БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ЕДИН РЕЛАКСАЦИОНЕН МЕТОД ЗА РЕШАВАНЕ НА СИСТЕМИ ОТ НЕЛИНЕЙНИ НЕРАВЕНСТВА

Милчо Германов и Веселин Спиридонов

1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Нека E_n е n-мерното евклидово пространство. С K_n се означава класът от всички функции, дефинирани в E_n, които притежават непрекъснати първи частни производни и са изпъкнали в E_n.

Разглежда се системата

(1) $$\varphi_k(X) \leqq 0, \quad k=1, 2, \ldots, m,$$

в случая, когато $\varphi_k(X) \in K_n$, $k=1, 2, \ldots, m$, а изпъкналата област $M \subset E_n$, определена от системата, не се изражда в област от $n-1$-мерно пространство.

В настоящата работа ще бъде изложен един релаксационен метод за намиране на точка от M.

2. РЕЛАКСАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА СИСТЕМИ ОТ ЛИНЕЙНИ НЕРАВЕНСТВА

В случая, когато функциите $\varphi_k(X)$, $k=1, 2, \ldots, m$, са линейни, са известни релаксационните методи на Агмон [1] и Мотцкин и Шоенберг [2]. Методът на Агмон се състои в следното. Нека X_0 е произволна точка от E_n. Всяко неравенство $\varphi_k(X) \leqq 0$ определя полупространство в E_n, ограничено от хиперравнината с уравнение $\varphi_k(X)=0$. В този случай M представлява многостенна изпъкнала област. Ако $X_0 \in M$, едно решение на системата е намерено. Ако $X_0 \bar{\in} M$, с Q_0 се означава множеството от тези индекси $k=1, 2, \ldots, m$, за които е изпълнено $\varphi_k(X_0)>0$. Измежду хиперравнините с уравнения $\varphi_k(X)=0$, $k \in Q_0$, се намира тази, на която разстоянието от X_0 е най-голямо. Ако няколко хиперравнини имат това свойство, избира се коя да е от тях. Ортогоналната проекция на X_0 върху тази хиперравнина се означава с X_1. По този начин се образува редицата от точки

(2) $$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

Агмон доказва, че редицата (2) или е крайна (и завършва с точка от M), или е безкрайна, но сходяща и има за граница точка от M.

Релаксационният метод на Моцкин и Шоенберг [2] представлява известно обобщение на метода на Агмон. Въвежда се един параметър λ, за който е изпълнено $0<\lambda<2$. Ако $X_0 \in M$, образува се редицата от точки

$$X_0, X_1', X_2' \tag{3}$$

където X_1' (аналогично и X_2', X_3' и т. н.) се получава така: ако X_1 е ортогоналната проекция на X_0, намерена както при метода на Агмон, то

$$X_1' = X_0 + \lambda (X_1 - X_0). \tag{4}$$

Параметърът λ за цялата редица (3) е фиксиран. За нея също се доказва, че тя или е крайна (и завършва с точка от M), или е безкрайна, но сходяща и клони към точка от M. Методът на Агмон е частен случай от метода на Моцкин и Шоенберг при $\lambda = 1$.

3. МЕТОД НА ЕРЕМИН

В случая, когато функциите φ_k, $k=1, 2, \ldots, m$, принадлежат на класа K_n, но не са линейни, едно обобщение на метода на Моцкин и Шоенберг е дадено от Еремин [3]. В него се постъпва по следния начин. Нека X_0 е произволна точка от E_n. Неравенствата $\varphi_k(X) \leq 0$ определят изпъкнали области G_k, $k=1, \ldots, m$. Имаме $M = \bigcap_k G_k$. Ако $X_0 \notin M$, с Q_0 се означава множеството от тези индекси $k = 1, 2, \ldots, m$, за които е изпълнено $\varphi_k(X_0) > 0$. Нека X_1^k, $k \in Q_0$, са точките, проекции на X_0 върху областите G_k, $k \in Q_0$. Измежду точките X_1^k се определя X_1, така че

$$\|X_1 - X_0\| = \min_{k \in Q_0} \{\|X_1^k - X_0\|\}.$$

По формула (4) се определя X_1' и се образува редица, аналогична на редицата (3), за която се доказват същите твърдения.

При практическото използване на метода на Еремин [3] възниква следното затруднение: на всяка стъпка от метода се налага да се търсят проекциите на точка върху изпъкнали области. Това снижава ефективността на метода. Същият недостатък имат и методите на последователно проектиране, разгледани в [4] и [5].

В настоящата работа се дава един релаксационен метод, при прилагането на който се построява редица от последователни приближения, подобна на (2), чрез използване на ортогоналните траектории към фамилиите повърхнини $\varphi_k(X) = C$. По този начин проектирането на точка върху област се замества с намиране на пресечната точка на контура на областта с нейна ортогонална траектория. Доказва се и сходимостта на метода.

4. ЗАДАЧА С ЛИНЕЙНИ ОГРАНИЧЕНИЯ

Първо ще се спрем на случая, когато всички функции φ_k са линейни. Ще бъде разгледан един релаксационен метод, който представлява модификация на метода на Агмон.

Нека X е произволна точка от E_n. Дефинира се непрекъснатата функция $d(X)$ по следния начин:

$$d(X)=\begin{cases}0, & \text{ако} \quad X\in M,\\ \max\limits_{k}\{\varphi_k(x)\}, & \text{ако} \quad X\bar{\in} M.\end{cases}$$

Вижда се, че $d(X)\geq 0$ за всяко X.

Задача I. Дадена е системата от линейни неравенства

$$\varphi_k(X)\leq 0, \quad k=1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

която определя изпъкнала многостенна област M в E_n. Ако M не се изражда в област от $n-1$-мерно пространство, да се намери една каква да е точка от M.

За решаването на задача I се предлага следният алгоритъм.

