БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ НА ЕДНА АВТОНОМНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ПРИ КРАТНИ КОРЕНИ НА ФУНДАМЕНТАЛНОТО УРАВНЕНИЕ

Георги Брадистилов, Георги Бояджиев и Владимир Лубих

В [1] се разглежда директно въпросът за съществуването на периодични решения на автономната система диференциални уравнения

$$A\ddot{x}+Bx=\lambda f(x,\dot{x},\lambda), \tag{1}$$

в която $A=(a_{\nu k})$ и $B=(b_{\nu k})$ са матрици от n-ти ред, а $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $f=(f_1,\dots,f_n)$ са вектори. Векторът f е аналитична функция на x, $\dot{x}$ и малкия параметър λ в област G на пространството $(x,\dot{x},\lambda)$, съдържаща $(x^0,\dot{x}^0,0)$, където $x^0(t)$ е решение на пораждащата система

$$A\ddot{x}+Bx=0, \tag{2}$$

която се получава от (1) при $\lambda=0$.

Към системата (1) водят различни физични проблеми, например самовъзбуждане на автогенератори.

Резултатите в [1] са получени при предположение, че фундаменталното уравнение

$$\det(Ar^2+B)=0 \tag{3}$$

има само чисто имагинерни корени $r_\nu=\pm i\varrho_\nu$, $\nu=1,\dots,n$, като нито един корен не е кратен на кой да е от останалите.

Ако например два корена на фундаменталното уравнение са кратни помежду си, $\varrho_2=k\varrho_1$, k цяло, $k\neq 1$, то функционалната детерминанта Φ от [1] е равна на нула и доказателството за съществуване на периодични решения на (1), отговарящи на корена $i\varrho_1$, престава да съществува.

В настоящата работа ще докажем съществуването на периодични решения на системата (1) за този случай, като ще използваме метода на Поанкаре и работи [1], [2], [3], [4].

Общият интеграл на пораждащата система (2) е

$$\overline{x}_\nu^0(t)=\sum_{\mu=1}^{n} l_{\nu\mu}(E_\mu\cos\varrho_\mu t+D_\mu\sin\varrho_\mu t),\quad \nu=1,\dots,n, \tag{4}$$

където

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{\nu k}\varrho_{\mu}^{2} - b_{\nu k})\, l_{k\mu} = 0, \quad \nu, \mu = 1, \ldots, n, \quad \Delta = \det(l_{k\mu}) \neq 0,$$

а E_μ и D_μ, $\mu = 1, \ldots, n$, са произволни константи.

Разглеждаме частния интеграл на (2)

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_\nu^0(t) &= l_{\nu 1}(N\cos\varrho_1 t + P\sin\varrho_1 t) + l_{\nu 2}M\cos k\varrho_1 t, \\ \dot{x}_\nu^0(t) &= l_{\nu 1}(-N\sin\varrho_1 t + P\cos\varrho_1 t)\varrho_1 - l_{\nu 2}Mk\varrho_1\sin k\varrho_1 t \end{aligned}$$

с период $2\pi/\varrho_1$ и начални стойности

$$x_\nu^0(0) = Nl_{\nu 1} + Ml_{\nu 2}, \qquad \dot{x}_\nu^0(0) = P\varrho_1 l_{\nu 1},$$

където N, M и P са константи, за които ще покажем, че могат да се определят така, щото системата (1) да има периодично решение, което при $\lambda = 0$ да се редуцира на (5).

Интегралът на системата (1) с видоизменени начални условия

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_\nu(0) &= Nl_{\nu 1} + Ml_{\nu 2} + \sum_{\mu=1}^{n} l_{\nu\mu}a_\mu, \\ \dot{x}_\nu(0) &= P\varrho_1 l_{\nu 1} + \sum_{\mu=2}^{n} l_{\nu\mu}\varrho_\mu\beta_\mu, \quad \nu = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

за достатъчно малки стойности на $\lambda, a_1, \ldots, a_n, \beta_2, \ldots, \beta_n$ се представя със степенни редове от вида

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_\nu(t) &= x_\nu^0(t) + \sum_{\mu=1}^{n} P_{\nu\mu}(t)a_\mu + \sum_{\mu=2}^{n} Q_{\nu\mu}(t)\beta_\mu + \lambda F_\nu(t) \\ &+ \lambda\left\{\sum_{\mu=1}^{n} G_{\nu\mu}(t)a_\mu + \sum_{\mu=2}^{n} H_{\nu\mu}(t)\beta_\mu + \lambda K_\nu(t) + \cdots\right\}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

