БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА АМПЛИТУДИТЕ ПРИ ПАРАМЕТРИЧНИЯ РЕЗОНАНС НА ТЪНКИ ЕЛАСТИЧНИ ПЛОЧИ И ЧЕРУПКИ

Сава Кисляков

Изследването на динамичната устойчивост на плочи и черупки се свежда приближено към едно или няколко обикновени диференциални уравнения с периодични коефициенти и голяма нелинейност [1], [2], [3]. За определяне областите на неустойчивост (т. е. настъпването на параметричен резонанс) може да се работи с линейните уравнения. Определянето на амплитудите при параметричния резонанс обаче изисква да се решат точно или приближено нелинейните уравнения. За тази цел не са предложени достатъчно строги методи. В [1] е развит метод на тригонометричните редове, при който обаче се работи с редове, чиято сходимост остава недоказана. Методът на малкия параметър [1] е приложим само за уравнения с малка нелинейност, които се получават при прът и прътови системи. За плочи и черупки този метод не е приложим. От друга страна, оказва се [3], че изследването на динамичната устойчивост на плочи и черупки с начална неправилност изисква като етап от решението да се реши съответната задача за конструкция без неправилност, тъй като пораждащата система е нелинейна. Всичко това показва, че представлява голям интерес построяването на строга методика за решаване на нелинейните задачи на динамичната устойчивост на плочи и черупки без неправилности. В тази работа такава методика ще бъде изградена върху основата на резултатите, известни под общото име „първи метод на Ляпунов" ([4] и [5]). Тези резултати се отнасят до случаите, когато решението на системата се извършва с безкрайни редове от един или друг вид.

За по-голяма яснота всички разсъждения ще извършим при конкретния случай на правоъгълна еластична плоча в първо приближение. За този случай имаме уравнението (вж. [3])

$$\frac{d^2f}{dt^2}+K_1^{(0)}f-K_2pf+K_4f^3=0,\quad p=p_0+p_t\cos\theta t, \tag{1}$$

или еквивалентната му система

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\qquad \frac{dx_2}{dt}=-(a-b\cos\theta t)\,x_1-K_4x_1^3, \tag{2}$$

където $a=K_1^{(0)}-K_2p_0$, $b=K_2p_t$.

Ще търсим решение на системата (2) във вид на кратни редове по степените на началните стойности на x_1 и x_2. Тези редове ще бъдат сходящи съгласно следната теорема на Ляпунов [5]:

„Нека е дадена нормалната система диференциални уравнения от първи ред

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t\,;\,x_1,x_2,\ldots,x_n),\ s=1,2,\ldots n, \tag{3}$$

където X_s са дадени функции на величините $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, ставащи нула при $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, непрекъснати по отношение на t при $t\geq t_0$ и холоморфни за всяко $t\geq t_0$ по отношение на $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при всички стойности на последните, удовлетворяващи условията $|x_1|\leq A_1$, $|x_2|\leq A_2, \ldots$, $|x_n|\leq A_n$, където $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са или отлични от нула константи, или такива непрекъснати функции на t, които никога не се анулират. Нека освен това функциите X_s са такива, че означавайки с M_s някаква горна граница на модула на съвкупността на членовете от измерение, по-високо от единица, в развитието на X_s при всевъзможни комплексни значения на величините x_s, чиито модули са равни на A_s, можем да приемем за величини $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ такива функции на t, че за всяко T, по-голямо от t_0, при t, изменящо се в граници от t_0 до T, за всяка от функциите A_s да съществува някаква положителна долна граница, а за всяка от функциите M_s някаква горна граница. Тогава, ако A_0 е най-малката от стойностите, които приемат величините A_s за $t=t_0$, то при всякакви x_s^0, числено по-малки от A_0, ще се намери такава граница $T>t_0$, че функциите x_s, удовлетворяващи уравненията (3) и приемащи стойности x_s^0 при $t=t_0$, ще се представят с абсолютно сходящи редове, наредени по възходящите степени на тези стойности за всяко t между t_0 и T."

