БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

КРИВИ ЛИНИИ И ПОВЪРХНИНИ В ТРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО С АБСОЛЮТ ДВЕ РЕАЛНИ РАВНИНИ И ДВЕ РЕАЛНИ ТОЧКИ ВЪРХУ ТЯХНАТА ПРЕСЕЧНИЦА

Адриян Борисов

Настоящата работа е посветена на диференциалната геометрия на кривите линии и повърхнините в тримерното пространство B_2^2 с абсолют две реални равнини ε_3, ε_4 и две реални точки E_3, E_4 върху тяхната пресечница l. В § 1 построяваме каноничен репер, свързан с произволна точка от крива линия. Получаваме формули на Френе и даваме геометрични тълкувания на инвариантите на кривата линия. В § 2 построяваме каноничен репер, еднозначно свързан с всяка точка от дадената повърхнина. Въвеждаме в разглеждане една конгруенция, придружаваща повърхнината. В § 3 третираме въпроса за налагане на две повърхнини, а така също налагане на повърхнини и придружаващите конгруенции.

§ 1. Криви линии

Ще използваме репери $A_1A_2A_3A_4$, въведени от Станилов [4]. Те притежават следните свойства: A_3 и A_4 съвпадат с абсолютните точки E_3, E_4, а A_2 се намира в полярната равнина π на A_1 относно изродената повърхнина от втора степен $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$. Инфинитезималните преобразувания на върховете на репера са

$$(1.1)\qquad dA_i=\psi_i^j A_j,\quad i, j=1, 2, 3, 4,$$

като $\psi_1^1=\psi_2^2$, $\psi_1^2=\psi_2^1$, $\psi_3^1=\psi_3^2=\psi_3^4=0$, $\psi_4^1=\psi_4^2=\psi_4^3=0$. Чрез външно диференциране на (1.1) се получават структурните уравнения на постранството B_2^2:

$$\begin{aligned}
&D\psi_1^1=0,\quad D\psi_1^2=0,\quad D\psi_3^3=0,\quad D\psi_4^4=0,\\
(1.2)\qquad &D\psi_1^3=[\psi_1^1-\psi_3^3,\ \psi_1^3]+[\psi_1^2\psi_2^3],\quad D\psi_1^4=[\psi_1^1-\psi_4^4,\ \psi_1^4]+[\psi_1^2\psi_2^4],\\
&D\psi_2^3=[\psi_1^1-\psi_3^3,\ \psi_2^3]+[\psi_1^2\psi_1^3],\quad D\psi_2^4=[\psi_1^1-\psi_4^4,\ \psi_2^4]+[\psi_1^2\psi_1^4].
\end{aligned}$$

Нека върхът A_1 описва крива линия

$$(1.3)\qquad C: A_1=A_1(t).$$

Ако точката A_1 е неподвижна, от (1.1) следва $\psi_1^2=\psi_1^3=\psi_1^4=0$. При променлива точка A_1 формите ψ_1^2, ψ_1^3, ψ_1^4 са пропорционални на параметъра t, който наричаме главен параметър. Посочените форми наричаме главни диференциални форми от първи ред. Между тях съществуват две линейни съотношения, които записваме във вида

$$\psi_1^3=a\psi_1^2, \quad \psi_1^4=b\psi_1^2. \tag{1.4}$$

Като диференцираме външно (1.4) и приложим известната лема на Картан, получаваме

$$\begin{aligned} da+a(\psi_3^3-\psi_1^1)+\psi_2^3&=a^*\psi_1^2,\\ db+b(\psi_4^4-\psi_1^1)+\psi_2^4&=b^*\psi_1^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

С δ ще означаваме диференцирането само по вторичните параметри, преобразуващи реперите $A_1A_2A_3A_4$, като A_1 е постоянна, а значението на формата ψ_i^j при изменение само по тях ще бележим с θ_i^j. От (1.5) при вариация само по вторичните параметри получаваме

$$\begin{aligned} \delta a+a(\theta_3^3-\theta_1^1)+\theta_2^3&=0,\\ \delta b+b(\theta_4^4-\theta_1^1)+\theta_2^4&=0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Равенствата (1.6) показват как се менят величините a, b, когато се изменят само вторичните параметри. От тях се вижда, че a, b могат да приемат всяка стойност. Най-естествено е да изберем

$$a=0, \quad b=0. \tag{1.7}$$

Тогава $\theta_2^3=\theta_2^4=0$ и от (1.4) следва

$$\psi_1^3=0, \quad \psi_1^4=0. \tag{1.8}$$

От (1.8) и (1.1) получаваме $dA_1=\psi_1^1A_1+\psi_1^2A_2$, което показва, че върхът A_2 лежи върху тангентата към кривата C в точка A_1. Обратно, лесно се показва, че ако поставим върха A_2 върху тангентата към C в A_1, то $a=b=0$. Получения резултат можем да формулираме в следната

Теорема 1. Необходимото и достатъчно условие точката A_2 да лежи върху тангентата към кривата линия C в точката A_1 е $a=b=0$.