където $P_{\nu\mu}, Q_{\nu\mu}, F_\nu, G_{\nu\mu}, H_{\nu\mu}, K_\nu$ са непознати функции на t, които въз основа на (6) добиват следните начални стойности:

$$(8)\qquad \begin{aligned} & P_{\nu\mu}(0) = l_{\nu\mu}, \ \dot{P}_{\nu\mu}(0) = 0, \ Q_{\nu\mu}(0) = 0, \ \dot{Q}_{\nu\mu}(0) = l_{\nu\mu}\varrho_\mu, \\ & F_\nu(0) = \dot{F}_\nu(0) = G_{\nu\mu}(0) = \dot{G}_{\nu\mu}(0) = H_{\nu\mu}(0) = \dot{H}_{\nu\mu}(0) = K_\nu(0) = \dot{K}_\nu(0) = 0. \end{aligned}$$

Като заместим интегралите (7) в (1) и сравним коефициентите пред еднаквите степени на $a_\mu, \beta_\mu, \lambda, \lambda a_\mu, \lambda\beta_\mu, \lambda^2$, ще получим за непознатите функции $P_{\nu\mu}, Q_{\nu\mu}, F_\nu, G_{\nu\mu}, H_{\nu\mu}, k_\nu$ линейни системи диференциални уравнения

$$(9)\qquad A\ddot{y} + By = \varphi(t), \quad \varphi(t) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

където $\varphi_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, n$, за тези функции са съответно равни на

$$(10)\qquad \varphi_\nu^{P_\mu}(t) = 0, \quad \varphi_\nu^{Q_\mu}(t) = 0,$$

$$(11)\qquad \varphi^F_\nu(t)=f_\nu(x^0, \dot{x}^0, 0),$$

$$(12)\qquad \varphi^{G_\mu}_\nu(t)=\sum_{k=1}^n P_{k\mu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k^0}+\sum_{k=1}^n \dot{P}_{k\mu}\frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}_k^0},\ \mu=1,\dots,n,$$

$$(13)\qquad \varphi^{H_\mu}_\nu(t)=\sum_{k=1}^n Q_{k\mu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k^0}+\sum_{k=1}^n \dot{Q}_{k\mu}\frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}_k^0},\ \nu=1,\dots,n.$$

При начални условия (8) непосредствено намираме функциите $P_{\nu\mu}$ и $Q_{\nu\mu}$:

$$(14)\qquad \begin{aligned} P_{\nu\mu}(t)&=l_{\nu\mu}\cos\varrho_\mu t,\ \mu=1,\dots n,\\ Q_{\nu\mu}(t)&=l_{\nu\mu}\sin\varrho_\mu t,\ \mu=2,\dots n.\end{aligned}$$

Функциите F_ν, $G_{\nu\mu}$ и $H_{\nu\mu}$ ще се получат като частни интеграли на системата (9) с начални условия $y(0)=\dot{y}(0)=0$ и при съответни десни страни, които се дават с (11), (12) и (13). За да намерим частния интеграл на (9), ще използваме метода на вариране на константите. Този интеграл ще бъде от вида (4), където производните на $E_\mu(t)$ и $D_\mu(t)$, $\mu=1,\dots,n$, удовлетворяват системата уравнения

$$\sum_{\mu=1}^n l_{\nu\mu}(\dot{E}_\mu\cos\varrho_\mu t+\dot{D}_\mu\sin\varrho_\mu t)=0,$$

$$\sum_{\mu=1}^n \varrho_\mu \bar{l}_{\nu\mu}(-\dot{E}_\mu\sin\varrho_\mu t+\dot{D}_\mu\cos\varrho_\mu t)=\varphi_\nu(t),\quad \sum_{k=1}^n a_{\nu k}l_{k\mu}=\bar{l}_{\nu\mu}.$$

След известни пресмятания се получава

$$(15)\qquad y_\nu=\frac{1}{\Delta|A|}\int_0^t\sum_{\mu=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{l_{\nu\mu}}{\varrho_\mu}\bar{\Delta}_{i\mu}\varphi_i(u)\sin\varrho_\mu(t-u)\,du,$$

където $\bar{\Delta}_{i\mu}$ е адюнгираното количество на елемента $\bar{l}_{i\mu}$ в детерминантата $\bar{\Delta}=\det(\bar{l}_{i\mu})=\Delta\,.\,|A|$.