Нека X_0 е произволна точка от E_n. Образува се редицата

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots \tag{6}$$

по следния начин:

а) ако $X_j\in M$, редицата (6) е крайна и X_j е нейният последен член;

б) ако $X_j\bar{\in} M$, намира се такава функция $\varphi_s(X)$, че $\varphi_s(X_j)=d(X_j)$. Тогава X_{j+1} представлява ортогоналната проекция на X_j върху хиперравнината H_s с уравнение $\varphi_s(X)=0$. Да отбележим, че точката X_{j+1} едновременно представлява и пресечна точка на хиперравнината H_s с ортогоналната траектория на фамилията $\varphi_s(X)=C$, която минава през X_j.

При този алгоритъм за разлика от метода на Агмон проектирането на X_j не става изобщо към най-отдалечената от X_j хиперравнина, тъй като функциите $\varphi_k(X)$, $k=1, 2, \ldots, m$, може да не са нормирани. Той има това удобство, че по-нататък може да бъде обобщен в нелинейния случай.

Ще бъде показано, че методът води до точка от M. Предварително се дават следните определения:

Определение 1. Казва се, че точка A е по-близо до множеството M, отколкото точка B, ако за всяко $X\in M$ е изпълнено

$$X-A < X-B$$

Определение 2. Една редица от точки се нарича **фейерова** относно множеството M, ако всеки неин член е по-близо до M, отколкото предидущият.

Вижда се, че всяка фейерова редица от точки е ограничена. В сила е още следната лема [1]:

Лема 1. Ако една редица от точки е фейерова относно M и P' и P'' са две какви да са нейни точки на сгъстяване, то M лежи в симетралната хиперравнина на отсечката $P'P''$

Следствие. Ако M е изпъкнала област в E_n, която не се изражда в област от $n-1$-мерно пространство, всяка фейерова редица от точки в E_n относно M е сходяща.

Ще бъде доказана следната

Теорема 1. Редицата (6), която е получена чрез описаната по-горе процедура, или е крайна (и завършва с точка от M), или е безкрайна, но сходяща и има за граница точка от M.

Доказателство. Да допуснем, че редицата (6) е безкрайна. Ще покажем, че тя е фейерова относно областта M. Нека X_j и X_{j+1} са два произволни последователни члена на (6). Тогава X_{j+1} представлява ортогоналната проекция на X_j върху хиперравнината H_s. С G_s се означава полупространството, определено от неравенството $\varphi_s(X) \leq 0$. Точката X_{j+1} е по-близо до G_s, отколкото X_j. Действително нека Y е произволна точка от G_s. От триъгълника $X_j X_{j+1} Y$ се вижда, че $|Y-X_{j+1}| < |Y-X_j|$. Тъй като предполагаме, че системата (5) е съвместима, то $M \subset G_s$. Оттук следва, че X_{j+1} е по-близо до M, отколкото X_j и според определение 2 редицата (6) е фейерова относно M. От следствието към лема 1 получаваме, че редицата (6) е сходяща. Остава да се покаже, че нейната граница е точка от M.

Допускаме противното — границата X^* на редицата (6) не принадлежи на M. Тогава поне една измежду функциите $\varphi_k(X)$, $k=1, 2, \ldots, m$, например $\varphi_p(X)$, е такава, че

(7) $$\varphi_p(X^*)=b>0.$$

От сходимостта на редицата (6) следва, че при всеки избор на $\varepsilon>0$ може да се намери такъв индекс N и такива $\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_2>0$, че

(8) $$|X_N-X_{N+1}|<\varepsilon,$$

(9) $$|X_{N+1}-X^*|<\varepsilon_1,$$

(10) $$|X_N-X^*|<\varepsilon_2.$$

Нека X_{N+1} е получена от X_N чрез проектиране върху хиперравнината H_q с уравнение $\varphi_q(X)=0$. Следователно

(11) $$d(X_N)=\max_k \{\varphi_k(X_N)\}=\varphi_q(X_N)>0.$$

От неравенствата (8) – (10) и непрекъснатостта на $\varphi_p(X)$ и $\varphi_q(X)$ следва, че съществуват такива $\delta>0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, че

$$|\varphi_q(X_N)-\varphi_q(X_{N+1})|<\delta,$$
$$|\varphi_q(X_{N+1})-\varphi_q(X^*)|<\delta_1,$$
$$|\varphi_p(X_N)-\varphi_p(X^*)|<\delta_2.$$

Тъй като $X_N \notin H_q$, $X_{N+1} \in H_q$, а $\varphi_p(X^*)=b>0$, последните три неравенства се представят така:

(12) $$\varphi_q(X_N)<\delta,$$

(13) $$|\varphi_q(X^*)|<\delta_1,$$

(14) $$|\varphi_p(X_N)-b|<\delta_2.$$

Да оставим индексът N да расте неограничено. Тогава положителните числа ε, ε_1, ε_2, δ, δ_1, δ_2 могат да бъдат избрани колкото искаме малки. От (7) и (13) следва, че $\varphi_p \neq \varphi_q$. От (14) се вижда, че съществува константа $b_1>0$ такава, че

(15) $$\varphi_p(X_N)>b_1.$$

От (12) и (15) се получава, че $\varphi_p(X_N)>\varphi_q(X_N)$. Но това неравенство е в противоречие с условието (11). Това показва, че границата на редицата (6) е точка от M, с което доказателството на теоремата е завършено.

5. ЗАДАЧА С НЕЛИНЕЙНИ ОГРАНИЧЕНИЯ

Задача II. Дадена е системата от неравенства

(1) $$\varphi_k(X) \leq 0, \quad k=1, 2, \ldots, m,$$

където функциите $\varphi_k(X) \in K_n$, $k=1, 2, \ldots, m$. Ако изпъкналата област $M \subset E_n$, определена от системата, не се изражда в област от n — 1-мерно пространство, да се намери една каква да е точка от M.

За решаването на задача II се предлага следният релаксационен метод.