От направения избор следва, че точката A_2, а оттук и реперът $A_1A_2A_3A_4$ геометрически са напълно определени. Такъв репер наричаме полуканоничен. Той се характеризира с (1.8). Равенствата (1.5) приемат вида

$$\psi_2^3=a^*\psi_1^2, \quad \psi_2^4=b^*\psi_1^2. \tag{1.9}$$

На този етап от фиксирането на репера формите ψ_2^3, ψ_3^4 стават също главни форми. Като диференцираме външно (1.9) и приложим лемата на Картан, получаваме

$$\begin{aligned} da^*+a^*(\psi_3^3-\psi_1^1)&=\varkappa_1\psi_1^2,\\ db^*+b^*(\psi_4^4-\psi_1^1)&=\varkappa_2\psi_1^2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

При вариация само по вторичните параметри (1.10) приемат вида

$$\delta a^*+a^*(\theta_3^3-\theta_1^1)=0, \quad \delta b^*+b^*(\theta_4^4-\theta_1^1)=0. \tag{1.11}$$

Равенствата (1.11) показват, че величините a^*, b^* могат да приемат стойност единица. Геометрически това означава, че единичната точка A_3+A_4 на проективната координатна система с основни върхове A_3, A_4 се поставя в оскулачната равнина $\xi=(A_1, A_2, A_3+A_4)$ на кривата C в точката A_1. От $a^*=b^*=1$ и (1.9), (1.10), (1.11) следва

$$\psi_2^3=\psi_1^2, \quad \psi_2^4=\psi_1^2, \quad \psi_3^3-\psi_1^1=\varkappa_1\psi_1^2, \quad \psi_4^4-\psi_1^1=\varkappa_2\psi_1^2, \tag{1.12}$$

$$\theta_3^3-\theta_1^1=0, \quad \theta_4^4-\theta_1^1=0, \tag{1.13}$$

като $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ са инварианти на линията C.

Каноничен репер получаваме, като извършим още нормировката

$$(A_1A_2A_3A_4)=1, \tag{1.14}$$

от която следва зависимостта

$$2\psi_1^1+\psi_3^3+\psi_4^4=0. \tag{1.15}$$

При изменение само на вторичните параметри (1.15) добива вида

$$2\theta_1^1+\theta_5^3+\theta_4^4=0. \tag{1.16}$$

От (1.13) и (1.16) намираме $\theta_1^1=\theta_3^3=\theta_4^4=0$. С това всички вторични форми станаха нули и следователно $\delta A_i=0$, $i=1, 2, 3, 4$, което показва, че реперът е каноничен. От (1.8), (1.12) и (1.15) получаваме

$$\begin{gathered}\psi_1^1=-\frac{1}{4}(\varkappa_1+\varkappa_2)\psi_1^2, \quad \psi_2^3=\psi_1^2, \quad \psi_2^4=\psi_1^2,\\ \psi_3^3=\frac{1}{4}(3\varkappa_1-\varkappa_2)\psi_1^2, \quad \psi_4^4=\frac{1}{4}(-\varkappa_1+3\varkappa_2)\psi_1^2,\\ \psi_1^3=0, \quad \psi_1^4=0.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Единствените инварианти на кривата C са ψ_1^2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Инвариантите $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ наричаме **проективни кривини** на кривата линия. Структурните уравнения на пространството B_2^2 ни дават $D\psi_1^2=0$, което показва, че $\psi_1^2=d\sigma$. Полагаме $A_i'=dA_i/d\sigma$, $i=1, 2, 3, 4$, и от (1.1) и (1.17) получаваме системата от диференциални уравнения за кривата линия C

$$\begin{aligned}A_1'&=-\frac{1}{4}(\varkappa_1+\varkappa_2)A_1+A_2,\\ A_2'&=A_1-\frac{1}{4}(\varkappa_1+\varkappa_2)A_2+A_3+A_4,\\ A_3'&=\frac{1}{4}(3\varkappa_1-\varkappa_2)A_3,\\ A_4'&=\frac{1}{4}(-\varkappa_1+3\varkappa_2)A_4,\end{aligned} \tag{1.18}$$

която ще наричаме система на Френе.

