БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ЕДНА АНАЛИТИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА КРЪГОВЕТЕ В РАВНИНАТА

Иван Рамаданов

Нека D е произволна ограничена област от C^1 и $\zeta \in D$. С $L(D;\zeta)$ означаваме множеството на всички аналитични функции $f(z)$, регулярни и еднозначни в D, които удовлетворяват условието $f(\zeta)=1$. Функцията на Бергман [1] $K_D(\zeta,\bar\zeta)$ за областта D в точката ζ се определя от равенството

$$\{K_D(\zeta,\bar\zeta)\}^{-1}=\inf \|f\|_D^2,\ f(z)\in L(D;\zeta), \tag{1}$$

където $\|f\|_D^2=\iint\limits_D |f(z)|^2\, d\omega$.

Да означим с $E(D)$ множеството на всички точки $\zeta \in D$, които притежават свойството: каквато и да е функцията $f(z)$ от $L(D;\zeta)$, винаги $\|f\|_D^2 \geqq V(D)$, където $V(D)$ е лицето на областта D.

В [2] са доказани следните твърдения:

Теорема 1. Необходимо и достатъчно условие точката ζ от D да принадлежи на множеството $E(D)$ е $K_D(\zeta,\bar\zeta)=\{V(D)\}^{-1}$.

Теорема 2. Ако D е ограничена и едносвързана област от C^1 и ако множеството $E(D)$ съдържа поне една точка ζ, то D е кръг с център точката ζ и $E(D)$ се състои само от точката ζ.

По такъв начин множеството $E(D)$ характеризира определен вид области от C^1. Тук ще се спрем на едно обобщение на теоремите 1 и 2, когато в основата на разглежданията стои не класът $L(D;\zeta)$, а един по-общ клас.

Да означим с $L_n(D;\zeta)$ множеството на всички функции $f(z)$, регулярни и еднозначни в D (заедно със своите първи n производни), такива, че

$$f(\zeta)=f'(\zeta)=\cdots=f^{(n-1)}(\zeta)=0,\ f^{(n)}(\zeta)=1. \tag{2}$$

Въвеждаме следния функционал, дефиниран върху $L_n(D;\zeta)$:

$$I_n(f)=\iint\limits_D \left|n!\,\frac{f(z)}{(z-\zeta)^n}\right|^2 d\omega. \tag{3}$$

По-нататък с $E_n(D)$ означаваме множеството на всички точки $\zeta \in D$, които имат свойството: каквато и да е функцията $f(z) \in L_n(D;\zeta)$, винаги

$$(4) \qquad I_n(f) \geq V(D).$$

В такъв случай в сила е следната теорема, аналог на теорема 2:

Теорема 3. Ако D е ограничена едносвързана област от C^1 и ако $E_n(D)$ съдържа поне една точка ζ, то D е кръг с център ζ и $E_n(D)$ се състои само от точката ζ.

Доказателство. Ще установим, че от $\zeta \in E_n(D)$ следва $\zeta \in E(D)$. Наистина да допуснем, че $\zeta \overline{\in} E(D)$. Това означава, че съществува функция $\varphi_0(z)$, $\varphi_0(\zeta)=1$, но $\|\varphi_0\|_D^2 < V(D)$. Полагаме $f_0(z)=\frac{1}{n!}(z-\zeta)^n\varphi_0(z)$. Последната функция очевидно принадлежи на $L_n(D;\zeta)$. За нея е в сила $I_n(f_0)=\|\varphi_0\|_D^2 < V(D)$, което е невъзможно. Като комбинираме получения резултат с теорема 2, заключаваме, че D е кръг с център ζ.

При направеното обобщение ние изменихме дефиницията на $E(D)$. Нужно беше и да променим функционала $\|f\|_D^2$. Сега ще дадем друго обобщение на теоремите 1 и 2, при което няма да се наложи да въведем нов функционал.