Нека X_0 е произволна точка от E_n. Образува се редицата

(16) $$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$$

по следния начин:

а) ако $X_j \in M$, редицата (16) е крайна и X_j е нейният последен член;

б) ако $X_j \bar{\in} M$, намира се такава функция $\varphi_s(X)$, че $\varphi_s(X_j)=d(X_j)$. С G_s се означава изпъкналата област, определена от неравенството $\varphi_s(X) \leq 0$. Тогава X_{j+1} представлява пресечната точка на контура на G_s с ортогоналната траектория на фамилията $\varphi_s(X)=C$, която минава през X_j.

Трябва да се докаже, че редицата (16), получена чрез описаната по-горе процедура, или е крайна (и завършва с точка от M), или е безкрайна, но сходяща и има за граница точка от M. За тази цел е необходимо да се установи, че редицата (16) е фейерова относно M. Доказателството на това твърдение се основава на теорема 9, която ще бъде доказана по-нататък. Тя гласи, че ако A е произволна точка от контура на G_k, $1 \leq k \leq m$, то A е по-близо до G_k, отколкото всяка точка B ($B \bar{\in} G_k$) от ортогоналната траектория през A на фамилията $\varphi_k(X)=C$. Тези разглеждания имат геометричен характер, затова предварително се привеждат известни факти от геометрията, свързани с еволвенти на изпъкнали криви в равнината и еволвенти на геодезични линии на изпъкнала повърхнина в E_n. Чрез еволвентите, минаващи през произволна точка A от контура на G_k, се определя такава област, че точка A е по-близо до G_k, отколкото коя да е точка от тази област. След това се показва, че към тази област принадлежат и точките от ортогоналната траектория през A на фамилията $\varphi_k(X)=C$, които не лежат в G_k. Оттук се доказва теорема 9, а чрез нея — основната теорема, която изразява, че предложеният релаксационен метод води до точка от M.

6. НЯКОИ ПОМОЩНИ ТВЪРДЕНИЯ ЗА ЕВОЛВЕНТИТЕ НА ГЛАДКИ КРИВИ

Предварително ще бъдат дадени някои твърдения, известни от диференциалната геометрия (вж. например [6]), които ще се използват по-нататък.

Лема 2. Нека ϱ е изпъкнала дъга от гладка равнинна крива и има за краища точките A и B. Нека ъглите, които тангентите към кривата в краищата на дъгата сключват с хордата AB, не са по-големи от 90°. С D се означава средата на хордата AB. Тогава, ако кривината $\varkappa(X)$ е намаляваща функция, когато X се мени по дъгата от A към B, то единствената нормала на ϱ, която е перпендикулярна на хордата AB, пресича хордата в точка от отсечката AD.

Лема 3. Нека σ е гладка равнинна изпъкнала крива и A е точка от нея. С π се означава тази полуравнина, определена от допирателната към σ в A, която не съдържа σ. Тогава всяка дъга ϱ от еволвента на σ, която принадлежи на π и има за начало точката A, удовлетворява условието на лема 2.

Лема 4. Във всяка точка от дадена геодезична линия върху гладка повърхнина оскулачната равнина на геодезичната линия е перпендикулярна към допирателната равнина на повърхнината.

Лема 5. Ако еволютата е геометрично място на центровете на кривината на еволвентата, то еволвентата е равнинна линия.

Леми 4 и 5 са изказани в случая, когато разглежданията се правят в тримерното пространство. Вижда се обаче, че те могат непосредствено да се обобщят в E_n. Във всяка точка от гладка линия в E_n се определя координатна система на Френе, съставена от n вектора. Под оскулачна равнина на линията разбираме двумерната равнина, определена от векторите тангента и главна нормала. Имаме

Лема 4а. Във всяка точка от дадена геодезична линия върху гладка повърхнина в E_n оскулачната равнина на геодезичната линия е перпендикулярна към допирателната хиперравнина на повърхнината.

Лема 5а. Ако еволютата е геометрично място на центровете на кривината на еволвентата, то еволвентата е линия, разположена в двумерна равнина.

От леми 4а и 5а се получава

Лема 6. Еволвентата на геодезична линия на гладка повърхнина в E_n е линия, разположена в двумерна равнина.

Доказателство. Нека AB е дъга от геодезична линия върху повърхнината, AB' — нейната еволвента. Правата, която е тангента към геодезичната линия в точка B, е нормала към еволвентата в точка B'. От лема 4а се вижда, че тази тангента ще бъде главна нормала към еволвентата в B'. От лема 5а следва, че еволвентата е линия върху двумерна равнина.

Ако разглежданата гладка повърхнина е изпъкнала и A е точка на нея, с π се означава това полупространство на E_n, определено от допирателната хиперравнина към повърхнината в точка A, което не съдържа повърхнината. В сила е следната

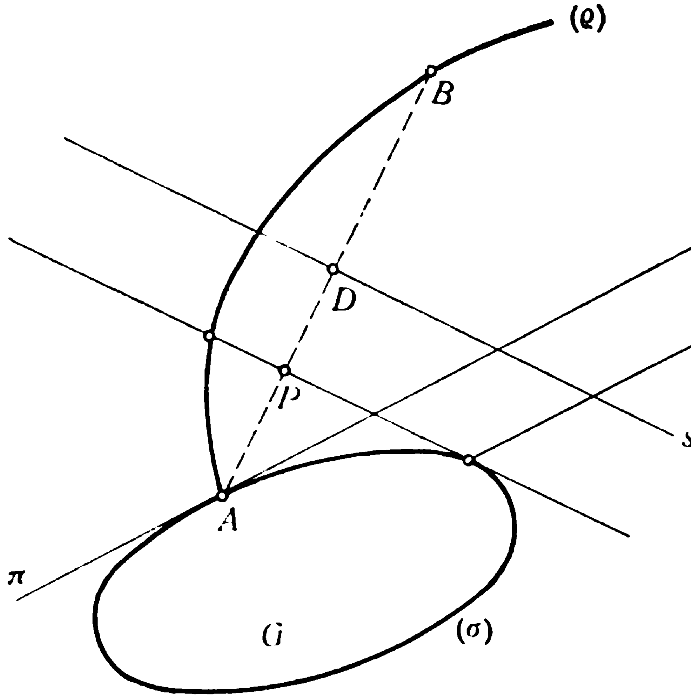
Лема 7. Нека γ е една геодезична линия на повърхнината, която минава през точката A. Тогава всяка дъга ϱ от еволвента на γ, която принадлежи на π и има за начало точката A, удовлетворява условието на лема 2.