За проективните кривини намираме геометричните тълкувания

$$\begin{aligned}\varkappa_1 &= 2\frac{(\Delta_1-1)(3\Delta_2+1)}{(\Delta_1+1)(\Delta_2-1)},\\ \varkappa_2 &= 2\frac{(\Delta_1-1)(\Delta_2+3)}{(\Delta_1+1)(\Delta_2-1)},\end{aligned} \tag{1.19}$$

където $\Delta_1=(A_1', A_2, A_1+A_2, A_1-A_2)$, $\Delta_2=(A_3, A_4, A_3+A_4, A_3'+A_4')$ са двойни отношения на указаните точки.

Равнинни криви линии. Нека $A_1(t)$ и $A_1(t+h)$, $h\neq 0$, са две близки точки от линията C: $A_1=A_1(t)$. За да бъде линията C равнинна, трябва точката $A_1(t+h)$ да лежи в оскулачната равнина $\xi=(A_1, A_2, A_3+A_4)$ на C в $A_1(t)$, т. е.

$$(A_1, A_2, A_3+A_4, A_1(t+h))=0. \tag{1.20}$$

По формулата на Тейлор имаме

$$A_1(t+h)=A_1(t)+hA_1'(t)+\frac{h^2}{2}A_1''(t)+\frac{h^3}{6}A_1'''(t)+[4]. \tag{1.21}$$

Като използваме формулите на Френе, изчисляваме $A_1''(t)$ и $A_1'''(t)$, които заместваме в (1.21). Получаваме

$$A_1(t+h)=\cdots\frac{h^3}{24}\{(\varkappa_1-3\varkappa_2)A_3+(-3\varkappa_1+\varkappa_2)A_4\}. \tag{1.22}$$

Означените с точки събираеми в (1.22) се изразяват чрез A_1, A_2, A_3+A_4. Заместваме (1.22) в (1.20) и получаваме $\varkappa_1=\varkappa_2$. По обратен път лесно се вижда, че ако $\varkappa_1=\varkappa_2$, кривата C е равнинна. Така доказахме следната

Теорема 2. Необходимото и достатъчно условие кривата C да бъде равнинна е $\varkappa_1=\varkappa_2$.

§ 2. Повърхнини

И тук ще използваме репери $B_1B_2B_3B_4$ от същия тип: B_3 и B_4 съвпадат с абсолютните точки E_3, E_4, а B_2 лежи в полярната равнина π на B_1 относно изродената повърхнина от втора степен $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$. За тези репери са в сила формулите (1.1) и (1.2), като навсякъде вместо A_i, ψ_i^j пишем съответно B_i, ω_i^j.

Произволна точка B_1 от разглежданата повърхнина (B) е функция на два независими параметъра: $B_1=B_1(u, v)$. При фиксирана точка B_1 са в сила равенствата $\omega_1^2=\omega_1^3=\omega_1^4=0$, което означава, че когато точката B_1 се мени, формите ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4 са линейни диференциални форми само на параметрите u, v. Тези форми наричаме главни форми от първи ред. Между тях съществува едно линейно съотношение, което написваме във вида

$$\omega_1^4=\lambda\omega_1^2+\mu\omega_1^3. \tag{2.1}$$

Равенството (2.1) показва, че за нов базис са избрани формите ω_1^2, ω_1^3, които в общия случай са независими. За да видим как се менят величините λ, μ, диференцираме външно (2.1) и прилагаме лемата на Картан. Получаваме

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} d\lambda-\lambda(\omega_1^1-\omega_4^4)-\mu\omega_2^3+\omega_2^4&=x\omega_1^2+y\omega_1^3,\\ d\mu-\mu(\omega_3^3-\omega_4^4)&=y\omega_1^2+z\omega_1^3. \end{aligned}$$

От (2.2) при вариация само по вторичните параметри получаваме

$$(2.3)\qquad \delta\lambda-\lambda(\pi_1^1-\pi_4^4)-\mu\pi_2^3+\pi_2^4=0,\quad \delta\mu-\mu(\pi_3^3-\pi_4^4)=0.$$

Равенствата (2.3) показват, че можем да постигнем $\lambda=0$, $\mu=1$ за сметка на избора на придружаващия репер. Тогава $\pi_2^4=\pi_2^3$, $\pi_4^4=\pi_3^3$ и от (2.1) следва

$$(2.4)\qquad \omega_1^4=\omega_1^3.$$

От (1.1) получаваме $dB_1=\omega_1^1B_1+\omega_1^2B_2+\omega_1^3(B_3+B_4)$, което показва, че допирателната равнина към повърхнината (B) в точката B_1 е равнината $\eta=(B_1, B_2, B_3+B_4)$. Обратно, ако поставим върха B_2 и единичната точка B_3+B_4 на проективната координатна система върху оста l в допирателната равнина към повърхнината в точката B_1, лесно се показва, че $\lambda=0$, $\mu=1$. Тогава можем да формулираме следната

Теорема 3. Необходимото и достатъчно условие точките B_2 и B_3+B_4 да лежат в допирателната равнина η към повърхнината (B) в точката B_1 е $\lambda=0$, $\mu=1$.

