БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ВЪРХУ ИНТЕГРАЛНАТА ГЕОМЕТРИЯ НА ОБОБЩЕНИ ДВУОСНИ ПРОСТРАНСТВА

Грозьо Станилов

В последните години създадената от Блашке и неговите ученици интегрална геометрия е отново обект на развитие. Работи в тази област на геометрията в последно време са публикувани от аржентинския математик Л. Сантало, от Дринфелд и Н. Луценко от Харков, Г. Врънчану и М. Стока от Румъния, Р. Зуланке от Берлин, нашата работа [2] и други. На Третата междувузовска конференция по геометрия в СССР, състояла се през септември 1967 г., ние докладвахме една съвместна работа със Зуланке, посветена на една формула на Крофтон за конгруенции от прави в произволно мерно евклидово пространство.

Настоящата работа, резюме от която беше докладвано на Втория конгрес на българските математици (август — септември 1967 г.), се състои от три части. В първата част се дава аналог на една формула на Сантало — формула (2) от § 1, отнасяща се за проективното пространство P_n. Така се получава по запис същата формула (20), като сега в бипланарното пространство B_{2n+1} вместо разномерността $2n+1$ участвува само числото n. Привеждат се някои частни случаи, необходими при по-нататъшните ни разглеждания. Намерена е една интересна геометрична характеристика за линейните подпространства P_n в бипланарното пространство B_{2n+1}. Указан е един инвариантен клас от бипланарни пространства — пространствата B_{k^2+k-1}. Впрочем, тръгвайки по указания път, могат да се отбележат и други типове бипланарни пространства. Резултатите имат очевидно проективен характер и могат по този път да се укажат различни класове от проективни пространства. Така например, ако във формула (2) на Сантало се положи $s_k=k-1$, получаваме

$$n=\frac{1}{2}(k^2+k-2).$$

Следователно единствените проективни пространства P_n, съдържащи множества, състоящи се от флагови елементи и притежаващи инвариантни мерки, са тези, при които размерността n се изчислява по горната формула.

Първата част завършва с откриването на една интересна формула на Крофтон, свързваща три плътности.

Във втората част се доказва съществуването на плътност и мярка на хиперповърхнина в бипланарното пространство. Освен това намерената плътност се интерпретира като проективна плътност в абсолютното пространство j_n (или k_n). Тези изследвания се обобщават в третата част за едно пространство $P_n^{p,q}$ с проективна структура и абсолют, състоящ се от две произволно мерни равнини, чиито измерения са подчинени на релацията

$$p+q=n-1.$$

§ 1. Системи от линейни подпространства в бипланарното пространство

Нека P_n е n-мерно проективно пространство. H е множество от геометрични елементи, като всеки геометричен елемент се състои от една крайна система от чужди помежду си линейни подпространства $P_{s_1}, P_{s_2}, \ldots, P_{s_k}$ на пространството P_n и следователно удовлетворяващи условието

$$s_1+s_2+\ldots+s_k+k-1\leq n. \tag{1}$$

Необходимото и достатъчно условие множеството H да има мярка, инвариантна относно преобразуванията на проективната група в P_n, е да бъде изпълнено равенството

$$s_1+s_2+\ldots+s_k+k-1=n. \tag{2}$$

Този общ резултат принадлежи на Сантало [3]. При $n=2$ твърдението е доказано от Варга сравнително по-рано [6].

Най-напред си поставяме за цел да намерим един аналог на формула (2) за бипланарното пространство от измерение $2n+1$. Така намираме формула (20), която по запис е същата като формула (2), само че в дясната страна вместо числото $2n+1$ стои числото n.