Лесно е да се види, че системата (2) удовлетворява условията на теоремата. Десните страни на (2) са холоморфни в цялата равнина x_1, x_2, но тъй като нелинейните уравнения на плочата се отнасят за премествания, съизмерими с дебелината ѝ d, можем да приемем например $|x_1|\leq A_1=2d$. За скоростта x_2 можем да приемем $|x_2|\leq A_2=k\,.\,\theta\,.\,8d/2\pi$, където $k>1$ е някакъв коефициент на увеличение на средната скорост на трептение. Също тъй ще приемем за определеност $M_1=0$, $M_2=8K_4d^3$.

Редовете, чиято сходимост се обсъжда в приведената теорема, имат общ вид

$$x_s=x_1^0x_{s1}+x_2^0x_{s2}+\cdots+x_n^0x_{sn}+\sum_{m=2}^{\infty}\sum x_s^{(m_1m_2\ldots m_n)}(x_1^0)^{m_1}(x_2^0)^{m_2}\ldots(x_n^0)^{m_n}. \tag{4}$$

Нека приемем начално смущение на плочата във вида на преместване с амплитуда c. Тогава $x_1^0=c$, $x_2^0=0$ и решението на (2) ще търсим във вида

$$x_1=\sum_{i=1}^{\infty}x_{1i}c^i,\quad x_2=\sum_{i=1}^{\infty}x_{2i}\,.\,c^i. \tag{5}$$

Заместваме (5) в (2) и приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на c в лявата и дясната част. Така получаваме системите линейни диференциални уравнения

$$
\text{(6а)}\qquad \frac{dx_{11}}{dt}=x_{21},\qquad \frac{dx_{21}}{dt}=(-a+b\cos\theta t)x_{11},
$$

$$
\text{(6б)}\qquad \frac{dx_{12}}{dt}=x_{22},\qquad \frac{dx_{22}}{dt}=(-a+b\cos\theta t)x_{12},
$$

$$
\text{(6в)}\qquad \frac{dx_{13}}{dt}=x_{23},\qquad \frac{dx_{23}}{dt}=(-a+b\cos\theta t)x_{13}-K_4x_{11}^3,
$$

От (5) следва, че началните условия за решението на системите (6) ще бъдат (приемаме $t_0=0$)

$$
\text{(7)}\qquad \begin{aligned} &x_{11}(0)=1, && x_{21}(0)=0\\ &x_{12}(0)=x_{13}(0)=\cdots=0, && x_{22}(0)=x_{23}(0)=\cdots=0. \end{aligned}
$$

Системите (6) могат да се решат приближено с метода на Ляпунов чрез развитие по степените на един параметър [6]. От (6а) лесно намираме

$$
\text{(8)}\qquad \begin{aligned} &x_{11}=x_{11}^{(0)}-x_{11}^{(1)}+x_{11}^{(2)}-\cdots\\ &x_{21}=dx_{11}/dt, \end{aligned}
$$

където

$$
\text{(9)}\qquad \begin{aligned} &x_{11}^{(0)}=1,\ x_{11}^{(1)}=\int_0^t dt\int_0^t p\,dt,\dots\\ &x_{11}^{(n)}=\int_0^t dt\int_0^t px_{11}^{(n-1)}\,dt,\ p=a-b\cos\theta t,\\ &x_{21}=\frac{dx_{11}}{dt}. \end{aligned}
$$

От (6б) и (7) следва $x_{12}\equiv 0$, $x_{22}=0$.

Хомогенната част на система (6в) дава с метода на Ляпунов

$$
\text{(10)}\qquad \begin{aligned} &x_{13}^{(0)}=C_1t+C_2,\ x_{13}^{(1)}=\int_0^t dt\int_0^t p(C_1t+C_2)\,dt,\\ &x_{13}^{(2)}=\int_0^t dt\int_0^t px_{13}^{(1)}\,dt,\dots,\\ &x_{23}=\frac{dx_{13}}{dt}. \end{aligned}
$$