От направения избор $\lambda=0$, $\mu=1$ и (2.2) следва

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} \omega_2^4-\omega_2^3&=x\omega_1^2+y\omega_1^3\\ \omega_4^4-\omega_3^3&=y\omega_1^2+z\omega_1^3. \end{aligned}$$

Образуваме квадратичната форма $\varphi=(\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_4^4)-(\omega_1^2\omega_2^3+\omega_1^3\omega_3^3)$. Проверяваме, че $\delta\varphi=(\pi_1^1-\pi_3^3)\varphi$, от което следва, че φ е относителна инвариантна форма. Като използваме (2.5), получаваме

$$(2.6)\qquad \mathrm{II}=\varphi=x(\omega_1^2)^2+2y\omega_1^2\omega_1^3+z(\omega_1^3)^2.$$

Анулирането на тази квадратична форма дава асимптотичните линии на повърхнината. Като диференциране външно (2.5) и приложим лемата на Картан, получаваме

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} dx+x(\omega_4^4-\omega_1^1)-y^2\omega_1^3-2y\omega_2^3&=c_1\omega_1^2+c_2\omega_1^3,\\ dy-z\omega_2^3&=c_2\omega_1^2+c_3\omega_1^3,\\ dz+z(\omega_1^1-\omega_3^3)&=c_3\omega_1^2+c_4\omega_1^3. \end{aligned}$$

При вариация само по вторичните параметри (2.7) приемат вида

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} \delta x&=x(\pi_1^1-\pi_3^3)+2y\pi_2^3,\\ \delta y&=z\pi_2^3,\\ \delta z&=-z(\pi_1^1-\pi_3^3). \end{aligned}$$

Лесно се съобразява от (2.8), че $\delta(y^2-xz)=0$, т. е. дискриминантата $D=y^2-xz$ на втората квадратична форма е абсолютна инварианта на повърхнината.

От (2.8) заключаваме, че в общия случай $z\neq0$. Изключваме от разглеждане повърхнините, за които $z=0$. За тях линиите $\omega_1^2=0$ са едно-система асимптотични линии. Това са прави линии, през всяка точка от които оскулачните им равнини минават през оста l. Изключваме и параболичните повърхнини, т. е. предполагаме, че през всяка точка на повърхнината минават точно две различни асимптотични линии. Можем да постигнем $y=0$. Да видим какво означава това геометрично.

През всяка точка B_1 на повърхнината (B) минава инвариантната линия $\omega_1^2=0$. За спрегнатата ѝ линия относно двойката асимптотични линии имаме $\overline{\omega}_1^3=0$. Тогава

$$(dB_1)_{\text{спрегн}}=\overline{\omega}_1^1 B_1+\overline{\omega}_1^2 B_2,$$

което показва, че B_2 лежи върху тангентата към тази линия $\overline{\omega}_1^3=0$ в точката B_1. Обратното е също вярно: ако върхът B_2 лежи върху тангентата към спрегнатата линия на линията $\omega_1^2=0$, то $y=0$. Формулираме

Теорема 4. Необходимото и достатъчно условие тангентите (B_1, B_3+B_4), (B_1, B_2) да са спрегнати относно двойката асимптотични тангенти към повърхнината (B) е $y=0$.

Сега вече реперът $B_1B_2B_3B_4$ геометрически е напълно определен. Ще го наричаме полуканоничен репер. От последното равенство на (2.8) се вижда, че можем да постигнем $z=1$. Това е свързано с избора на единичната точка E на координатната система (B_1, B_2, B_3, B_4, E). Тогава $\pi_2^3=0$, $\pi_1^1-\pi_3^3=0$, а от (2.5) получаваме

$$\omega_2^4-\omega_2^3=x\omega_1^2,\quad \omega_4^4-\omega_3^3=\omega_1^3. \tag{2.9}$$

Диференцираме външно (2.9) и прилагаме лемата на Картан. Получаваме

$$\begin{aligned} -dx+x(\omega_1^1-\omega_4^4)&=A\omega_1^2+B\omega_1^3,\\ \omega_2^3&=B\omega_1^2+C\omega_1^3,\\ \omega_3^3-\omega_1^1&=C\omega_1^2+E\omega_1^3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Величините x, A, B, C, E са инвариантни. Между x, A, B съществува връзка и следователно повърхнината (B) напълно се определя с четири инварианти: x, B, C, E. За да завършим канонизацията на репера, предполагаме, че детерминантата от върховете на репера има стойност единица, т. е.