Интегралът (7) е периодична функция и притежава за достатъчно малки стойности на $|\lambda|$, $|a_\mu|$ $(\mu=1,\dots,n)$, $|\beta_\mu|$ $(\mu=2,\dots,n)$ видоизменен период $\frac{2\pi+2\delta}{\varrho_1}$ на периода $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ на интеграла на пораждащата система, ако

$$(16)\qquad [x]\equiv x\left(\frac{2\pi+2\delta}{\varrho_1}\right)-x(0)=0,\ [\dot{x}]\equiv\dot{x}\left(\frac{2\pi+2\delta}{\varrho_1}\right)-\dot{x}(0)=0.$$

Като вземем пред вид (14), системата (16) добива вида

$$[x]\equiv\sum_{\mu=3}^n a_\mu l_{\nu\mu}(\cos 2\Omega_\mu-1)+\sum_{\mu=3}^n l_{\nu\mu}\beta_\mu\sin 2\Omega_\mu+\lambda[F_\nu]$$

$$+\lambda\left\{\sum_{\mu=1}^n[G_{\nu\mu}]a_\mu+\sum_{\mu=2}^n[H_{\nu\mu}]\beta_\mu+[K_\nu]\lambda\right\}+\psi_\nu=0,$$

$$(17) \qquad [\dot{x}] \equiv -2l_{\nu 1}\varrho_1 N\delta - 2l_{\nu 2}\varrho_1 k^2 M\delta - \sum_{\mu=1}^{n} l_{\nu\mu}\varrho_\mu \sin 2\Omega_\mu \alpha_\mu$$

$$\sum_{\mu=2}^{n} l_{\nu\mu}\varrho_\mu(\cos 2\Omega_\mu - 1)\beta_\mu + \lambda[\dot{F}_\nu]$$

$$+\lambda\left\{\sum_{\mu=1}^{n}[\dot{G}_{\nu\mu}]\alpha_\mu + \sum_{\mu=2}^{n}[\dot{H}_{\nu\mu}]\beta_\mu + \lambda[\dot{K}_\nu]\right\} + \psi_\nu = 0,$$

където $\Omega_\mu = \pi\varrho_\mu/\varrho_1$, а ψ_ν и $\bar{\psi}_\nu$ представляват степенни развития по λ, δ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_2, \ldots, \beta_n$. Онези членове в ψ_ν и ψ_0, които не съдържат фактора λ, са най-малко от втори ред относно δ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_2, \ldots, \beta_n$.

Функционалната детерминанта ψ на функциите $[x]$ и $[\dot{x}]$ относно δ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ при $\lambda = \delta = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$ съдържа три стълба с елементи нула (именно стълбовете, които отговарят на частните производни относно $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$). С това се обяснява и нашият избор на решението (5) на пораждащата система, зависещо от трите параметъра M, N и P.

Ръководени от същите съображения, да разгледаме $2n-3$ уравнения от системата (17), например като изоставим първото, второто и $(n+1)$-вото.

Функционалната детерминанта на левите им страни относно $\delta, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, $\beta_3, \ldots, \beta_n$ при $\lambda = \delta = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$ е

$$(18) \qquad \frac{D([x_3], \ldots, [x_n], [\dot{x}_2], \ldots, [\dot{x}_n])}{D(\delta, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \beta_3, \ldots, \beta_n)}$$

$$= (-1)^{n-1} 2^{2n-3} \varrho_1 \prod_{i=3}^{n} \varrho_i \sin^2 \Omega_i \begin{vmatrix} l_{33} & \ldots & l_{3n} \\ \cdot & & \cdot \\ l_{n3} & \ldots & l_{nn} \end{vmatrix} (N\Delta_{12} + Mk^2\Delta_{11}),$$

където Δ_{ik} е поддетерминантата на елемента l_{ik} в детерминантата Δ.

Като изключим баналния случай $M = N = 0$, детерминантата (18) е различна от нула. Наистина, ако

$$\begin{vmatrix} l_{33} & \ldots & l_{3n} \\ & & \\ l_{n3} & \ldots & l_{nn} \end{vmatrix}$$

е нула, ще изоставим други две уравнения измежду първите n от (17), което ще доведе до детерминанта, образувана от същите стълбове на Δ, но от други редове. Невъзможно е всички детерминанти от този вид да са нули, понеже това би довело до $\Delta = 0$. Ако

$$N\Delta_{12} + Mk^2\Delta_{11} = 0,$$

ще изоставим друго уравнение (а не първото) измежду последните n уравнения на (17). Невъзможно е за всеки индекс i да е в сила

$$N\Delta_{i2} + Mk^2\Delta_{i1} = 0,$$

тъй като от пропорционалността на адюнгираните количества на два успоредни стълба би следвало отново $\Delta = 0$. Най-сетне

$$\prod_{l=3}^{n} \varrho_l \sin^2 \Omega_l \neq 0,$$

тъй като е предположено, че няма други корени, кратни на ϱ_1, освен ϱ_2.

