db\,dc}{(a - bc)^2}.
$$

Интегралната мярка на множеството M_{10} се дава с интеграла [5]

$$
(75) \qquad m(M_{10}) = \int \frac{da\,db\,dc}{(a - bc)^2}.
$$

§ 11. Множество от двойки неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави

Такова множество ще означаваме като множество M_{11}. За да намерим интегралните инварианти на това множество, ще разширим двойно групата (70). Получената група има следните оператори:

$$X_i + \bar{X}_i,$$

като операторите X_i се дават със (71), а операторът $\bar{X}_i$ се получава от оператора X_i със замяната $a \to \bar a$, $b \to \bar b$, $c \to \bar c$.

Числените инварианти на две неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави, ще определим, като решим системата

$$(76)\qquad \begin{aligned}
&a\frac{\partial f}{\partial a}+b\frac{\partial f}{\partial b}+\bar a\frac{\partial f}{\partial \bar a}+\bar b\frac{\partial f}{\partial \bar b}=0,\\
&a\frac{\partial f}{\partial a}+c\frac{\partial f}{\partial c}+\bar a\frac{\partial f}{\partial \bar a}+\bar b\frac{\partial f}{\partial \bar b}=0.\\
&c\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}+\bar c\frac{\partial f}{\partial \bar a}+\frac{\partial f}{\partial \bar b}=0,\\
&b\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial c}+\bar b\frac{\partial f}{\partial \bar a}+\frac{\partial f}{\partial \bar c}=0,\\
&ab\frac{\partial f}{\partial a}+b^2\frac{\partial f}{\partial b}-(a-bc)\frac{\partial f}{\partial c}+\bar a\bar b\frac{\partial f}{\partial \bar a}+\bar b^2\frac{\partial f}{\partial \bar b}-(\bar a-\bar b\bar c)\frac{\partial f}{\partial \bar c}=0,\\
&ac\frac{\partial f}{\partial a}-(a-bc)\frac{\partial f}{\partial b}+c^2\frac{\partial f}{\partial c}+\bar a\bar c\frac{\partial f}{\partial \bar a}-(\bar a-\bar b\bar c)\frac{\partial f}{\partial \bar b}+\bar c^2\frac{\partial f}{\partial \bar c}=0.
\end{aligned}$$

Общият интеграл на третото уравнение е

$$f=f(a-bc,\ \bar a-\bar b\bar c,\ a-\bar b c,\ c,\ \bar c),$$

който, заместен в четвъртото уравнение, добива по-специалния вид

$$f=f(a-bc,\ \bar a-\bar b\bar c,\ b-\bar b,\ c-\bar c).$$

Последният, поставен в първото уравнение, ни дава функцията

$$f=f\left(\frac{a-bc}{b-\bar b},\ \frac{\bar a-\bar b\bar c}{b-\bar b},\ c-\bar c\right).$$

Сега изразяваме условието, че тази функция удовлетворява и второто уравнение на системата (76). Така получаваме

$$f=f\left(\frac{a-bc}{(b-\bar b)(c-\bar c)},\ \frac{\bar a-\bar b\bar c}{(b-\bar b)(c-\bar c)}\right).$$

Най-после заместваме в петото уравнение и намираме

$$(77)\qquad f=f\left(\frac{(a+\bar a-b\bar c-\bar b c)^2}{(a-bc)(\bar a-\bar b\bar c)}\right).$$

Тази функция, заместена в последното уравнение на (76), дава тъждество. Следователно общият интеграл на системата (76) се дава със (77). Това означава, че две неизродени квадрики, съдържащи абсолютните прави, имат безбройно много числени инварианти — поради произвола на функцията

$$f(a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = f(J), \tag{78}$$

като е положено

$$J = \frac{(a + \bar{a} - b\bar{c} - \bar{b}c)^2}{(a - bc)(\bar{a} - \bar{b}\,\bar{c})}. \tag{79}$$

Последната инварианта е една специална инварианта на двете неизродени квадрики. Всяка друга се явява функция от нея. Не е трудно да се даде нейното геометрично тълкуване.