Нека P_{2n+1} е произволно нечетномерно проективно пространство. В него фиксираме две реални кръстосани n-мерни равнини (наричани абсолютни) j_n, k_n и разглеждаме онези преобразувания на проективната група в пространството P_{2n+1}, които оставят в покой проективните пространства j_n, k_n. Тези преобразувания образуват една група G_N от преобразувания, която се нарича бипланарна група, съответно бипланарни преобразувания. Съгласно Ерлангенската програма на Ф. Клайн съвкупността от всички величини, фигури, свойства за тях и прочие, инвариантни относно групата G_N, е една геометрия, наричана бипланарна геометрия. Съответното пространство, за което условно се казва, че е подпространство на проективното пространство P_{2n+1}, се нарича бипланарно пространство и ще го означаваме с B_{2n+1}. В това пространство Б. Петканчин [1] разглежда диференциалната геометрия на някои роеве прави от най-общ тип. А. Широков води своите диференциалногеометрични изследвания в бипланарното пространство, но когато равнините j_n, k_n са комплексно-спрегнати [4].

В настоящата работа ние ще използваме репери $(A_1, \ldots, A_{2n+2})$ от следния тип: върховете $A_1, \ldots, A_{n+1}$ принадлежат на абсолютната равнина j_n, а върховете $A_{n+2}, \ldots, A_{2n+2}$ принадлежат на другата абсолютна равнина k_n. Деривационните уравнения за пространството B_{2n+1} са

(3) $$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad \alpha,\beta=1,\ldots,2n+2,$$

а структурните уравнения са

(4) $$D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta.$$

Условията за инвариантност (неподвижност) на абсолютните равнини j_n и k_n се дават съответно с уравненията

(5) $$\omega_i^p=0, \quad \omega_q^j=0, \quad i,j=1,\ldots,n+1; \quad p,q=n+2,\ldots,2n+2.$$

Както обикновено, несъщественото ограничение детерминантната от координатите на върховете на репера да бъде равна на единица,

(6) $$(A_1,\ldots,A_{2n+2})=1,$$

води до зависимостта

(7) $$\sum_{\alpha=1}^{2n+2}\omega_\alpha^\alpha=0.$$

Сега сме в състояние да определим реда N на бипланарната група G_N. Тъй като в (5) имаме $2(n+1)^2$ уравнения, а (7) съдържа само едно уравнение, като извадим от общия брой $(2n+2)^2$ на формите ω_α^β числото $2(n+1)^2+1$, ще получим реда

$$N=2n^2+4n+1.$$

За бипланарното пространство B_{2n+1} могат да се въведат редица понятия, аналогични на тези от тримерното двуосно пространство. Така например точките от абсолютните равнини се наричат безкрайни, а всички други точки — крайни. Права, която сече двете абсолютни равнини, се нарича безкрайна права на бипланарното пространство; употребява се още терминът трансверзала на кръстосаните равнини j_n, k_n. Най-напред ще формулираме следната помощна

Теорема 1. През всяка крайна точка на бипланарното пространство минава точно една безкрайна права на същото пространство.

Действително нека M е крайна точка. Тя може да се представи като линейна комбинация на всичките точки A_α:

$$M=\lambda^i A_i+\mu^p A_p$$

с известни коефициенти λ^i, μ^p, като едновременно всичките λ^i не могат да бъдат равни на нула; същото се отнася и за коефициентите μ^p. Приемаме уговорката за сумиране по един и същ горен и долен индекс в един и същ член, така че вместо $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda^i A_i$ ще пишем само $\lambda^i A_i$.

Търсим точка $M_1=\lambda_1^i A_i$ (с неизвестни коефициенти λ_1^i) от равнината j_n, така че правата MM_1 да сече и равнината k_n. Правата MM_1 има параметрично представяне

$$P=M+\lambda M_1=(\lambda^i+\lambda\lambda_1^i)A_i+\mu^p A_p$$

с параметър λ. Условието точката $M_2 = P$ да принадлежи на равнината k_n води до

$$\lambda_1^i = -\frac{1}{\lambda}\lambda^i, \quad M_2 = \mu^p A_p.$$

С това точката $M_1 \in j_n$ е еднозначно определена. Еднозначно се определя и прободът M_2 на правата MM_1 с равнината k_n. Нещо повече, с подходящо пренормиране на координатите на точката M_1 постигаме представянето

$$M = M_1 + M_2. \tag{8}$$

Нека P_t е t-мерно линейно подпространство на бипланарното пространство B_{2n+1}, съставено само от крайни точки. Лесно се съобразява, че ако

$$t \leq n, \tag{9}$$

такива подпространства съществуват. Ние ще разглеждаме само такива (крайни) подпространства.