7. ТЕОРЕМИ ЗА ОРТОГОНАЛНИТЕ ТРАЕКТОРИИ КЪМ ЛИНИИТЕ НА НИВО НА ФУНКЦИИ ОТ КЛАСА K_2

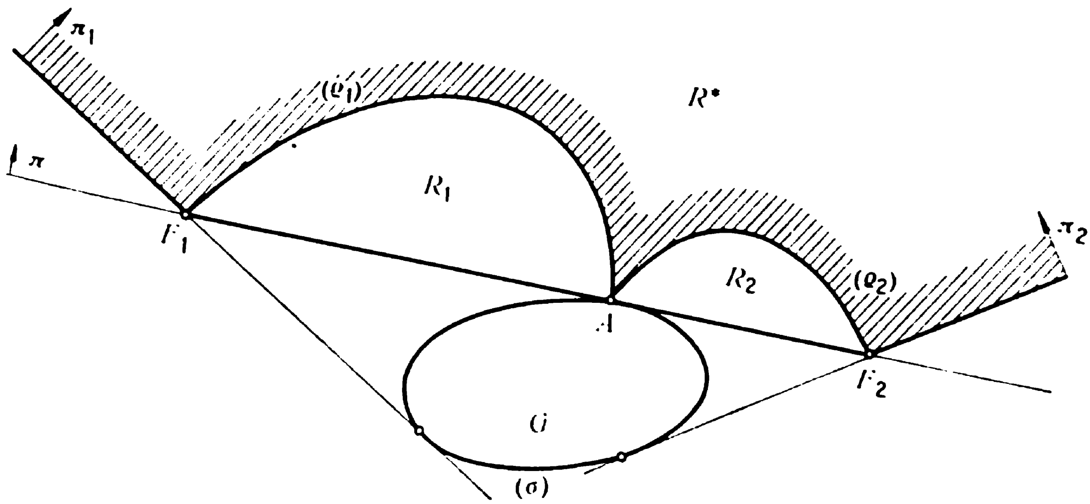
Дадена е функцията $q(X) \in K_2$. С G се означава областта, определена от неравенството $q(X) \leq 0$, а със σ — контурът на G. σ е гладка равнинна изпъкнала крива. Нека A е произволна точка от σ. С π се означава тази полуравнина, определена от допирателната към σ в точка A, която не съдържа σ. Нека ϱ е дъга от еволвента на σ, която има за начало точката A и принадлежи на π. Ще бъде доказана следната

Теорема 2. Точка A е по-близо до областта G, отколкото всяка точка B от ϱ.

Доказателство. С D се означава средата на хордата AB, където B е произволна точка от ϱ, а с s — симетралата на AB. От лема 3 и лема 2 следва, че единствената нормала към ϱ, която е перпендикулярна на хордата AB, пресича хордата в точка P от отсечката AD (фиг. 1). Тази



Фиг. 1



Фиг. 2

нормала е допирателна на σ и е успоредна на s. Тъй като σ е изпъкнала линия, а точка P е вътрешна за отсечката AD, s не може да има общи точки със σ. Симетралата s разделя E_2 на две полуравнини. Всяка точка от полуравнината, която съдържа точката A, е по-близо до A, отколкото до B. Тъй като σ няма общи точки с s, то G лежи изцяло в тази полуравнина, определена от s, която съдържа A. Следователно A е по-близо до всяка точка от G, отколкото B.

Сега ще установим някои твърдения за ортогоналната траектория към фамилията криви $\varphi(X)=C$, която минава през произволната, но фиксирана точка A. Нека ϱ_1 и ϱ_2 са дъгите от двете еволвенти на σ, които имат за начало точката A и краища съответните първи пресечни точки F_1 и F_2 на еволвентите с допирателната на σ в A (фиг. 2). Да означим с R_1 изпъкналата област, заградена от дъгата ϱ_1 и отсечката AF_1, а с R_2 — областта, заградена от ϱ_2 и AF_2. За нашите цели по-нататък ще бъде достатъчно да изследваме ортогоналната траектория не изцяло в E_2, а в областта R, определена по следния начин. Да означим, както и по-рано, с π тази полуравнина, определена от допирателната към σ в точка A, която не съдържа σ. Нека π_1 е тази полуравнина, определена от допирателната към σ, минаваща през F_1, която съдържа σ. Аналогично π_2 е полуравнината, определена от допирателната към σ, минаваща през F_2, която съдържа σ. Тогава с R означаваме сечението на тези три полуравнини.

При определянето на R съществено използваме, че G е изпъкнала област. Да отбележим още, че допирателната към σ, минаваща през F_1 (и различна от F_1A), е нормала към ϱ_1 в F_1, тъй като ϱ_1 е еволвента. Аналогична забележка се отнася и за допирателната през F_2. Вижда се още, че $R_1 \subset R$ и $R_2 \subset R$.

Ще докажем следната

Т е о р е м а 3. Тази дъга от ортогоналната траектория през A, която принадлежи на R, няма общи точки с R_1 и R_2 освен самата точка A.