$$(B_1\ B_2\ B_3\ B_4)=1. \tag{2.11}$$

От (2.11) получаваме зависимостта

$$2\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4=0, \tag{2.12}$$

която при изменение само на вторичните параметри добива вида

$$2\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_4^4=0. \tag{2.13}$$

Сега всички вторични форми станаха нули, откъдето $\delta B_i=0$, $i=1, 2, 3, 4$, което показва, че каноничният репер е построен. Всички форми ω_i^j се изразяват само чрез двете базисни форми ω_1^2, ω_1^3 и коефициенти, които имат инвариантен характер. От (2.4), (2.9) и (2.12) получаваме

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^1 = -\frac{1}{2} C\omega_1^2 - \frac{1}{4}(2E+1)\,\omega_1^3, \quad \omega_1^4=\omega_1^3,\\
(2.14)\qquad &\omega_2^3 = B\omega_1^2 + C\omega_1^3, \quad \omega_2^4=(x+B)\,\omega_1^2+C\omega_1^3,\\
&\omega_3^3=\frac{1}{2} C\omega_1^2 + \frac{1}{4}(2E-1)\,\omega_1^3, \quad \omega_4^4=\frac{1}{2} C\omega_1^2+\frac{1}{4}(2E+3)\,\omega_1^3.
\end{aligned}
$$

Структурните уравнение на пространството B_2^2 налагат на инвариантите x, A, B, C, E връзките

$$
\begin{aligned}
&[dC\omega_1^2]+[dE\omega_1^3]=0,\\
&[dA\omega_1^2]+[dB\omega_1^3]+\{BC-A(E+1)\}\,[\omega_1^2\omega_1^3]=0,\\
(2.15)\qquad &[dB\omega_1^2]+[dC\omega_1^3]+\{C^2-EB-1\}\,[\omega_1^2\omega_1^3]=0,\\
&[d(x+B)\,\omega_1^2]+[dC\omega_1^3]+\{C^2-(E+1)(x+B)\}\,[\omega_1^2\omega_1^3]=0.
\end{aligned}
$$

Въвеждаме инвариантните производни $A_{,1}$, $A_{,2}$, ..., определени от равенствата

$$
\begin{aligned}
&dA = A_{,1}\omega_1^2 + A_{,2}\omega_1^3,\\
(2.16)\qquad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&dx = x_{,1}\omega_1^2 + x_{,2}\omega_1^3
\end{aligned}
$$

Сега системата (2.15) добива вида

$$
\begin{aligned}
&C_{,2}-E_{,1}=0,\\
(2.17)\qquad &A_{,2}-B_{,1}-BC+A(E+1)=0,\\
&B_{,2}-C_{,1}-C^2+EB+1=0,\\
&x_{,2}+B_{,2}-C_{,1}-C^2+(E+1)(x+B)=0.
\end{aligned}
$$

Конгруенции, придружаващи повърхнината. Разглеждаме конгруенцията от прави, произволна права на която определяме с точките B_1, B_2. Произволна точка M от правата B_1B_2 има представяне

$$(2.18)\qquad M(\varrho, \sigma)=\varrho B_1+\sigma B_2.$$

Като диференцираме (2.18), получаваме

$$
\begin{aligned}
(2.19)\qquad dM=&(d\varrho+\varrho\omega_1^1+\sigma\omega_1^2)\,B_1+(d\sigma+\sigma\omega_1^1+\varrho\omega_1^2)\,B_2\\
&+(\varrho\omega_1^3+\sigma\omega_2^3)\,B_3+(\varrho\omega_1^3+\sigma\omega_2^4)\,B_4.
\end{aligned}
$$

Ако точката F е фокус, трябва да бъде изпълнено

$$(2.20)\qquad dF=\lambda B_1+\mu B_2.$$

Сравняваме (2.19) и (2.20). Получаваме

$$(2.21')\qquad d\varrho+\varrho\omega_1^1+\sigma\omega_1^2=\lambda, \quad d\sigma+\sigma\omega_1^1+\varrho\omega_1^2=\mu,$$

$$(2.21'') \qquad \varrho\omega_1^3+\sigma\omega_2^3=0, \quad \varrho\omega_1^3+\sigma\omega_2^4=0.$$

Като извадим от второто равенство на (2.21″) първото, получаваме

$$(2.22) \qquad \sigma(\omega_2^4-\omega_2^3)=0.$$

Имаме следните възможности:

1) $\sigma=0$. Развиваемият рой на конгруенцията се дава с равенството $\omega_1^3=0$. Той има за централна точка $F_1=B_1$.

2) $\sigma \neq 0$. Развиваемият рой на конгруенцията се дава с равенството $\omega_2^3=\omega_2^4$. Той има за централна точка $F_2=\omega_2^3 B_1-\omega_1^3 B_2$.