Произволно t-мерно линейно подпространство P_t ще определим с помощта на точките

$$M_\varrho = A_\varrho + A_{n+1+\varrho},$$

като $\varrho = s, \ldots, s+t$. Тук числото s е фиксирано и подчинено на условието $1 \leq s \leq n+1$. От равенството

$$M_{s+m} = A_{s+m} + A_{n+1+s+m}, \quad m = 0, 1, \ldots, t, \tag{10}$$

следва, че стационарната група на елемента — подпространството P_t — се определя с напълно интегруемата система на Пфаф

$$\begin{aligned} &\omega_{s+m}^{s+m'} - \omega_{n+1+s+m}^{n+1+s+m'} = 0,\\ &\omega_{s+m}^{\bar{i}_{m'}} = 0,\\ &\omega_{n+1+s+m}^{\bar{p}_{m'}} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

като

$$m, m' = 0, 1, \ldots, t; \quad \bar{i}_{m'} = 1, 2, \ldots, n+1, \quad \bar{i}_{m'} \neq s+m';$$

$$\bar{p}_{m'} = n+2, \ldots, 2n+2, \quad \bar{p}_{m'} \neq n+1+s+m'.$$

Системата (11) съдържа

$$\varphi(t) = (t+1)(2n+1-t) \tag{12}$$

уравнения, а това е тъкмо броят на параметрите, от които се определя всяко линейно подпространство P_t. Значи всяко P_t в бипланарното пространство, а и въобще в проективното пространство се определя с $\varphi(t)$ координати или, иначе казано, пространството Σ_t, съставено от елементи P_t, е $\varphi(t)$-мерно.

Следното твърдение ще формулираме като

Теорема 2. Функцията $\varphi(t)$ при фиксирано n добива максимум за $t=n$ и

$$\varphi_{\max}(n)=(n+1)^2, \tag{13}$$

т. е. пространството Σ_n от n-мерните линейни пространства P_n има максимално измерение $(n+1)^2$.

Очевидно подпространствата P_n са обобщение на правите P_1 в тримерното двуосно (проективно) пространство. Ние подчертаваме горното свойство на подпространствата P_n поради изключителната роля, която те играят в интегралната геометрия на бипланарното пространство.

Сега образуваме външната форма от степен $\varphi(t)$:

$$\Omega^s_{\varphi(t)}=\prod\omega^{\bar{i}m'}_{s+m}\wedge\prod\omega^{\bar{p}m'}_{n+1+s+m}\wedge\prod(\omega^{s+m'}_{s+m}-\omega^{n+1+s+m'}_{n+1+s+m}). \tag{14}$$

В това външно произведение влизат всички форми от левите страни на уравненията на системата (11), а $\prod$ е знак за външно умножение. Без да се впускаме в изчисления, които са дълги и отегчителни, но не представляват принципни трудности, ще формулираме следната

Теорема 3.

$$D\Omega^s_{\varphi(t)}=(n+1)\sum_{m=0}^{t}(\omega^{s+m}_{s+m}+\omega^{s+n+1+m}_{s+n+1+m})\wedge\Omega^s_{\varphi(t)}. \tag{15}$$

Както обикновено, тук D е символ за външен диференциал. При извеждане на тази формула ние оставихме s произволно, като са изпълнени неравенствата

$$1\leq s+t\leq n+1.$$

В съответствие с [3] необходимото и достатъчно условие за съществуване на плътност на множество, съставено от линейни подпространства P_t, инвариантна относно преобразованията на бипланарната група G_N, се дава с равенството

$$\sum_{m=0}^{t}(\omega^{s+m}_{s+m}+\omega^{s+n+1+m}_{s+n+1+m})=0. \tag{16}$$

Тъй като между формите ω^{α}_{α} с равни индекси съществува единственото съотношение (7) (без да се стеснява групата G_N), то (16) при $s=1$ съвпада със (7) тогава и само тогава, когато

$$t=n, \tag{17}$$

т. е. множеството H принадлежи на максимално-мерното пространство Σ_n. И така имаме