Доказателство. Нека B е произволна точка от ϱ_1. Тогава векторът $\operatorname{grad}\varphi(B)$ ще бъде насочен в тази полуравнина, определена от допирателната към ϱ_1 в точката B, която не съдържа ϱ_1. Действително, ако допуснем противното, ще следва, че полуравнината, определена от правата през B, перпендикулярна на градиента, която съдържа вектора градиент, ще има общи точки с G (да припомним, че всяка нормала към ϱ_1 е допирателна към σ). Но тогава изпъкналата област, заградена от тази линия на ниво $\varphi(X)=C_0$, $C_0>0$, която минава през B, няма да съдържа всички точки от G. Полученото противоречие показва, че в произволна точка от ϱ_1 векторът $\operatorname{grad}\varphi$ е насочена в онази полуравнина, определена от допирателната към ϱ_1 в тази точка, която не съдържа ϱ_1. Единствено в точка A векторът $\operatorname{grad}\varphi(A)$ е насочен по допирателната към ϱ_1. Следователно дъгата от ортогоналната траектория към линиите на ниво $\varphi(X)=C$, $C\geqq 0$, която минава през A и принадлежи на R, няма общи точки с R_1 освен самата точка A. Аналогичен извод следва и за R_2.

Ако означим с R^* областта (защрихована на фиг. 2), която се състои от тези точки на R, които не принадлежат на R_1 или R_2, теорема 3 може да се изкаже така: Дъгата от ортогоналната траектория през A, която се намира в R, принадлежи изцяло на R^* (освен самата точка A).

В сила е следната

Т е о р е м а 4. Нека B е произволна точка от дъгата на ортогоналната траектория през A, която принадлежи на R. Тогава A е по-близо до областта G, отколкото B.

Доказателство. От казаното по-горе се вижда, че $B \in R^*$. Нека B_0 е чебишевската точка на най-добро приближение на B в G (проекцията на B върху G). Полуравнините π_1 и π_2 имат за контурни прави допирателни към σ. От теорема 3 следва, че отсечката BB_0 ще пресича някоя от дъгите ϱ_1 и ϱ_2. Да означим пресечната точка с B_1.

Точката B_1 е по-близо до G, отколкото B. Верността на това твърдение се установява, както следва. Отсечката BB_0 е перпендикулярна на допирателната към σ в B_0. B_1 е точка от тази отсечка. Следователно симетралата на BB_1 е успоредна на допирателната към σ в B_0. Тъй като G е изпъкнала област, тази симетрала никъде не я пресича. G изцяло принадлежи на тази полуравнина, определена от симетралата, която съдържа B_1. Оттук следва, че B_1 е по-близо до G, отколкото B.

За точките A и B_1 се прилага теорема 2. Получава се: A е по-близо до G, отколкото B_1 Като се има пред вид, че релацията „по-близо до G, отколкото" е транзитивна, заключава се, че A е по-близо до G, отколкото B. С това доказателството на теорема 4 завършва.

При доказването на теореми 3 и 4 се разглеждаше само тази дъга от ортогоналната траектория през A, която принадлежи на R. Сега ще бъде установено следното по-общо твърдение, в което не участвува въведената област R.

Т е о р е м а 5. Ако A е произволна точка от контура на G, то A е по-близо до G, отколкото всяка точка B $(B \overline{\in} G)$ от ортогоналната траектория през A на фамилията $\varphi(X) = C$.

Доказателство. Разглежда се ортогоналната траектория през A. Образува се областта R по начина, указан в текста преди теорема 3. Ако дъгата AB от ортогоналната траектория принадлежи изцяло на R, теорема 5 следва непосредствено от теорема 4. Ако обаче дъгата не принадлежи изцяло на R, намира се точка B_1 от контура на R такава, че дъгата AB_1 лежи в R. От теорема 3 следва, че B_1 се намира на контура на π_1 или π_2. За точките A и B_1 се прилага теорема 4: A е по-близо до G, отколкото B_1.

Сега се разглежда изпъкналата област G^1, определена от неравенството $\varphi(X) \leq C_1$, където $\varphi(X) = C_1$, $C_1 > 0$, е линията на ниво, която минава през B_1. За G^1 се образува аналогична област R^1 и се определя точка B_2, ако дъгата B_1B не принадлежи изцяло на новата област R^1. Прилагайки пак теорема 4, се получава: B_1 е по-близо до G^1, отколкото B_2.

Дъгата от ортогоналната траектория AB има крайна дължина. Също така и отделните дъги AB_1, $B_1B_2, \ldots$ имат дължина, която не може да става произволно малка, тъй като съответните области R^i зависят само от изпъкналите области G, G^1, $G^2, \ldots$ и избора на точките върху контурите им. Следователно редицата от точки

$$A,\ B_1,\ B_2, \ldots$$

е крайна и завършва с точка B_s такава, че дъгата B_sB лежи в съответната област R^s, определена за точката B_s на контура на G^s.

Получава се:

$$A \text{ е по-близо до } G, \text{ отколкото } B_1;$$

$$B_1 \text{ е по-близо до } G^1, \text{ отколкото } B_2;$$

$$\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot$$

$$B_s \text{ е по-близо до } G^s, \text{ отколкото } B.$$

Тъй като $G \subset G^1 \subset G^2 \subset \cdots \subset G^s$, то

$$A \text{ е по-близо до } G, \text{ отколкото } B_1;$$
$$B_1 \text{ е по-близо до } G, \text{ отколкото } B_2;$$
$$B_s \text{ е по-близо до } G, \text{ отколкото } B,$$

откъдето въз основа на транзитивността на релацията „по-близо до G, отколкото" се заключава, че A е по-близо до G, отколкото B.

Като се има пред вид теорема 5 и определение 2, може да се получи следното

Следствие. Ако

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

е редица от точки върху ортогоналната траектория през A такава, че $Y_1 \notin G$ и всеки неин член Y_i лежи на дъгата $Y_{i-1}A$ от траекторията, то редицата е фейерова относно G.

8. ТЕОРЕМИ ЗА ОРТОГОНАЛНИТЕ ТРАЕКТОРИИ КЪМ ПОВЪРХНИНИТЕ НА НИВО НА ФУНКЦИИ ОТ КЛАСА K_n

Доказаните теореми в т. 7 ще бъдат обобщени за функции, които принадлежат на класа K_n.

Нека $\varphi(X) \in K_n$. Отново с G се означава областта, определена от неравенството $\varphi(X) \leq 0$, а със σ — контурът на G. σ е гладка изпъкнала повърхнина в E_n. Нека A е произволна точка от σ. С π се означава това полупространство на E_n, определено от допирателната хиперравнина към σ в точка A, което не съдържа σ.