Разглеждаме снопа неизродени квадрики, определен с двете квадрики

$$a x_1 x_3 + b x_1 x_4 + c x_2 x_3 + x_2 x_4 = 0,$$

$$\bar{a} x_1 x_3 + \bar{b} x_1 x_4 + \bar{c} x_2 x_3 + x_2 x_4 = 0.$$

Той се представя с

$$(a + \lambda\bar{a}) x_1 x_3 + (b + \lambda\bar{b}) x_1 x_4 + (c + \lambda\bar{c}) x_2 x_3 + (1 + \lambda) x_2 x_4 = 0, \tag{80}$$

като λ е параметър. Произволна квадрика от снопа има представянето

$$a' = \frac{a + \lambda\bar{a}}{1 + \lambda}, \quad b' = \frac{b + \lambda\bar{b}}{1 + \lambda}, \quad c' = \frac{c + \lambda\bar{c}}{1 + \lambda}. \tag{81}$$

Търсим сега изродените квадрики от снопа. За тях е изпълнено условието (69). За λ получаваме квадратното уравнение

$$(\bar{a} - \bar{b}\,\bar{c})\lambda^2 + (a + \bar{a} - \bar{b}c - b\bar{c})\lambda + (a - bc) = 0,$$

така че в снопа (81) въобще има две изродени квадрики. За тях имаме

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a + \bar{a} - b\bar{c} - \bar{b}c) + \sqrt{(a + \bar{a} - b\bar{c} - \bar{b}c)^2 - 4(a - bc)(\bar{a} - \bar{b}\,\bar{c})}}{2(\bar{a} - \bar{b}\,\bar{c})}. \tag{82}$$

Да означим с δ двойното отношение на двете дадени квадрики и намерените две изродени квадрики. Лесно може да се покаже, че е в сила следната формула:

$$J = \frac{(\delta + 1)^2}{\delta}. \tag{83}$$

Сега ще се занимаем с намирането на интегрална инварианта на множеството M_{11}. Като съставим съответната система частни диференциални уравнения и я решим последователно, ще получим за функцията на гъстотата на множеството M_{11} функцията

$$\varphi(J)(a - bc)^{-2}(\bar{a} - \bar{b}\,\bar{c})^{-} \tag{84}$$

като $\varphi(J)$ е произволна функция на инвариантата J. Тогава интегралната мярка на множеството M_{11} се представя с интеграла

$$\int\limits_{(M_{11})} \varphi(J) \frac{da\,db\,dc}{(a-bc)^2} \frac{d\bar{a}\,d\bar{b}\,d\bar{c}}{(\bar{a}-\bar{b}\,\bar{c})^2}. \tag{85}$$

§ 12. Мярка на множество от двойки изродена и неизродена квадрики, съдържащи абсолютните прави

Нека (a, b, c) е неизродена квадрика, зададена с уравнението (68). В сила са формулите (70) за изменението на параметрите a, b, c. Съответствуващите инфинитезимални оператори са (71).

От друга страна, нека $(\bar{a}=\bar{b}\,\bar{c}, \bar{b}, \bar{c})$ е изродена квадрика. Параметрите й $\bar{b}, \bar{c}$ се изменят по формулите

$$\bar{b}^* = \frac{\bar{b}\alpha_1^1+\alpha_2^1}{\bar{b}\alpha_1^2+1}, \quad \bar{c}^* = \frac{\bar{c}\,\alpha_3^3+\alpha_4^3}{\bar{c}\,\alpha_3^4+1}, \tag{86}$$

като инфинитезималните оператори са

$$X_1 = \bar{b}\frac{\partial f}{\partial \bar{b}}, \quad X_2 = \bar{c}\frac{\partial f}{\partial \bar{c}}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial \bar{b}}$$

$$X_4 = \frac{\partial f}{\partial \bar{c}}, \quad X_5 = -\bar{b}^2\frac{\partial f}{\partial \bar{b}}, \quad X_6 = -\bar{c}^2\frac{\partial f}{\partial \bar{c}}$$

Сега разглеждаме съвместно групата с оператори (71) и (87). За величините σ_i намираме