Теорема 4. Необходимото и достатъчно условие едно множество H_t, съставено от t-мерни линейни подпространства P_t, да притежава плътност (съответно мярка), инвариантна относно бипланарната група G_N, е да бъде изпълнено (17), т. е. множеството H_t, както и пространството Σ_t да бъдат максимално-мерни. Инвариантната плътност се дава с формата $\Omega^1_{\varphi(n)}$, а интегралната мярка — чрез $\varphi(n)$-кратния интеграл от тази форма, разпрострян върху множеството (областта) H_n.

Тази теорема е една важна геометрична характеристика за линейните подпространства P_n.

Формула (17), съответно теорема 4 може непосредствено да се обобщи. За целта разглеждаме една крайна система P от линейни подпространства $P_{s_1}, \ldots, P_{s_k}$ без общи елементи. Най-напред навсякъде в предните разглеждания поставяме $s=1$, $t=s_1$. По този начин първото подпространство P_{s_1} се определя с точките $M_1, \ldots, M_{s_1+1}$. Полагаме $s=s_1+2$, $t=s_2$ и следователно второто подпространство P_{s_2} се определя с точките $M_{s_1+2}, \ldots, M_{s_1+s_2+2}$. Поставяме $s=s_1+\cdots+s_{k-1}+k$, $t=s_k$ и подпространството P_{s_k} се определя с точките $P_{s_1+\ldots+s_{k-1}+k}, \quad P_{s_1+\ldots+s_k+k}$. Конструираме външната форма

$$\Omega=\Omega^{s_1}\wedge\Omega^{s_2}\wedge\ldots\wedge\Omega^{s_k}. \tag{18}$$

С непосредствено пресмятане намираме, че

$$D\Omega=(n+1)\sum_{m=0}^{s_1+\ldots+s_k+k-1}(\omega^{1+m}_{1+m}+\omega^{n+2+m}_{n+2+m})\wedge\Omega. \tag{19}$$

Оттук следва, че $D\Omega=0$ точно когато е изпълнено равенството

$$s_1+s_2+\cdots+s_k+k-1=n. \tag{20}$$

Така доказахме следната

Теорема 5. Необходимото и достатъчно условие едно множество H от елементи P, като всеки елемент P е една крайна система от чужди помежду си линейни подпространства $P_{s_1}, \ldots, P_{s_k}$ и удовлетворяващи условието

$$s_1+s_2+\cdots+s_k+k-1\leq n, \tag{21}$$

да притежава плътност (мярка), инвариантна относно бипланарната група G_N, е да бъде изпълнено равенството (20).

Теорема 5, съответно формула (20), съдържа теорема 4 като частен случай, който се получава при $k=1$. Ще отбележим още един важен частен случай. За целта да положим в (20) $s_1=s_2=\ldots=s_k=0$. Геометрично това означава, че всяко от подпространствата се изражда в точка: $P_{s_1}\equiv M_1, \ldots, P_{s_k}\equiv M_k$. Значи елементът P е една крайна система от k точки. Формула (20) показва, че

$$k=n+1. \tag{22}$$

Така имаме следната

Теорема 6. Необходимото и достатъчно условие едно множество H, съставено от k-торки точки, да притежава инвариантна плътност (мярка) е да бъде изпълнено равенството (22).

Ще направим две приложения на намерените резултати.