За да намерим общото решение на нехомогенната система (6в), ще приложим метода на Лагранж, като приближеното решение, получено по-горе, ще използваме вместо точно решение на хомогенното уравнение. Ако се ограничим с третото приближение $x_{13}^{(2)}$, ще получим

$$(11)\qquad x_{13}=C_1t+C_2-\int_0^t dt\int_0^t p(C_1t+C_2)dt$$

$$+\int_0^t dt\int_0^t pdt\int_0^t dt\int_0^t p(C_1t+C_2)dt+\eta_{13},$$

$$x_{23}=\frac{dx_{13}}{dt}.$$

Решението x_{13} може да се напише и така:

$$(12)\qquad x_{13}=C_1\left[t-\int_0^t dt\int_0^t p.t.dt+\int_0^t dt\int_0^t pdt\int_0^t dt\int_0^t p.t.dt\right]$$

$$+C_2\left[1-\int_0^t dt\int_0^t pdt+\int_0^t dt\int_0^t pdt\int_0^t dt\int_0^t pdt\right]+\eta_{13}.$$

Изразите в средните скоби играят ролята на два частни интеграла на хомогенното уравнение

$$(13)\qquad \frac{d^2x_{13}}{dt^2}+px_{13}=0.$$

От тях изчисляваме η_{13}. Именно, ако означим

$$(14)\qquad x_{13}=C_1y_1+C_2y_2+\eta_{13},$$

то

$$(15)\qquad \eta_{13}=y_1\int_0^t\varphi_1(t)dt+y_2\int_0^t\varphi_2(t)\,dt,$$

а $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ са решения на системата уравнения

$$(16)\qquad \begin{aligned} &y_1\varphi_1+y_2\varphi_2=0,\\ &y_1'\varphi_1+y_2'\varphi_2=-K_4x_{11}^3. \end{aligned}$$

Тук трябва да се имат пред вид две обстоятелства. Първо, решението на системата (16) предлага големи, макар и преодолими изчислителни трудности. Второ, понеже y_1 и y_2 са само приблизително частни интеграли, то ако намерим приблизително други два частни интеграла, не е изключено приблизителната детерминанта на Вронски да се анулира в някоя точка, въпреки че съответните точни частни интеграли образуват фундаментална система. Това може да се провери във всяка конкретна задача или като се провери линейната независимост на приблизителните частни интеграли чрез съставяне на уравнения от вида

$$(17) \qquad a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0,$$

или като се провери стойността на приблизителната детерминанта на Вронски за една определена стойност на t (например $t=0$). Ако се окаже, че детерминантата се анулира, това ще означава, че взетото приближение е недостатъчно и трябва да се изчисли следващият член от реда.

И тъй можем да смятаме, че е решена нехомогенната система (6в), началните условия за която позволяват да се определят константите C_1 и C_2.

По същия начин продължаваме с решението на следващите системи (6). Ясно е, че те изобщо ще съдържат линейни нехомогенни уравнения и могат да се решават както системата (6в).

Въпросът за сходимостта на редовете (4) и (5) представлява специален интерес. Съгласно [4] за дадено T редовете ще бъдат сходящи, ако началните стойности на неизвестните функции не превишават величината

$$(18) \qquad g = \frac{A}{1+nK}\left\{1-(n+1)h\left[\left(\frac{1}{nh}+1\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]\right\},$$

и в такъв случай се доказва, че

$$(19) \qquad |x_s| < A.$$

Тук A е някаква обща долна граница за функциите A_s в интервала (t_0, T); h се дава с израза

$$(20) \qquad h = (1+nK)(1+nK')\frac{M(T-t_0)}{A}$$

където K и K' са горни граници (зависещи от T) на изразите $x_{ii}-1$, x_{ij} и съответно $\frac{A_{ii}}{A}-1$, $\frac{A_{ij}}{A}$ (вж. [5]), а M — обща горна граница за всички функции M_s в интервала (t_0, T).

В задачите от нелинейната теория на динамичната устойчивост величината M е сравнително голяма поради наличието на „голяма нелинейност“. Това означава, че ако искаме да получим решение, валидно за достатъчно дълъг интервал $T-t_0$, ще имаме голямо h и в (18) ще получим разлика от много близки величини, което ще води до грешки или до необходимост от изключително прецизни пресмятания.