От 1) и 2) следва, че развиваемите роеве на конгруенцията се определят с анулирането на квадратичната форма $\varphi=\omega_1^3(\omega_2^4-\omega_2^3)$, която е инвариантна и при полуканоничен репер на повърхнината приема вида

$$(2.23) \qquad \mathrm{I}=\varphi=x\omega_1^2\omega_1^3.$$

Сега лесно съобразяваме, че нулевите линии на тази квадратична форма върху повърхнината са онези линии, които ние избрахме за параметрични линии върху повърхнината.

§ 3. Налагане на повърхнини

Налагането на повърхнините в пространството B_2^2 се въвежда напълно аналогично на това в проективното пространство [2] и двуосното пространство [3].

Ще казваме, че повърхнината $(\bar{B})$ се налага върху повърхнината (B) от ред n в смисъл на Картан, ако между точките на двете повърхнини е установено взаимно еднозначно съответствие и на всяка двойка съответни точки $\bar{B}_1$ и B_1 е присъединена колинеация K, запазваща абсолюта на простанството B_2^2, която преобразува повърхнината $(\bar{B})$ в повърхнина (B^*), така че

1) точките B_1^* и B_1 съвпадат и

2) всички точки, принадлежащи на техните диференциални околности от n-ти ред, също съвпадат.

Ще разгледаме налагане от първи и втори ред. За безкрайно малки от първи ред приемаме нарастванията на координатите на повърхнината при прехода от точката B_1 към точката B_1+dB_1. Съгласно определението, за да имаме наложимост от втори ред, трябва да бъде изпълнено

$$(3.1) \qquad B_1^*+dB_1^*+\frac{1}{2}d^2B_1^*=\left(\varrho+\varrho_1+\frac{1}{2}\varrho_2\right)\left(B_1+dB_1+\frac{1}{2}d^2B_1\right),$$

където ϱ е скаларна функция на u, v, а ϱ_1 и ϱ_2 са съответно линейна и квадратична форма на du, dv. От (3.1), като приравним коефициентите пред величините от един и същ ред, получаваме

$$(3.2_1) \qquad B_1^*=\varrho B_1,$$

$$(3.2_2) \qquad dB_1^*=\varrho_1 B_1+\varrho dB_1,$$

$$(3.2_3)\qquad d^2B_1^* = \varrho_2 B_1 + 2\varrho_1 dB_1 + \varrho d^2 B_1 .$$

С точката B_1 от повърхнината (B) свързваме полуканоничен репер $B_1B_2B_3B_4$, а с точката $\bar{B}_1$ — репер $\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4$, който след преобразуването K съвпада с $B_1B_2B_3B_4$. Инфинитезималните преобразувания на двата репера определяме съответно с

$$(3.3)\qquad dB_i = \omega_i^j B_j, \quad d\bar{B}_i = \bar{\omega}_i^j \bar{B}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Диференциалните форми $\bar{\omega}_a^b$ не зависят от K и можем да считаме, че $dB_i^* = \bar{\omega}_i^j B_j^*$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. От (3.2_1) лесно се съобразява, че $\varrho = 1$. Равенството (3.2_2) осигурява наложимост от първи ред. От него следват

$$(3.4_1\qquad \bar{\omega}_1^1 = \omega_1^1 + \varrho_1 ,$$

$$(3.4_2)\qquad \bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 , \quad \bar{\omega}_1^3 = \omega_1^3 , \quad \bar{\omega}_1^4 = \omega_1^3 .$$

Равенството (3.4_1) определя линейната диференциална форма ϱ_1, а (3.4_2) — вида на съответствието между двете повърнини. От (3.4_2) веднага следва $\bar{\omega}_1^3 = \bar{\omega}_1^4$, което показва, че реперът $\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_2\bar{B}_4$ трябва да бъде от типа на репера $B_1B_2B_3B_4$. Следователно (3.4_1) и (3.4_2) не налагат ограничения на повърхнината $(\bar{B})$. Така установихме следната

Теорема 5. В B_2^2 всеки две повърхнини са наложими от първи ред.

За да имаме налагане от втори ред, трябва всички равенства (3.2) да бъдат изпълнени. От (3.2_1) и (3.2_2) получихме (3.4_1) и (3.4_2). Остава да разгледаме (3.2_3). От него по аналогичен начин получаваме

$$(3.5_1)\qquad d\tilde{\omega}_1^1 + (\tilde{\omega}_1^1)^2 = \varrho_2 ,$$

$$(3.5_2)\qquad \tilde{\omega}_2^3 \omega_1^2 + (\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_1^1)\, \omega_1^3 = 0,$$

$$(3.5_3)\qquad \tilde{\omega}_2^4 \omega_1^2 + (\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_1^1)\, \omega_1^3 = 0,$$

като сме положили $\tilde{\omega}_i^j = \bar{\omega}_i^j - \omega_i^j$.