Клас от бипланарни пространства. Ще се опитаме да удовлетворим формула (20), като положим $s_1=0$, $s_2=1, \ldots, s_k=k-1$. В този случай елементът P се състои от неинцидентни точки, права, двумерна равнина,..., $(k-1)$-мерна равнина. Такъв елемент ще наричаме накратко **флагов елемент**. Формула (20) ни дава

$$k^2+k-1=2n+1. \tag{23}$$

В дясната страна на тази формула стои размерността $2n+1$ на бипланарното пространство B_{2n+1}. Можем да формулираме следната

Теорема 7. Едно бипланарно пространство B_{2n+1} допуска множества H, съставени от флагови елементи $P=(P_0, P_1,\dots, P_{k-1})$, като P_s са чужди помежду си линейни подпространства и удовлетворяващи условието (21), притежаващи плътности, инвариантни относно бипланарната група G_N, точно когато е в сила (23).

С тази теорема се открива един клас от бипланарни пространства. Именно измерението на тези пространства е k^2+k-1. Тримерното двуосно пространство не притежава това свойство. Напротив, петмерното бипланарно пространство принадлежи на указания клас. Действително сега $n=2$ и (23) дава $k=2$. Следователно в B_5 съществуват множества, съставени от флагови елементи $P=(P_0, P_1)$, притежаващи инвариантна мярка.

Забележка. В тримерното двуосно пространство множество, съставено от двойки неинцидентни точка+крайна права, притежава инвариантна мярка, но това не противоречи на казаното по-горе, тъй като сега съотношението (21) е нарушено.

Очевидно съществуват безбройно много бипланарни пространства от указания клас. Достатъчно е да се вземе произволно естествено число k и да се изчисли $n=\frac{1}{2}k(k+1)-1$.

Една формула на Крофтон. Както видяхме по-горе, множество, състоящо се от $(n+1)$-торки точки $M_1, M_2,\dots, M_{n+1}$, притежава инвариантна плътност. Тъй като

$$M_i=A_i+A_{n+1+i}, \quad i=1, 2,\dots, n+1,$$

то стационарната подгрупа на елемента, състоящ се от $(n+1)$ точки $M_1, M_2,\dots, M_{n+1}$, се определя с напълно интегруемата система

$$\begin{gathered}\omega_i^{\bar{i}}=0, \quad \omega_{n+1+i}^{\bar{pi}}=0,\\ \omega_{n+1+i}^{n+1+i}-\omega_i^i=0,\\ i=1,\dots, n+1\,; \quad \bar{i}=1, 2,\dots, n+1, \quad \bar{i}\neq i\,; \quad \bar{pi}\neq n+1+i.\end{gathered} \tag{24}$$

Следователно плътността на разглежданото множество се дава с формата

$$\varphi_{(n+1)(2n+1)}=\prod \omega_i^{\bar{i}}\wedge\prod \omega_{n+1+i}^{\bar{pi}}\wedge\prod\left(\omega_i^i-\omega_{n+1+i}^{n+1+i}\right). \tag{25}$$

от степен $(n+1)(2n+1)$.

От друга страна, да разгледаме n-мерното линейно подпространство P_n, определено с помощта на точките $M_1,\dots, M_{n+1}$. Стационарната подгрупа на елемента P_n се дава с напълно интегруемата система

$$\omega_i^j-\omega_{n+1+i}^{n+1+j}=0, \quad i, j=1, 2,\dots, n+1. \tag{26}$$

Множеството, състоящо се от елементи P_n, притежава инвариантна плътност, която се дава с формата

$$\varphi_{(n+1)^2}=\prod\left(\omega_i^j-\omega_{n+1+i}^{n+1+j}\right) \tag{27}$$

от степен $(n+1)^2$.

Най-сетне системата от $(n+1)$ точки $M_1,\ldots,M_{n+1}$ възбужда в абсолюта j_n една съвкупност от $(n+1)$ точки $A_1,\ldots,A_{n+1}$. Множество в j_n, състоящо се от $(n+1)$-торки точки, притежава инвариантна плътност и това е кинематичната плътност на проективната група в n-мерното проективно пространство j_n. Стационарната подгрупа на системата точки $A_1, A_2,\ldots, A_{n+1}$ се дава с напълно интегруемата система на Пфаф

$$\omega_i^{\bar{i}}=0,\quad i,\bar{i}=1,2,\ldots,n+1\,;\quad i\neq\bar{i}, \tag{28}$$