Ще бъде доказана следната

Теорема 6. Нека γ е една геодезична линия на σ, която минава през A, а ϱ е дъга от еволвента на γ, която има за начало точката A и принадлежи на π. Тогава A е по-близо до областта G, отколкото всяка точка B от ϱ.

Доказателство. Нека B е произволна точка от ϱ. С D се означава средата на отсечката AB, а с s — нейната симетрална $n-1$-мерна хиперравнина. От лема 6 е известно, че ϱ е дъга от линия, разположена в двумерна равнина. Сега ще бъдат използвани лема 7 и лема 2. В двумерната равнина на ϱ има единствена нормала към ϱ, която е перпендикулярна на хордата AB и пресича хордата в точка P от отсечката AD. Разглежда се $n-1$-мерната хиперравнина, която минава през тази единствена нормала към ϱ и е перпендикулярна към равнината на ϱ. Тъй като ϱ е равнинна крива, тази хиперравнина е нормална на ϱ и следователно е допирателна на σ. От друга страна, тя е успоредна на s, понеже е перпендикулярна на AB. Получава се следното: в E_n имаме изпъкналата област G, допирателна хиперравнина на G и една друга хиперравнина s, която е успоредна на допирателната. Тъй като $A \notin G$, отсечката AB е перпендикулярна на тези хиперравнини, които я секат в точките P и D, а P е вътрешна точка на отсечката AD, то s няма общи точки с G. Но s разделя E_n на две полупространства: в едното се намира областта G заедно с точка A, а в другото — точка B. Понеже s е симетрална хиперравнина на A и B, то A е по-близо до всяка точка на G, отколкото B, откъдето следва верността на теоремата.

По-нататък ще бъдат установени някои твърдения за ортогоналната траектория към фамилията повърхнини $\varphi(X)=C$, която минава през точка A. За тази цел се разглежда една произволна геодезична линия γ, която минава през A. Нека ϱ_1 и ϱ_2 са дъгите от двете равнинни еволвенти на γ, които имат за начало точката A и краища съответните първи пресечни точки F_1 и F_2 на еволвентите с допирателната хиперравнина на σ в A. Нека γ се мени в множеството от всички геодезични линии на σ през A. Не е трудно да се види, че дъгите ϱ_1 и ϱ_2 от съответните еволвенти представляват линии от една повърхнина Γ. Затворената област, която Γ определя в π, се означава с R_1.

Нека с π_1 е означено това полупространство на E_n, определено от нормалната $n-1$-мерна хиперравнина на ϱ_1 в точка F_1, което съдържа G, а с π_2 — съответното полупространство, определено от нормалната $n-1$-мерна хиперравнина към ϱ_2 в точка F_2. Когато γ описва множеството от всички геодезични линии на σ през A, сечението на всички полупространства, съответни на π_1 и π_2, и на полупространството π представлява една изпъкнала област в E_n, която пак ще бъде означена с R. Вижда се, че $R_1 \subset R$.

По този начин се прави една конструкция за областите R_1 и R в пространството E_n. Тя точно съответствува на конструкцията в двумерното пространство, която предхожда теорема 3.

Теорема 7. Тази дъга от ортогоналната траектория през A, която принадлежи на R, няма общи точки с R_1 освен самата точка A.

Доказателството на теоремата се извършва по същия начин, както в теорема 3, затова само ще го набележим. Нека R^* е областта, съставена от тези точки на R, които не принадлежат на R_1. Ако B е произволна точка от Γ, първо се доказва, че векторът $\operatorname{grad}\varphi(B)$ е насочен към R^*. Използва се твърдението, че нормалната хиперравнина на вектора градиент в B не трябва да има общи точки с G поради изпъкналостта на $\varphi(X)$ в E_n. Оттук се получава, че единствената точка от дъгата на ортогоналната траектория през A, която принадлежи на R_1, е самата точка A. Освен нея всички други точки от дъгата принадлежат на R^*.

Следната теорема е аналогична на теорема 4:

Теорема 8. Нека B е произволна точка от дъгата на ортогоналната траектория през A, която принадлежи на R. Тогава A е по-близо до областта G, отколкото B.

Доказателство. От теорема 7 следва, че $B \in R^*$. Нека B_0 е чебишевската точка на най-добро приближение на B в G (проекцията на B върху G). Отсечката BB_0 не може да пресича тази част от контура на R^*, която е и контура на R, тъй като тази част е праволинейна повърхнина, съставена от допирателни към G. Следователно BB_0 пресича Γ в точка B_1. Тогава съществува геодезична линия γ_1 на σ през A, така че нейната еволвента ϱ_1 през A минава през B_1. От теорема 6 следва, че A е по-близо до G, отколкото B_1.

Отсечката BB_0 (а също и BB_1) лежи на права, която е перпендикулярна към допирателната хиперравнина на σ в B_0. Следователно симетралната хиперравнина на BB_1 е успоредна на допирателната хиперравнина на σ в B_0. От изпъкналостта на G следва, че B_1 е по-близо до G, отколкото B. Тогава и A е по-близо до G, отколкото B.

Нашата цел е да получим следното важно твърдение:

Теорема 9. Ако A е произволна точка от контура на G, то A е по-близо до G, отколкото всяка точка B, $B \bar{\in} G$, от ортогоналната траектория през A на фамилията $\varphi(X) = C$.

Доказателството на теорема 9 се получава от теоремите 7 и 8 по същия начин, както доказателството на теорема 5 се получаваше от теореми 3 и 4. Теорема 9 ще бъде използвана по-нататък при доказателството на основната теорема.

Следствие. Ако

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

е редица от точки върху ортогоналната траектория през A такава, че $Y_1 \bar{\in} G$ и всеки неин член Y_l лежи на дъгата $Y_{l-1}A$ от траекторията, то редицата е фейерова относно G.