Като диференцираме външно (3.4_2), получаваме

$$(3.6_1)\qquad [\tilde{\omega}_2^3 \omega_1^2] + [\tilde{\omega}_3^3 - \omega_1^1 , \ \omega_1^3] = 0,$$

$$(3.6_2)\qquad [\tilde{\omega}_2^4 \omega_1^2] + [\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_1^1 , \ \omega_1^3] = 0.$$

Решаваме съвместно (3.5_2), (3.6_1) и (3.5_3), (3.6_2) и като вземем пред вид, че имаме налагане по всички направления, получаваме

$$(3.7)\qquad \tilde{\omega}_2^3 = \tilde{\omega}_2^4 = \tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_1^1 = 0.$$

Но $\tilde{\omega}_1^1 = \varrho_1$ и за двата репера $[B_i]$ и $[\bar{B}_i]$, като въведем нормировките $(B_1B_2B_3B_4) = 1$, $(\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4) = 1$, получаваме $\varrho_1 = 0$. Получихме, че всички форми $\tilde{\omega}_i^j$ са нули, т. е. за всички форми $\bar{\omega}_i^j$. ω_i^j е изпълнено $\bar{\omega}_i^j = \omega_i^j$. Това означава, че повърхнините (B) и $(\bar{B})$ са еквивалентни. Можем да формулираме следната

Теорема 6. Ако между две повърхнини в пространството B_2^2 съществува налагане от втори ред, те са еквивалентни, т. е. след подходяща колинеация съвпадат.

Сега ще разгледаме налагане на повърхнини и придружаващите конгруенции. Към условията (2.4) за налагане на повърхнините (B) и $(\bar{B})$ от първи ред ще прибавим условията за налагане от първи ред на придружаващите конгруенции. Налагането на две конгруенции се дефинира аналогично както налагане на две повърхнини. Условията за налагане от първи ред на придружаващите конгруенции са

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} (\bar{B}_1^*\bar{B}_2^*) &= (B_1B_2),\\ d(\bar{B}_1^*\bar{B}_2^*) &= d(B_1B_2)+\sigma_1(B_1B_2). \end{aligned}$$

Като вземем пред вид, че

$$(3.9)\qquad d(B_1B_2)=2\omega_1^1(B_1B_2)+\omega_2^3(B_1B_3)+\omega_2^4(B_1B_4)+\omega_1^3(B_3B_2)+\omega_1^3(B_4B_2),$$

получаваме

$$(3.10)\qquad 2\tilde{\omega}_1^1=\sigma_1,\quad \tilde{\omega}_2^3=0,\quad \tilde{\omega}_2^4=0.$$

Диференцираме външно (3.4_2) и последните две равенства на (10). Получаваме

$$(3.11)\qquad [\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3,\ \omega_2^3]=0,\quad [\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3,\ \omega_1^3]=0,$$

$$(3.12)\qquad [\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4,\ \omega_2^4]=0,\quad [\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4,\ \omega_1^3]=0.$$

Решаваме съвместно равенствата (3.11) и получаваме $\tilde{\omega}_3^3=\tilde{\omega}_1^1$. Аналогично от (3.12) веднага следва $\tilde{\omega}_4^4=\tilde{\omega}_1^1$. Ако предположим нормировките $(B_1B_2B_3B_4)=1$, $(\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4)=1$, получаваме $\sigma_1=0$ и тогава

$$(3.13)\qquad \tilde{\omega}_1^1=\tilde{\omega}_2^2=\tilde{\omega}_3^3=\tilde{\omega}_4^4=0.$$

Получихме, че за всички форми $\bar{\omega}_i^j$ и ω_i^j са изпълнени равенствата $\bar{\omega}_i^j=\omega_i^j$. Следователно доказахме следната

Теорема 7. Ако между две повърхнини съществува налагане от първи ред така, че и придружаващите конгруенции са наложими от първи ред, двете повърхнини са еквивалентни, т. е. след подходяща колинеация съвпадат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана. Москва — Ленинград, 1948.
2. Фиников, С. П. Проективно-дифференциальная геометрия. Москва — Ленинград, 1937.
3. Станилов, Г Повърхнини и конгруенции в двуосното пространство. Известия на Мат. инст. при БАН, 9, 1966, 115—132.
4. Станилов, Г. Геометрия одного пространства с фундаментальной семипараметрической группой. Доклады БАН, 20, 1967, № 4, 261—264.

Постъпила на 29. VIII. 1967 г.