и плътността на множеството, съставено от $(n+1)$-торки точки в j_n, се дава с формата

$$\varphi_{n(n+1)}=\prod\omega_i^{\bar{i}} \tag{29}$$

от степен $n(n+1)$. Тогава лесно се съобразява, че с точност до знак е в сила формулата

$$\varphi_{(n+1)(2n+1)}=\varphi_{(n+1)^2}\wedge\varphi_{n(n+1)}, \tag{80}$$

свързваща горните три плътности. Тази формула ще наричаме **формула на Крофтон**. Ще формулираме резултата като

Теорема 8. Между плътностите $\varphi_{(n+1)(2n+1)}$ на $(n+1)$-торки точки $M_1, M_2,\ldots, M_{n+1}$, плътността $\varphi_{(n+2)^2}$ на линейните подпространства $P_n=(M_1,\ldots,M_{n+2})$ и кинематичната плътност $\varphi_{n(n+1)}$ в проективното пространство j_n съществува връзката (30).

§ 2. Плътност на хиперповърхнина в бипланарното пространство

Нека F_{2n} е хиперповърхнина в бипланарното пространство B_{2n+1}. Предполагаме, че тя се състои само от крайни точки и произволна нейна точка A представяме в съответствие с (8) като сума от точките $A_1\in j_n$, $A_{n+2}\in k_n$:

$$A=A_1+A_{n+2}. \tag{31}$$

Тъй като важи представянето

$$dA=\omega_{n+2}^{n+2}A+\left(\omega_1^1-\omega_{n+2}^{n+2}\right)A_1+\omega_1^{\bar{i}}A_{\bar{i}}+\omega_{n+2}^{\bar{p}}A_{\bar{p}},\quad \bar{i}=2,\ldots,n+1,$$

$$\bar{p}=n+3,\ldots,2n+3,$$

стационарната подгрупа на точката A се определя с напълно интегруемата система на Пфаф

$$\begin{gathered}\omega_1^{\bar{i}}=0,\quad \omega_{n+2}^{\bar{p}}=0,\\ \omega_1^1-\omega_{n+2}^{n+2}=0.\end{gathered} \tag{32}$$

Ползвайки структурните уравнения (4), лесно може да се покаже, че измененията на главните форми при изменение на вторичните параметри, преобразуващи реперите $A_1, \ldots, A_{2n+2}$, при фиксирана точка A от повърхнината и при запазване на (31) се дават с

$$\begin{aligned}
&\delta\omega_1^{\bar i} = \omega_1^{\bar i}\Pi_1^1 - \omega_1^{\bar j}\Pi_{\bar j}^{\bar i}, \\
(33) \qquad &\delta\omega_{n+2}^{\bar p} = \omega_{n+2}^{\bar p}\Pi_{n+2}^{n+2} - \omega_{n+2}^{\bar q}\Pi_{\bar q}^{\bar p}, \\
&\delta(\omega_1^1 - \omega_{n+2}^{n+2}) = -\omega_1^{\bar i}\Pi_{\bar i}^1 + \omega_{n+2}^{\bar p}\Pi_{\bar p}^{n+2}.
\end{aligned}$$

Тъй като F_{2n} е хиперповърхнина, между главните форми $\omega_1^{\bar i}$, $\omega_{n+2}^{\bar p}$, $\omega_1^1 - \omega_{n+2}^{n+2}$, чийто брой е $2n+1$, съществува едно линейно съотношение, което, без да нарушаваме общността на нашите разглеждания, можем да напишем във вида

$$(34) \qquad \omega_1^1 - \omega_{n+2}^{n+2} = \lambda_{\bar i}\omega_1^{\bar i} + \mu_{\bar p}\omega_{n+2}^{\bar p}.$$