За да избегнем това неудобство, ще преобразуваме (18), като развием първия член в квадратните скоби в биномен ред за голямо h. Получаваме

$$(21) \qquad g = \frac{A}{1+nK}\left\{1-(n+1)h\left[1+\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{nh}+\left(\frac{n}{n+1}-1\right)\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2h^2}+\cdots-1\right]\right\}$$

$$= \frac{A}{1+nK}\left\{1-(n+1)h\left[\frac{1}{(n+1)h}-\frac{1}{2n}\,\frac{1}{(n+1)^2h^2}+\cdots\right]\right\} \approx \frac{A}{1+nK}\,\frac{1}{2n(n+1)h}.$$

И тъй при

$$c \leq g = \frac{A}{1+nK} \frac{1}{2n} \frac{1}{(n+1)h} \tag{22}$$

редовете (4), (5) ще бъдат сходящи за предписаното T

Оказва се обаче, че за голям интервал $T-t_0$ границата на началните смущения g се получава твърде малка и обратно. По-точно, ако T расте неограничено, величината g клони към нула. Затова в случая, когато решението ни интересува за дълъг интервал от време, а смущенията превишават получената стойност на g, редовете (4), (5) трябва да се преобразуват. А. М. Ляпунов доказа, че редове от вида

$$x_s = \sum L_s^{(m_1, m_2, \dots, m_k)} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k} e^{-\sum_1^k m_i \lambda_i t} \tag{23}$$

са сходящи за всяко t, ако $a_1, a_2, \dots, a_k$ не превишават отлична от нула граница q. В (23) сумирането се разпространява на всички цели неотрицателни стойности на числата $m_1, m_2, \dots, m_k$, подчинени на условието

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k > 0, \tag{24}$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ са k от характеристичните числа на линейната част на системата. Под L_s се разбират непрекъснати функции на t, които не зависят от константите a_i и чиито характеристични числа са не по-малки от нула.

Следователно основен въпрос при построяването на редовете от типа (23) ще бъде познаването на характеристичните числа на първото приближение на дадената система. В задачите на динамичната устойчивост първото приближение е система линейни уравнения с периодични коефициенти. За такава система характеристичните числа са равни на реалните части на характеристичните ѝ показатели, взети с обратен знак (вж. [6]). Последните могат да се определят от корените на характеристичното уравнение, които се пресмятат приближено чрез разлагане по степените на малък параметър [6].

В заключение следва да отбележим, че предложеният тук метод за определяне на амплитудите при параметричния резонанс изисква твърде обемисти изчисления при всяка конкретна задача. По тази причина представлява интерес сравняването му с метода на тригонометричните редове [1] с цел да се установи в кои случаи приложението на последния е допустимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, Москва, 1956.
2. Кисляков, С. Д. К теории динамической устойчивости тонких упругих оболочек. Труды конференции по механике сплошных сред, Варна, 1966.
3. Кисляков, С. Д. Устойчивост на равновесието и движението на тънки еластични плочи и черупки с начални неправилности. Год. на ВТУЗ, Приложна механика, **3** (1966), кн. 1.

4. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, Москва, 1950.
5. Дубошин, Г. Н. Основы теории устойчивости движения. Изд. Моск. университета, 1952.
6. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. Наука, Москва, 1966.

Постъпила на 8. VI. 1967 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

Сава Кисляков

Резюме

В работе рассматриваются нелинейные задачи теории динамической устойчивости плит и оболочек. Системы дифференциальных уравнений, описывающие эти задачи, характеризуются большой нелинейностью. Решение основывается на теореме А. М. Ляпунова. Особое внимание обращено на определение интервала сходимости полученных рядов, причем выведен критерий (22) сходимости.

В конце работы намечено решение этого круга задач для случая, когда интервал времени бесконечен.

DETERMINATION OF THE AMPLITUDES OF THE PARAMETRIC RESONANCE OF THIN ELASTIC PLATES AND SHELLS

Sava Kislyakov

Summary

The article examines non-linear problems of the theory of the dynamic stability of plates and shells. The systems of differential equations describing these problems are characterized by a high degree of non-linearity. The solution is based on a theorem of A. M. Lyapunov. Particular attention is paid to the determination of the interval of convergence of the series obtained, and the convergence criterion (22) is worked out.

At the end of the article the solution has been outlined of problems of this kind for the case when the time interval is an infinite one.