Нека D е ограничена област от C^1, $\zeta \in D$ и нека разгледаме функциите $f(z)$ от $L_n(D;\zeta)$. Означаваме

$$\lambda_D(\zeta)=\inf \|f\|_D^2, \ f(z) \in L_n(D;\zeta).$$

Известно е [1], че този инфимум може да се изрази с помощта на $K_D(\zeta,\overline{\zeta})$ и нейните частни производни. Освен това лесно се установява, че за Δ: $|z-\zeta|<R$ е изпълнено

$$(5) \qquad \lambda_\Delta(\zeta)=\inf_{g \in L_n(\Delta;\zeta)} \|g\|_\Delta^2 = \frac{\pi R^{2(n+1)}}{(n!)^2(n+1)}.$$

При това инфимумът се достига за функцията $g_0(z)=\frac{(z-\zeta)^n}{n!}$.

Да асоциираме с произволната ограничена област D и с всяка нейна точка ζ числото $R(\zeta)$ и областта $\Delta(\zeta)$, определени от

$$(6) \qquad R(\zeta)=\max |z-\zeta|, \ z \in C^1 \setminus D,$$

$$(7) \qquad \Delta(\zeta): \ |z-\zeta|<R(\zeta).$$

Ясно е, че винаги $D \subset \Delta(\zeta)$, каквато и да е точката $\zeta \in D$.

Означаваме с $E_n^*(D)$ множеството на точките $\zeta \in D$, които притежават свойството: каквато и да е функцията $f(z) \in L_n(D;\zeta)$, имаме

$$(8) \qquad \|f\|_D^2 \geq \frac{\pi R_{(\zeta)}^{2(n+1)}}{(n!)^2(n+1)},$$

където $R(\zeta)$ е дефинирано от (6).

Теорема 4. Необходимо и достатъчно условие една точка ζ_0 да принадлежи на множеството $E_n^*(D)$ е

(9) $$\lambda_D(\zeta_0)=\pi R^{2(n+1)}(\zeta_0)\{(n!)^2(n+1)\}^{-1}.$$

Доказателство. Нека е изпълнено (9). Да изберем произволна функция $f(z)\in L_n\ (D;\ \zeta_0)$. Тогава $\|f\|_D^2\geq\lambda_D(\zeta_0)=\frac{\pi R^{2(n+1)}(\zeta_0)}{(n!)^2(n+1)}$, т. е. $\zeta_0\in E_n^*(D)$.

Нека $\zeta_0\in E_n^*(D)$. Тогава за всяка функция $f(z)\in L_n(D;\ \zeta_0)$ и специално за $f_0(z)$ с $\|f_0\|_D^2=\lambda_D(\zeta_0)$ ще бъде изпълнено (8), т. е.

(10) $$\lambda_D(\zeta_0)\geq\frac{\pi R^{2(n+1)}(\zeta_0)}{(n!)^2(n+1)}.$$

Сега ще покажем, че когато ζ е произволна точка от D, в сила е

(11) $$\lambda_D(\zeta)\leq\frac{\pi R^{2(n+1)}(\zeta)}{(n!)^2(n+1)}$$

Наистина, когато $\zeta\in D$, поради $D\subset\Delta(\zeta)$ имаме

(12) $$\lambda_D(\zeta)\leq\lambda_{\Delta(\zeta)}(\zeta).$$

От (5) и (12) намираме (11). Неравенството (11) за $\zeta=\zeta_0$ и (10) дават (9).

Теорема 5. Ако D е ограничена област, за която се знае, че $E_n^*(D)$ съдържа поне една точка ζ, то D съвпада с $\Delta(\zeta)$ ($\Delta(\zeta)$: $|z-\zeta|<R(\zeta)$) и освен това множеството $E_n^*(D)$ се състои само от точката ζ.

Доказателство. По теорема 4 в сила е $\lambda_D(\zeta)=\frac{\pi R^{2(n+1)}(\zeta)}{(n!)^2(n+1)}$. Като вземем пред вид (5), намираме $\lambda_D(\zeta)=\lambda_\Delta(\zeta)$. От това равенство и от обстоятелството, че $D\subset\Delta(\zeta)$, следва, че $D\equiv\Delta(\zeta)$.