9. СХОДИМОСТ НА РЕЛАКСАЦИОННИЯ МЕТОД

Да се върнем на изложения в т. 5 релаксационен метод. Следната основна теорема ни гарантира, че редицата (16) води до точка от M:

Основна теорема. Редицата (16) или е крайна (и завършва с точка от M), или е безкрайна, но сходяща и има за граница точка от M.

Доказателство. Ако редицата е крайна, теоремата очевидно е вярна. Нека (16) е безкрайна редица от точки. Първо ще бъде доказано, че тя е фейерова относно M.

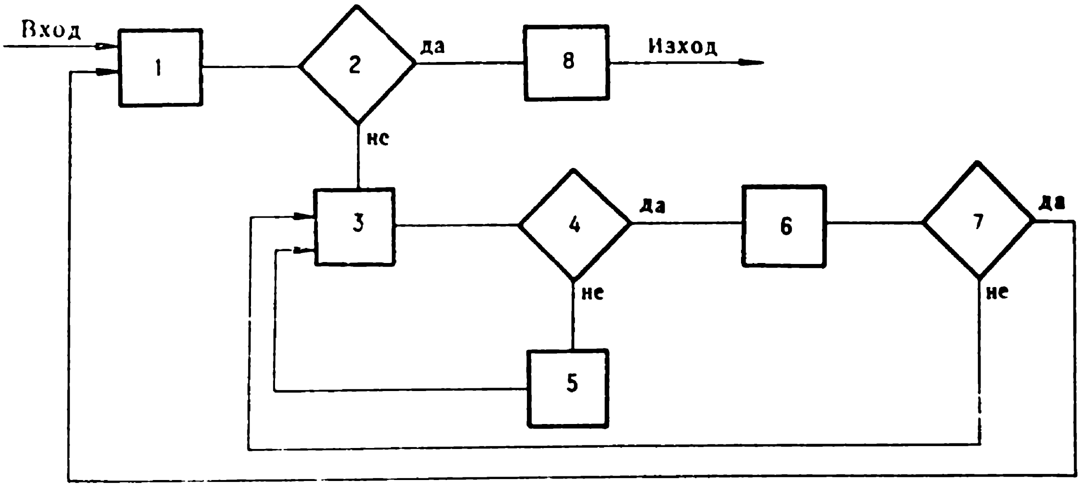
Действително, нека X_j е произволен член на редицата. Следващият член X_{j+1} е точка, която се намира на контура на G_s. В тази част от доказателството не е необходимо да се използва, че $\varphi_s(X_j) = d(X_j)$. Достатъчно е само, че $X_j \bar{\in} G_s$, а X_{j+1} е пресечна точка на контура на G_s с ортогоналната траектория на фамилията $\varphi_s(X) = C$, която минава през X_j. Но за точките X_{j+1} и X_j може да се приложи теорема 9. От нея следва, че X_{j+1} е по-близо до G_s, отколкото X_j.

Но $M = \bigcap_k G_k$ и следователно $M \subset G_s$. Тогава се получава, че X_{j+1} е по-близо до M, отколкото X_j. Тъй като X_j беше един произволно избран член от редицата (16), то от определение 2 следва, че тази редица е фейерова относно M. От следствието към лема 1 се получава, че редицата е сходяща. Остава да се покаже, че нейната граница X^* е точка от M. Доказателството на това твърдение се извършва с допускане на противното и протича както в теорема 1.

Разгледаният релаксационен метод представлява обобщение в нелинейния случай на метода от т. 4. По този начин той се явява обобщение с известна модификация на релаксационния метод на Агмон.

10. НЯКОИ ЗАБЕЛЕЖКИ ОТНОСНО ПРАКТИЧЕСКОТО ИЗПОЛЗВАНЕ НА МЕТОДА И РЕАЛИЗИРАНЕТО МУ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ С ЕЛЕКТРОННИ СМЕТАЧНИ МАШИНИ

По същество предложеният релаксационен метод е един итерационен градиентен метод с голяма стъпка. Всяка итерация представлява намиране на точка X_{j+1} от редицата (16) от точка X_j. Голямата стъпка от X_j до



Фиг. 3

X_{j+1} по дъгата на ортогоналната траектория може да се извърши чрез известен брой малки стъпки по градиента на избраната функция. Дължината на стъпката по градиента зависи от самата функция и от точността, с която се иска да бъдат получени резултатите. При използване на електронни сметачни машини е удобно да се извършва автоматичен избор на стъпката чрез двойно пресмятане (с цяла и с половин стъпка).

В Изчислителния център при Математическия институт на БАН е направена стандартна програма за електронната сметачна машина „Минск-2" за решаване на системи от нелинейни неравенства чрез предложения релаксационен метод.

Алгоритъмът, който се използва в програмата, е следният.

Нека е дадена точката X_j и числата ε_1, ε_2 и λ_j.

1) Пресмятаме

$$\varphi_l = \max_k \{\varphi_k(X_j)\}.$$

2) Проверка на условието $\varphi_l(X_j) < \varepsilon_1$. Ако ДА — преминаваме към 8). Ако НЕ — продължаваме с 3).

3) Пресмятаме

а) $\operatorname{grad} \varphi_l(X_j)$;

б) $X_j' = X_j + \lambda_j \operatorname{grad} \varphi_l(X_j)$;

в) $X_j'' = X_j + 2\lambda_j \operatorname{grad} \varphi_l(X_j)$;

г) $\operatorname{grad} \varphi_l(X_j')$;

д) $X_j''' = X_j' + \lambda_j \operatorname{grad} \varphi_l(X_j')$.

4) Проверка на условието $X_j'' - X_j''' < \varepsilon_2$. Ако ДА — преминаваме към 6). Ако НЕ — продължаваме с 5).

5) Заместваме λ_j с $\frac{1}{2}\lambda_j$. Преминаваме към 3).

6) Заместваме λ_j с $\lambda_{j+1} = 2\lambda_j$ и X_j с $X_{j+1} = X_j'''$

7) Проверка на условието $\varphi_i(X_{j+1}) < \varepsilon_1$. Ако ДА — преминаваме към 1). Ако НЕ — преминаваме към 3).