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 3, \qquad \sigma_3 = \sigma_4 = 0,$$

$$\sigma_5 = -4b - 2\bar{b}, \quad \sigma_6 = -4c - 2c$$

и следователно системата, която ще ни даде интегралните инварианти на множеството M_{12}, съставено от двойки изродена и неизродена квадрики през абсолютните прави, има вида

$$\begin{aligned}
&a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + \bar{b}\frac{\partial f}{\partial \bar{b}} + 3f = 0,\\
&a\frac{\partial f}{\partial a} + c\frac{\partial f}{\partial c} + \bar{c}\frac{\partial f}{\partial \bar{c}} + 3f = 0,\\
&c\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial \bar{b}} = 0,\\
&b\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial \bar{c}} = 0,
\end{aligned} \tag{88}$$

$$-ab\frac{\partial f}{\partial a} - b^2\frac{\partial f}{\partial b} + (a-bc)\frac{\partial f}{\partial c} - \bar{b}^2\frac{\partial f}{\partial \bar{b}} - (4b + 2\bar{b})f = 0,$$

$$-ac\frac{\partial f}{\partial a} + (a-bc)\frac{\partial f}{\partial b} - c^2\frac{\partial f}{\partial c} - \bar{c}^2\frac{\partial f}{\partial \bar{c}} - (4c + 2c)f = 0.$$

Оказва се, че последното уравнение е следствие от другите уравнения на тази система. Разглеждаме последователно трето, четвърто, първо и второ уравнение на тази система. За общите интеграли на вече разглежданите уравнения се намират функциите

$$f=f(a-bc,\ b-\bar{b},\ c,\ \bar{c}),$$

$$f=f(a-bc,\ b-\bar{b},\ c-\bar{c}),$$

$$f=(b-\bar{b})^{-3}\,\varphi\left(\frac{a-bc}{b-\bar{b}},\ c-c\right),$$

$$f=(b-\bar{b})^{-3}(c-\bar{c})^{-3}\,\varphi\left(\frac{a-bc}{(b-\bar{b})(c-\bar{c})}\right).$$

Последната функция, заместена в петото уравнение, ни дава

$$f=(a-bc)^{-1}[a-bc+(b-\bar{b})(c-\bar{c})]^{-2}, \tag{89}$$

която е функцията на гъстотата за множеството M_{12}. Самата интегрална мярка на това множество се дава като решение на интеграла

$$m(M_{12})=\int\limits_{M_{12}}\frac{da\,db\,dc\,d\bar{b}\,d\bar{c}}{(a-bc)[a-bc+(b-\bar{b})(c-\bar{c})]^2}. \tag{90}$$

§ 13. Мярка на множеството, съставено от двойки изродени квадрики през абсолютните прави

Нека M_{13} е множество, съставено от двойки изродени квадрики през абсолютните прави. Ако текущият елемент на това многообразие е $(a=bc,\ b, c;\ \bar{a}=\bar{b}\bar{c},\ \bar{b}, \bar{c})$, лесно може да се покаже, че интегралната мярка на множеството M_{13} се дава с интеграла

$$m(M_{13})=\int\limits_{(M_{13})}\frac{db\,dc\,d\bar{b}\,d\bar{c}}{(b-\bar{b})^2(c-\bar{c})^2}. \tag{91}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б. Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **48**, 1 (1953), 48—84.
2. Petkantschin, B. Integralgeometrie 6. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raum. Hamburger Abhandlungen, 11 (1936), 249—310.
3. Обрешков, Н. О гиперболической интегральной геометрии. Доклады БАН, **2** (1949), № 2—3, 1—4.
4. Станилов, Г. Конгруенции от прави в биаксиалната геометрия. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **57** (1964), 317—334.
5. Норден, А. П. О самосопряженных образах биаксиального пространства. Уч. зап. Каз. гос. ун-та, **114** (1954), 2, 3—12.
6. Чеботарев, Н. Г. Теория групп Ли. Москва — Ленинград, 1940.
7. Сантало, А. А. Введение в интегральную геометрию. Москва, 1956.
8. Дринфельд, Г. И. О некоторых основных формулах интегральной геометрии (II). Зап. Харьк. Мат общ., **23** (1952), 61—71.