Понеже допирателната равнина η_A в точката A към хиперповърхнината е една хиперравнина, напълно логични са следните предположения за нея: допирателната равнина η_A сече абсолютната равнина j_n в едно $(n-1)$-мерно линейно подпространство j_{n-1}; аналогично η_A сече абсолютната равнина k_n в едно $(n-1)$-мерно линейно подпространство k_{n-1}. Освен това предполагаме, че допирателната равнина η_A не минава по трансверзалата AA_1 през точката A. При тези предположения можем върховете $A_2, \ldots, A_{n+1}$ да поставим в подпространството j_{n-1}, а върховете $A_{n+3}, \ldots, A_{2n+2}$ — в подпространството k_{n-1}. Това означава, че допирателната равнина η_A е определена с точките A, $A_{\bar i}$, $A_{\bar p}$ и можем следователно да запишем

$$(35) \qquad \eta_A = (A, A_2, \ldots, A_{n+1}, A_{n+3}, \ldots, A_{2n+2}).$$

Тъй като $dA \in \eta_A$, следва, че е изпълнено равенството

$$(36) \qquad \omega_1^1 - \omega_{n+2}^{n+2} = 0.$$

Равенствата (34) и (36) показват, че при този избор на репера $A_1, \ldots, A_{2n+2}$ са валидни равенствата

$$(37) \qquad \lambda_{\bar i} = 0, \quad \mu_{\bar p} = 0.$$

Диференцираме външно равенство (36) и след прилагане на известната лема на Картан получаваме

$$\begin{aligned}
&\omega_{\bar i}^1 = \lambda_{\bar i\bar j}\omega_1^{\bar j} + \mu_{\bar i\bar q}\omega_{n+2}^{\bar q}, \\
(38) \qquad & \\
&-\omega_{\bar p}^{n+2} = \mu^*_{\bar p\bar j}\omega_1^{\bar j} + \nu_{\bar p\bar j}\omega_{n+2}^{\bar q},
\end{aligned}$$

като са изпълнени

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\bar i\bar j} = \lambda_{\bar j\bar i}, \quad \nu_{\bar p\bar q} = \nu_{\bar q\bar p}, \\
(39) \qquad & \\
&\mu_{\bar i\bar p} = \mu^*_{\bar p\bar i}.
\end{aligned}$$

Равенствата (38) показват, че формите $\omega^{1}_{\bar{i}}$, $\omega^{n+2}_{\bar{p}}$ са станали главни и можем да търсим техните вариации при изменение на останалите вторични параметри. Намираме например

$$\delta\omega^{1}_{\bar{i}} = -\omega^{1}_{\bar{i}}\,\Pi^{1}_{1} + \omega^{1}_{\bar{j}}\,\Pi^{\bar{j}}_{\bar{i}}. \tag{40}$$

Сега построяваме двете външни форми

$$\Phi_1 = \prod \omega^{\bar{i}}_{1} \wedge \prod \omega^{1}_{\bar{j}} \tag{41}$$

$$\Phi_2 = \prod \omega^{\bar{p}}_{n+2} \wedge \prod \omega^{n+2}_{\bar{q}} \tag{42}$$

от степен $2n$. Като използваме (38), лесно получаваме следното представяне за тях:

$$\Phi_1 = \det \|\mu_{\bar{i}\,\bar{p}}\| \prod \omega^{\bar{i}}_{1} \wedge \prod \omega^{\bar{q}}_{n+2}, \tag{43}$$

$$\Phi_2 = (-1)^{n+1} \det \|\mu^{*}_{\bar{p}\,\bar{i}}\| \prod \omega^{\bar{i}}_{1} \wedge \prod \omega^{\bar{q}}_{n+2}. \tag{44}$$

Равенствата (39) показват, че формите Φ_1, Φ_2 са равни (евентуално) до знак. Следователно от гледна точка на интегралната геометрия те са идентични и по-нататък ще разглеждаме само едната от тях, например първата. Като използваме (33) и (40), лесно може да се покаже, че $\delta\Phi_1 = 0$ и следвайки [5], тази форма може да се приеме за плътност на хиперповърхнината F_{2n}. Така доказахме следната

Теорема 9. Хиперповърхнините F_{2n} от разглеждания тип са измерими и инвариантните им плътности се дават с коя да е от формите Φ_1, Φ_2.