8) Печат на X_j и $\varphi_k(X_j)$. Край.

Блок-схемата на алгоритъма е дадена на фиг. 3.

Самата програма съдържа освен блоковете на горния алгоритъм и някои други блокове, отнасящи се до обръщенията към нестандартните части за пресмятане на стойностите на функциите $\varphi_k(X_j)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и техните частни производни.

При използване на програмата се въвеждат числата:

m (брой на неравенствата; $1 \leq m \leq 16$);
n (брой на неизвестните; $1 \leq n \leq 16$);
ε_1 $(\varepsilon_1 > 0)$;
ε_2 $(\varepsilon_2 > 0)$;
λ_0 $(\lambda_0 < 0)$.

Въвеждат се още началната точка X_0, входовете към нестандартните части и самите нестандартни части.

С тази програма бяха решени известен брой примери, които показаха ефективността на предложения релаксационен метод. Обемът на задачата може да се увеличи значително с използване на външна памет.

Едно кратко изложение на идеите на метода е дадено в [7]. Даденият метод за решаване на системи от нелинейни неравенства може да се приложи и за решаване на задачи от нелинейното програмиране [8].

Авторите считат за свой дълг да изкажат благодарност на Бл. Сендов за направените забележки и вниманието, проявено към настоящата работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agmon, S. The relaxation method for linear inequalities. Canadian Journal of Mathematics, **6** (1954), No. 3, 382—392.
2. Motzkin, T. S., I. I. Schoenberg. The relaxation method for linear inequalities. Canadian Journal of Mathematics, 6 (1954), No. 3, 393—404.
3. Еремин, И. И. Обобщение релаксационного метода Моцкина — Агмона. Успехи матем. наук, т. **20** (1965), вып. 2, 183—187.
4. Еремин, И. И. Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях. Доклады АН СССР, **160** (1965), № 5, 994—996.
5. Брэгман, Л. М. Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования. Доклады АН СССР, **162** (1965), № 3, 487—490.
6. Выгодский, М. Я. Дифференциальная геометрия. Москва, 1949.
7. Германов, М. А., В. С. Спиридонов. Об одном методе решения систем нелинейных неравенств. Журнал вычислительной математики и математической физики, **6** (1966), № 2, 359—360.
8. Spiridonov, V., M. Germanov. A gradient method in nonlinear programming. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **19** (1966), No. 8, 697—700.

Постъпила на 10. III. 1966 г.

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Милчо Германов и Веселин Спиридонов

Резюме

Рассматривается следующая задача:

Пусть E_n n-мерное евклидовое пространство. Через K_n обозначается класс всех функций, которые определены в E_n, имеют непрерывные первые частные производные и являются выпуклыми функциями в E_n.

Требуется найти одно решение системы

(1) $$\varphi_k(X) \leq 0, \quad k=1, 2, \ldots, m,$$

в случае, когда $\varphi_k(X) \in K_n$, $k=1, 2, \ldots, m$, а выпуклая область $M \subset E_n$, которая определена системой, не вырождается в области $n-1$-мерного пространства.

Предлагается следующий релаксационный метод.

Пусть X_0 произвольная точка E_n. Тогда составляется последовательность

(16) $$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$$

следующим образом:

а) Если $X_j \in M$, то последовательность (16) конечна и X_j ее последний член.

б) Если $X_j \bar{\in} M$, находится такая функция $\varphi_l(X)$, что $\varphi_l(X_j) = \max_k \{\varphi_k(X_j)\}$. Через G_l обозначается выпуклая область, которая определена неравенством $\varphi_l(X) \leq 0$. Тогда X_{j+1} представляет точку пересечения контура G_l с ортогональной траекторией фамилии $\varphi_l(X)=C$, которая проходит через X_j.

Доказывается, что последовательность (16) или конечна (и заканчивается точкой из M), или бесконечна, но сходяща и ее граница точка из M. В ходе доказательства применяются свойства фейеровских последовательностей и устанавливаются некоторые утверждения об ортогональных траекториях к поверхностям уровня выпуклых функций.

Этот метод запрограммирован на электронной вычислительной машине „Минск-2“. Сделанные вычисления показывают его эффективность. В работе даны алгоритм программы и его блок-схемы.

A RELAXATION METHOD FOR SOLUTION OF SYSTEMS OF NON-LINEAR INEQUALITIES

Milčo Germanov and Veselin Spiridonov

Summary

The article treats the following problem:

Let E_n be the n-dimensional Euclidean space. K_n is used to denote the class of all functions defined in E_n which possess continuous first partial derivatives and are convex in E_n.

Required is a solution of the system

(1) $$\varphi_k(X) \leqq 0, \quad k=1, 2, \ldots, m,$$

in the case when $\varphi_k(X) \in K_n$, $k=1, 2, \ldots, m$, and the convex region $M \subset E_n$ defined by the system does not degenerate into a region of an $n-1$-dimensional space.

The following relaxation method is applied.

Let X_0 be an arbitraty point from E_n. The sequence is formed

(16) $$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$$

in the following manner:

a) If $X_j \in M$, then the sequence (16) is a finite one and X_j is its last member;

b) If $X_j \notin M$, then we find such a function $\varphi_l(X)$ that $\varphi_l(X_j) = \max_k \{\varphi_k(X_j)\}$. G_l let be the convex region defined by the inequality $\varphi_l(X) \leqq 0$. Then X_{j+1} is the point of intersection of the contour G_l and the orthogonal trajectory of the family $\varphi_l(X) = C$ passing through X_j.

It is proved that the sequence (16) is either a finite one and ends at a point of M, or is convergent infinite and has a point of M as its limit. The proof makes use of Fejér's point sequences. It is possible to make certain assertions about the orthogonal trajectories of the level surfaces of convex functions.

The method described has been programmed for the electronic computer Minsk-2, and the calculations carried out have demonstrated its efficacy. The paper also gives the algorithm of the programme and its block-diagram.