9. Дринфельд, Г. И., А. В. Луценко. Про міру множин кривих другово порядку. Доповіді Академії наук УРСР, № 1 (1965), 14—17.
10. Stoka, M. Géometrie integrală. Ed. Ac. R. S. România, Bucureşti, 1967.

Постъпила на 7. III. 1966 г.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ БИАКСИАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

Грозьо Станилов

Резюме

Работа состоит из двух частей: первая часть написана в стиле книги А. А. Сантало [7], а вторая — в стиле книги Н. Г. Чеботарёва [6].

В первой части мы доказываем ряд теорем относительно существования или несуществования интегральных мер множеств в биаксиальном пространстве. Рассмотрены множества, составленные из точек, прямых, плоскостей, пар точек, пар плоскостей, пар „точка+прямая", пар „точка плоскость" и т. д. Рассматриваются и множества, составленные из сфероидов (по терминологии А. П. Нордена).

Во второй части, исходя из определенного координатного представления элемента множества, находим функцию плотности множества.

Доказано, что следующие множества обладают инвариантную меру:

M_1 — множество конечных прямых (по терминологии Б. Петканчина);

M_2 — множество пар конечных точек;

M_3 — множество пар бесконечных точек одного и того же типа;

M_4 — множество пар неинцидентных „конечная точка+конечная плоскость";

M_5 — множество пар инцидентных „конечная точка конечная плоскость";

M_6 — множество пар неинцидентных „бесконечная точка+бесконечная плоскость";

M_7 — множество пар неинцидентных „конечная точка+конечная прямая";

M_8 — множество пар неинцидентных „конечная точка+изотропная прямая";

M_9 — множество пар неинцидентных „конечная точка+бесконечная прямая";

M_{10} — множество невырожденных сфероидов;

M_{11} — множество пар невырожденных сфероидов;

M_{12} — множество пар „вырожденный+невырожденный сфероид";

M_{13} — множество пар вырожденных сфероидов.

Соответствующие меры будут: (16)—(41), (17)—(45), (18)—(46), (19)—(51), (20)—(52), (21)—(53), (22)—(59), (23)—(64), (24)—(67), (25)—(75), (26)—(85), (27)—(90), (28)—(91).

Кроме того, во второй части находим численный инвариант двух сфероидов (79) и даем ему геометрическое толкование (83).

GRUNDFORMELN DER INTEGRALGEOMETRIE IM ZWEIACHSIGEN RAUM

Grosjo Stanilow

Zusammenfassung

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen.

Im ersten Teil beweisen wir einige Behauptungen über die Existenz oder Nichtexistenz von Integralinvarianten verschiedener Mengen, die aus Punkten, Geraden, Ebenen, Quadriken u. s. w. bestehen. Die folgenden Mengen besitzen Integralinvarianten:

M_1 — Menge, die aus endlichen Geraden besteht;

M_2 — Menge, die aus endlichen Punktepaaren besteht;

M_3 — Menge, die aus unendlichen Punktepaaren erster Art besteht;

M_4 — Menge, die aus Paaren „nichtinzidente endlicher Punkt+endliche Ebene" besteht;

M_5 — Menge, die aus Paaren „inzidente endlicher Punkt+endliche Ebene" besteht;

M_6 — Menge, die aus Paaren „nichtinzidente unendlicher Punkt+unendliche Ebene" besteht;

M_7 — Menge, die aus Paaren „nichtinzidente endlicher Punkt+endliche Gerade" besteht;

M_8 — Menge, die aus Paaren „nichtinzidente endlicher Punkt+isotrope Gerade" besteht;

M_9 — Menge, die aus Paaren „nichtinzidente endlicher Punkt+unendliche Gerade" besteht:

M_{10} — Menge, die aus nichtausgearteten Sphäroiden besteht;

M_{11} — Menge, die aus Paaren ausgearteter Sphäroiden besteht;

M_{12} — Menge, die aus Paaren „nichtausgeartetes Sphäroid und ausgeartetes Sphäroid" besteht;

M_{13} — Menge, die aus Paaren ausgearteter Sphäroiden besteht.

Im zweiten Teil finden wir die entsprechenden Dichtefunktionen. Der Ausdruck (79) ist eine numerische Invariante von zwei Sphäroiden; sie läßt sich geometrisch deuten (83).