Ясно е, че множеството $E_n^*(D)$ се състои само от точката ζ. Това се вижда от израза (5).

Накрая ще установим едно твърдение, което показва, че множеството $E(D)$, дефинирано в началото на настоящата работа, характеризира само кръговете от C^1. С други думи, ще покажем, че когато D е ограничена p-свързана област, $p\geq 2$, множеството $E(D)$ е празно.

Нека D е ограничена p-свързана област от C^1, $p\geq 2$. Означаваме с $D_1, D_2, \ldots, D_p$ компонентите на допълнението на D, като $D_1\ni\infty$. Известно е, че функциите 1, z^m, $\frac{1}{(z-a_\nu)^m}$, $m=1, 2, 3, \ldots, \nu=2, 3, \ldots, p$, образуват затворена в D ортогонална система от функции. Тук a_ν са произволни точки от D_ν и $a_1=\infty$.

Нека областта D е подчинена на следното допълнително предположение:

A) всички допълнителни континууми D_ν на D съдържат поне една вътрешна точка.

Да считаме, че сме избрали a_ν вътрешна за D_ν. С помощта на ортонормиращия процес на Шмидт от горната система функции получаваме ортонормираната система

$$\varphi_{1m}(z)=c_{1m}z^m,\quad m=0,1,2,\dots,$$

$$(13)\qquad \varphi_{\nu m}(z)=\frac{c_{\nu m}}{(z-a_\nu)^m},\quad \nu=2,3,\dots,p,\ m=1,2,$$

където коефициентите $c_{\nu m}$ са подбрани така, че

$$(14)\qquad \iint_D \varphi_{\nu m}(z)\overline{\varphi_{\mu l}(z)}\,d\omega=\delta_{ml}$$

при произволна двойка естествени числа (ν,μ), $1\leq\nu,\ \mu\leq p$. Интегралите (14) можем да образуваме благодарение на A). Специално за $\varphi_{10}(z)$ имаме $\|\varphi_{10}\|_D^2=|c_{10}|^2 V(D)=1$, т. е.

$$(15)\qquad |c_{10}|^2=\{V(D)\}^{-1}.$$

Теорема 6. Ако D е ограничена p-свързана област, $p\geq2$, която удовлетворява условието A), то $E(D)=\emptyset$.

Доказателство. Образуваме $K_D(z,\zeta)$

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{\nu m}(z)\overline{\varphi_{\nu m}(\zeta)}=|c_{10}|^2+\sum_{m=1}^{\infty}|c_{1m}|^2(z\bar\zeta)^m+\sum_{\nu=2}^{p}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{\nu m}|^2\frac{1}{(z-a_\nu)^m}\,\frac{1}{(\bar\zeta-\bar a_\nu)^m}.$$

Да изберем ζ произволно в D. Намираме

$$K_D(\zeta,\bar\zeta)=\{V(D)\}^{-1}+\sum_{m=1}^{\infty}|c_{1m}|^2|\zeta|^{2m}+\sum_{\nu=2}^{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_{\nu m}|^2}{|\zeta-a_\nu|^{2m}}.$$

Оттук следва

$$(16)\qquad K_D(\zeta,\bar\zeta)>\{V(D)\}^{-1}+\sum_{m=1}^{\infty}|c_{1m}|^2|\zeta|^{2m}>\{V(D)\}^{-1}+|c_{11}|^2|\zeta|^2,$$

където $|c_{11}|^2=\{\|z\|_D^2\}^{-1}$.

От (16) при всяко ζ получаваме окончателно

$$(17)\qquad K_D(\zeta,\bar\zeta)>\{V(D)\}^{-1}.$$

Съгласно теорема 1 това означава, че $E(D)=\emptyset$.

Предстои да обобщим получения резултат и за такива области, за които не е в сила условието A).