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТОМ ДВЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ДВЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ИХ ОБЩЕЙ ПРЯМОЙ

Адриян Борисов

(Резюме)

Пространство B_2^2 определяется двумя действительными плоскостями ε_3, ε_4 и двумя действительными точками E_3, E_4 на их пересекающей. Используем реперы, введенные Станиловым [4].

В § 1 строим дифференциально-геометрический аппарат для исследования кривых. Равенства (1.8) определяет полуканонический репер, связанный с кривой C: $A_1 = A_1(t)$. Точка A_2 лежит на касательной прямой кривой C в точке A_1. Мы получаем канонический репер, предполагая нормировки $a^* = b^* = 1$ и (1.14). Имеют место равенства (1.17). Единственные инварианты кривой суть ψ_1^2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Из (1.1) и (1.17) получаем систему Френе. При помощи (1.19) даем геометрическое толкование проективных кривизн $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Если $\varkappa_1 = \varkappa_2$, то кривая C равнинная.

В § 2 строим дифференциально-геометрический аппарат для исследования поверхностей. Полуканонический репер, связанный с поверхностью $(B): B_1 = B_1(u, v)$, определяется с помощью равенств $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $y = 0$. Точка B_2 лежит на касательной к сопряженной линии k линии $\omega_1^2 = 0$. Уравнение $\mathrm{II} = 0$ дает нам асимптотические линии поверхности. Нормировки $z = 1$ и (2.12) ведут к каноническому реперу. Основными формулами являются (2.14) и (2.17). Вводим конгруэнцию, сопровождающую поверхность. Уравнение $\mathrm{I} = 0$ определяет развертывающиеся поверхности конгруэнции.

В § 3 рассматриваем наложение поверхностей и конгруэнций. Любые две поверхности наложимы первого порядка. Если две поверхности наложимы второго порядка, они эквивалентные. Тот же результат получается и если к условию наложений первого порядка двух поверхностей присоединить условия наложения первого порядка сопровождающих конгруэнций.

KURVEN UND FLÄCHEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUM, DESSEN FUNDAMENTALFLÄCHE AUS ZWEI REELLEN EBENEN UND ZWEI REELLEN PUNKTEN AUF DEREN SCHNITTGERADEN BESTEHT

Adrian Borisov

(Zusammenfassung)

Der Raum B_2^2 wird durch zwei reelle Ebenen ε_3, ε_4 und zwei reellen Punkten E_3, E_4 auf deren Schnittgeraden l bestimmt. Es werden die von Stanilov [4] eingeführten Bezugsysteme benützt.

Im § 1 wird der differential-geometrische Apparat zur Untersuchung von Kurven aufgebaut. Die Gleichungen (1.8) bestimmen das mit der Kurve C verbundene halbkanonische Bezugsystem: $A_1 = A_1(t)$. Der Punkt A_2 liegt auf der Tangente zur Kurve C im Punkte A_1. Unter Voraussetzung der Normierungen $a^* = b^* = 1$ und (1.14) erzielen wir ein kanonisches Bezugsystem. Die Gleichungen (1.17) sind erfüllt. Die einzigen Invarianten der Kurve sind ψ^2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Aus (1.1) und (1.17) erhalten wir das Frenetsche System. Durch (1.19) wird die geometrische Deutung der projektiven Krümmungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ gegeben. Wenn $\varkappa_1 = \varkappa_2$, so ist C eine ebene Kurve.

Im § 2 wird der differential-geometrische Apparat zur Untersuchung von Flächen aufgebaut. Das mit der Fläche $(B): B_1 = B_1(u_1\ v)$ verbundene halbkanonische Bezugsystem wird durch die Normierungen $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $y = 0$ bestimmt. Der Punkt B_2 liegt auf der Tangente der konjugierten Linie zur Linie $\omega_1^2 = 0$. Die Gleichung $\mathrm{II} = 0$ ergibt die asymptotischen Linien der Fläche. Die Normierungen $z = 1$ und (2.12) führen zu einem kanonischen Bezugsystem. Die Grundformeln sind (2.14) und (2.17). Wir führen eine Kongruenz ein, die die Fläche begleitet. Die Gleichung $\mathrm{I} = 0$ bestimmt die abwickelbaren Regelscharen der Kongruenz.

Im § 3 betrachten wir die Verbiegung von Flächen und die Kongruenzen. Je zwei Flächen sind verbiegbar von der ersten Ordnung. Wenn zwei Flächen von zweiter Ordnung verbiegbar sind, so sind sie äquivalent. Dasselbe Resultat bekommt man auch wenn zu den Verbiegbarkeitsbedingungen erster Ordnung für zwei Flächen die Verbiegbarkeitsbedingungen erster Ordnung der begleitenden Kongruenzen hinzugefügt werden.