След като детерминантата (18) е различна от нула, можем от избраните $2n-3$ уравнения да определим $\delta, a_3, \ldots, a_n, \beta_3, \ldots, \beta_n$ като аналитични функции на $\lambda, a_1, a_2, \beta_2$, които при $\lambda=a_1=a_2=\beta_2=0$ се анулират:

$$\begin{aligned} &\delta=\delta_1\lambda+\delta_2\lambda a_1+\delta_3\lambda a_2+\delta_4\lambda\beta_2+\delta_5\lambda^2+\cdots, \\ (19)\qquad &a_\mu=a_\mu^{(1)}\lambda+a_\mu^{(2)}\lambda a_1+a_\mu^{(3)}\lambda a_2+a_\mu^{(4)}\lambda\beta_2+a_\mu^{(5)}\lambda^2+\cdots, \\ &\beta_\mu=\beta_\mu^{(1)}\lambda+\beta_\mu^{(2)}\lambda a_1+\beta_\mu^{(3)}\lambda a_2+\beta_\mu^{(4)}\lambda\beta_2+\beta_\mu^{(5)}\lambda^2+\cdots, \quad \mu=3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Коефициентите δ_1, $a_\mu^{(1)}, \beta_\mu^{(1)}, \ldots$ се определят от въпросните уравнения по познатия начин.

Като заместим δ, a_μ, β_μ, $\mu=3, \ldots, n$, в изоставените три уравнения на (17) и съкратим на λ, получаваме уравненията

$$\begin{aligned} &\left\{G_{11}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{12}\right\}a_1+\left\{G_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{13}\right\}a_2+\left\{2l_{12}k\delta_1+H_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{14}\right\}\beta_2 \\ &+2l_{11}P\delta_1+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}(\cos 2\Omega_\mu-1)a_\mu^{(1)}+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\sin 2\Omega_\mu \,.\, \beta_\mu^{(1)}+F_1\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+\ldots=0, \\ &\left\{G_{21}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{22}\right\}a_1+\left\{G_{22}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{23}\right\}a_2+\left\{2l_{22}k\delta_1+H_{22}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{24}\right\}\beta_2 \\ &+2l_{21}P\delta_1+\sum_{\mu=3}^{n} l_{2\mu}(\cos 2\Omega_\mu-1)a_\mu^{(1)}+\sum_{\mu=3}^{n}\sin 2\Omega_\mu \,.\, l_{2\mu}\beta_\mu^{(1)}+F_2\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+\cdots=0, \\ (20)\qquad &\left\{-2l_{11}\varrho_1\delta_1+\dot{G}_{11}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+V_2\right\}a_1+\left\{-2l_{12}k^2\varrho_1\delta_1+\dot{G}_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+V_3\right\}a_2 \\ &+\left\{\dot{H}_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+V_4\right\}\beta_2-2l_{11}N\varrho_1\delta_1-2l_{12}Mk^2\varrho_1\delta_1+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\varrho_\mu\sin 2\Omega_\mu \,.\, a_\mu^{(1)} \\ &+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\varrho_\mu(\cos 2\Omega_\mu-1)\beta_\mu+\dot{F}_1\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+\cdots=0, \end{aligned}$$

където

$$W_{ik}=2Pl_{i1}\delta_k+\sum_{\mu=3}^{n} l_{i\mu}\{(\cos 2\Omega_\mu-1)a_\mu^{(k)}+\sin 2\Omega_\mu \,.\, \beta_\mu^{(k)}\}, \quad i=1,2;\ k=2,3,4,$$

$$V_l=-2Nl_{11}\varrho_1\delta_l-2l_{12}Mk^2\varrho_1\delta_l+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\varrho_\mu\{\sin 2\Omega_\mu \,.\, a_\mu^{(l)}+(\cos 2\Omega_\mu-1)\beta_\mu^{(l)},$$

$$l=2, 3, 4.$$

За да имаме решение за α_1, α_2 и β_2, което при $\lambda=0$ да се обръща в нула, необходимо е да бъдат изпълнени условията

$$2l_{11}P\delta_1+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}(\cos 2\Omega_\mu-1)\alpha_\mu^{(1)}+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\sin 2\Omega_\mu\,.\,\beta_\mu^{(1)}+F_1\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)=0,$$

$$(21)\qquad 2l_{21}P\delta_1+\sum_{\mu=3}^{n} l_{2\mu}(\cos 2\Omega_\mu-1)\alpha_\mu^{(1)}+\sum_{\mu=3}^{n} l_{2\mu}\sin 2\Omega_\mu\,.\,\beta_\mu^{(1)}\quad F_2\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)=0,$$

$$-2l_{11}N\varrho_1\delta_1-2l_{12}\varrho_1k^2\delta_1M+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\varrho_\mu\sin 2\Omega_\mu\,.\,\alpha_\mu^{(1)}$$

$$+\sum_{\mu=3}^{n} l_{1\mu}\varrho_\mu(\cos 2\Omega_\mu-1)\beta_\mu+\dot F_1\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)=0,$$