Теорема 7. Нека D е произволна ограничена p-свързана област, $p\geq2$. Тогава $E(D)=\emptyset$.

Доказателство. За областта D са възможни два случая: или е изпълнено A) и тогава имаме теорема 6, или не е в сила условието A); т. е. съществува допълнителен континуум, например D_μ, който не съдържа вътрешни точки. Означаваме неговата граница с Γ_μ и образуваме областите G_n по следния начин: за всяко n G_n е ограничена p-свързана област, на която всичките допълнителни континууми с изключение на този с номер μ съвпадат с тези на D. Граничната компонента Γ_μ^n и G_n, съответна на Γ_μ, избираме така, че компонентата на допълнението на G_n, ограничена от Γ_μ^n, да съдържа компонентата на допълнението на G_{n+1}, ограничена от Γ_μ^{n+1}, както и D_μ. Ясно е, че при такъв избор на областите G_n ще бъдат в сила

$$G_n \subset G_{n+1}, \quad G_n \subset D.$$

Освен това ще считаме, че $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условието

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = D.$$

При всяко n и при всяко ζ за областта G_n може да се приложи теорема 6, по-точно (16), съгласно което

$$K_{G_n}(\zeta, \bar\zeta) > \{V(G_n)\}^{-1} + |c_{11}^n|^2 |\zeta|^2, \tag{18}$$

където $|c_{11}^n|^2 = \{\|z\|_{G_n}^2\}^{-1}$. Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} V(G_n) = V(D)$. Също така $\lim\limits_{n\to\infty} |c_{11}^n|^2 = |c_{11}|^2$. Съгласно [3], $\lim\limits_{n\to\infty} K_{G_n}(\zeta, \bar\zeta) = K_D(\zeta, \bar\zeta)$. Извършвайки тогава граничен преход в (18), намираме $K_D(\zeta, \bar\zeta) \geqq \{V(D)\}^{-1} + |c_{11}|^2 |\zeta|^2$, откъдето следва, че $K_D(\zeta, \bar\zeta) > \{V(D)\}^{-1}$ за всяко $\zeta \neq 0$. Следователно $E(D) = \varnothing$.

Ако $\zeta = 0$, с предварителна транслация можем да получим област D^*, която не съдържа 0. При такава трансформация характерът на D няма да се измени и тогава пак ще заключим, че множеството $E(D)$ е празно.

По такъв начин е установено, че когато D е произволна ограничена p-свързана област, $p \geqq 2$, множеството $E(D)$ е празно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman, S. The Kernel Function and Conformal Mapping. American Mathematical Society, Surveys No. 5, 1950.
2. Русев, П. Аналитични трансформации, които увеличават обема и функцията на Бергман. Известия на Мат. инст. на БАН, **8** (1964), 195—201.
3. Ramadanov, I. Sur une propriété de la fonction de Bergman. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **20** (1967), No. 8, 759—762.

Постъпила на 13. X. 1967 г.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРУГОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Иван Рамаданов

Резюме

В этой работе рассматривается класс $L_n(D;\zeta)$ функций $f(z)$, аналитических в ограниченной области $D \subset C^1$ и таких, что $f^{(\nu)}(\zeta) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $f^{(n)}(\zeta) = 1$, где $\zeta \in D$. Вводится функционал $I_n(f) = \int\int_D \left| n! \frac{f(z)}{(z-\zeta)^n} \right|^2 d\omega$ и через $E_n(D)$ обозначено множество всех точек $\zeta \in D$, для которых выполняется следующее условие: какова бы ни была функция $f(z) \in L_n(D;\zeta)$, всегда $I_n(f) \geq V(D)$, где $V(D)$ — площадь области D.

Теорема 3. Если D-ограниченная односвязная область и если $E_n(D)$ содержит по крайней мере одну точку ζ, то D является кругом с центром в ζ и $E_n(D) = \{\zeta\}$.

Теперь при помощи нормы $\|f\|_D^2 = \int\int_D |f(z)|^2 d\omega$ вводится множество $E_n^*(D)$ всех точек $\zeta \in D$, для которых выполняется следующее условие: какова бы ни была функция $f(z) \in L_n(D;\zeta)$, всегда $\|f\|_D^2 \geq \frac{\pi R^{2(n+1)}(\zeta)}{(n!)^2(n+1)}$, где $R(\zeta) = \max|z-\zeta|$, $z \in C^1 \setminus D$.

Теорема 4. Для того, чтобы $\zeta_0 \in E_n^*(D)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda_D(\zeta_0) = \pi R^{2(n+1)}(\zeta_0)\{(n!)^2(n+1)\}^{-1},$$

где

$$\lambda_D(\zeta_0) = \inf \|f\|_D^2, \quad f(z) \in L_n(D;\zeta_0).$$

Теорема 5. Если D — ограниченная область и если множество $E_n^*(D)$ содержит по крайней мере одну точку ζ, то D является кругом с центром в ζ и $E_n^*(D) = \{\zeta\}$.

Теорема 6 и теорема 7 относятся к случаю, когда D — многосвязная область, где рассматривается класс функций $L(D;\zeta) = \{f(z) : f(\zeta) = 1\}$ и множество точек $E(D) = \{\zeta \in D : \|f\|_D^2 \geq V(D)\}$. Доказывается, что $E(D) = \emptyset$.

UNE CARACTÉRISTIQUE ANALYTIQUE DES CERCLES DANS LE PLAN COMPLEXE

Ivan Ramadanov

Résumé

On considère la classe $L_n(D;\zeta)$ des fonctions $f(z)$, analytiques dans le domaine borné $D \subset C^1$ et telles que $f^{(\nu)}(\zeta)=0$, $\nu=0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ et $f^{(n)}(\zeta)=1$ où $\zeta \in D$. On introduit $I_n(f)=\iint\limits_D \left| n!\, \frac{f(z)}{(z-\zeta)^n} \right|^2 d\omega$ et on désigne par $E_n(D)$ l'ensemble des points $\zeta \in D$ qui ont la propriété: quelque soit $f(z) \in L_n(D;\zeta)$ on a toujours $I_n(f) \geq V(D)$, où $V(D)$ est l'aire de D.

Théorème 3. Si D est un domaine borné et simplement connexe et si $E_n(D)$ contient au moins un point ζ, alors D est un cercle, ayant pour centre ζ et $E_n(D)=\{\zeta\}$.

Toujours en considérant la classe $L_n(D;\zeta)$, mais en employant la norme $\|f\|_D^2=\iint\limits_D |f(z)|^2 d\omega$, on introduit l'ensemble $E_n^*(D)$ des points $\zeta \in D$, tels que quelque soit $f(z) \in L_n(D;\zeta)$, on a $\|f\|_D^2 \geq \frac{\pi R^{2(n+1)}(\zeta)}{(n!)^2(n+1)}$ où $R(\zeta)=\max |z-\zeta|$, $z \in C^1 \setminus D$.

Théorème 4. La condition nécessaire et suffisante pour que $\zeta_0 \in E_n^*(D)$ est:

$$\lambda_D(\zeta_0)=\pi R^{2(n+1)}(\zeta_0)\{(n!)^2(n+1)\}^{-1},$$

où

$$\lambda_D(\zeta_0)=\inf \|f\|_D^2, \quad f(z) \in L_n(D;\zeta_0).$$

Théorème 5. Si D est un domaine borné et si $E_n^*(D)$ contient au moins un point ζ, alors D est un cercle, ayant pour centre ζ et $E_n^*(D)=\{\zeta\}$.

Les théorèmes 6 et 7 se rapportent au cas où D est un domaine multiplement connexe et où l'on considère la classe de fonctions $L(D;\zeta)=\{f(z): f(\zeta)=1\}$ et l'ensemble de points $E(D)=\{\zeta \in D: \|f\|_D^2 \geq V(D)\}$. On démontre que dans ce cas $E(D)=\emptyset$.