като

$$F_k(t)=\frac{1}{\Delta\,|\,A\,|}\int_0^t\sum_{\mu=}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\bar{\Delta}_{l\mu}}{\varrho_\mu}f_l(x^0\dot{x}^0,\,0)l_{k\mu}\,.\sin\varrho_\mu(t-u)\,du$$

се получава от (15).

Достатъчното условие за определянето на $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ от (20) е функционалната детерминанта на левите страни относно α_1, α_2, β_2, при $\alpha_1=\alpha_2=\beta_2=0$, а именно

$$(22)\quad\begin{vmatrix} G_{11}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{12} & G_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{13} & 2l_{12}k\delta_1+H_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{14}\\ G_{21}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{22} & G_{22}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{23} & 2l_{22}k\delta_1+H_{22}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+W_{24}\\ -l_{11}\varrho_1 2\delta_1+\dot G_{11}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+V_2 & -2l_{12}k^2\varrho_1\delta_1+\dot G_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+V_3 & \dot H_{12}\left(\frac{2\pi}{\varrho_1}\right)+V_4 \end{vmatrix},$$

да бъде различна от нула.

Уравненията на системата (20) са алгебрични относно P, M, N. Ако намерените от тази система реални решения P, M, N не анулират детерминантата (22), системата (1) притежава периодични решения (чийто брой е равен на броя на тройките с горното свойство), които при $\lambda=0$ се превръщат в (5).

По същия начин може да се третира въпросът за съществуване на периодични решения, отговарящи на корена $i\varrho_1$ и в случая, когато s корена на (3) са кратни на ϱ_1:

$$\varrho_j=k_j\varrho_1,\ j=2,\ 3,\ldots,s+1.$$

Тогава в детерминантата ψ ще има $2s+1$ стълба с елементи нула и следователно ще трябва да се избере вместо (5) частен интеграл на (2), зависещ от $2s+1$ параметъра. От системата (17) ще се изоставят $2s+1$ уравнения, а накрая за определянето на параметрите ще се получи система от $2s+1$ алгебрични спрямо тях уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брадистилов, Г. и Г. Бояджиев. Върху периодичните решения на една автономна система и приложението ѝ за автогенератори с n трептящи кръга. Год. на ВТУЗ, Математика, 1 (1965), кн. 1, 5—14.
2. Андронов, А. А. и А. А. Витт. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. Журн. техн. физики, 4 (1934), вып. 1.
3. Брадистилов, Г. Съществуване и свойства на периодични движения на n последователно свързани физични махала в една равнина. Год. на Соф. унив. 38 (1942), кн. 1.
4. Bradistilov, G. und G. Boyadjiev. Existenz periodischer Bewegungen eines n-fachen Pendels im Falle, daß einige Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung einer Vielfaches einer anderen sind. ZAMM, 39 (1959), Nr. 7—8, 284—290.

Постъпила на 19. IV. 1966 г.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КРАТНЫХ КОРНЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Георги Брадистилов, Георги Бояджиев
и Владимир Лубих

Резюме

В работе [1] найдены условия, при которых автономная система (1) имеет периодические решения. При этом сделано предположение, что фундаментальное уравнение (3) имеет только простые и некратные между собою мнимые корни.

В этой работе мы доказываем существование периодических решений той же системы и в случае, когда корни фундаментального уравнения кратные между собою.

PERIODISCHE LÖSUNGEN EINES AUTONOMEN SYSTEMS BEI GANZZAHLIGEM VERHÄLTNIS DER WURZELN DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG

Georgi Bradistilov, Georgi Bojadžiev und
Vladimir Lubich

Zusammenfassung

In der Arbeit [1] sind die Existenzbedingungen für periodische Lösungen des Systems (1) gefunden. Dort ist es vorausgesetzt, daß die charakteristische Gleichung (3) nur rein imaginäre Wurzeln besitzt, deren Verhältnisse nicht ganzzahlig sind.

In der vorliegenden Arbeit wird die Existenz periodischer Lösungen des Systems (1) bewiesen in dem Fall, wo das Verhältnis zweier Wurzeln der charakteristischen Gleichung ganzzahlig ist.