Ще отбележим, че тази теорема е обобщение на една теорема, дадена от Ив. Иванов и отнасяща се до тримерното двуосно пространство.

Геометрична интерпретация на плътността на хиперповърхнина. Намерените две плътности Φ_1, Φ_2 на хиперповърхнината могат да се интерпретират като проективни плътности на определени множества в абсолютните пространства j_n, k_n. Ще покажем това за първата форма.

Според извършената до известна степен специализация на репера A_1, $A_2, \ldots, A_{2n+2}$, придружаващ хиперповърхнината F_{2n}, в абсолютната равнина j_n възниква множество H^n_j, съставено от елементи, като всеки елемент е двойка „точка A_1 + неинцидентна с нея хиперравнина $(A_2, \ldots, A_{n+1})$“. За това множество прилагаме формулата (2) на Сантало. Имаме $k=2$, $s_1=0$, $s_2=n-1$ и формулата на Варга — Сантало е удовлетворена. Следователно множеството H^n_j в проективното пространство j_n притежава инвариантна плътност и лесно се съобразява, че тя е

$$dH^n_j = \prod \omega^{\bar{i}}_{1} \wedge \prod \omega^{1}_{\bar{j}}. \tag{45}$$

Аналогично в абсолюта k_n имаме множество H^n_k с плътност

(46) $$dH^n_k=\prod\omega^{\bar p}_1\wedge\prod\omega^{n+2}_{\bar q}.$$

Съпоставянето на (41) с (45) и на (42) с (46) води до връзките

(47) $$\Phi_1=dH^n_j,$$

(48) $$\Phi_2=dH^n_k.$$

Можем да формулираме следната

Теорема 10. Плътността Φ_1 на хиперповърхнината F_{2n} в бипланарното пространство B_{2n+1} е плътност на множеството H^n_j, определено по указания начин от движението на текущата точка A на хиперповърхнината и допирателната равнина η_A в същата точка.

За случая $n=1$, т. е. за тримерното двуосно пространство, множеството H^1_j се състои от двойка точки върху абсолютната права j_1. Интерпретацията на плътността на повърхнина в двуосното пространство като плътност на това множество H^1_j се дава за пръв път тук.

§ 3. Върху мерките на повърхнини в пространство с абсолют, състоящ се от две непресичащи се равнини

Резултатите в предния параграф може да бъдат обобщени на проективно пространство с абсолют, състоящ се от две чужди помежду си реални равнини с произволни размерности, подчинени на една релация.

Нека P_n е n-мерно проективно пространство. Фиксираме в него две реални кръстосани равнини j_p, k_q от измерения съответно p, q, като предполагаме, че е изпълнено равенството

(49) $$p+q=n-1.$$

Онази клайнова геометрия, за която фундаменталната група от преобразования G_N, $N=N(n, p, q)$, се състои от онези проективни преобразования в проективното пространство P_n, оставящи в покой проективните подпространства j_p, k_q, ще означаваме като геометрия на пространството $P^{p,q}_n$. Лесно може да се покаже, че редът на групата G_N се определя с формулата

$$N(n\,;\,p, q)=p^2+q^2+2(p+q)+1.$$

Очевидно е изпълнено $P^{n,n}_{2n+1}=B_{2n+1}$.

Използваме онези проективни координатни системи A_i, $i=1,\dots,p+1$, B_a, $a=1,\dots,q+1$, за които върховете $A_i\in j_p$, а върховете $B_a\in k_q$. Деривационните уравнения за такъв репер се дават с

(50) $$dA_i=\omega^j_iA_j,\quad i, j=1,\dots,p+1,$$
$$aB_a=\psi^b_aB_b,\quad a, b=1,\dots,q+1.$$

Аналогично на теорема 1 може да се докаже, че през всяка крайна точка (вън от абсолютните равнини j_p, j_q) минава точно трансверзала на пространствата j_p, j_q и важи също така представянето (8).

Ограничаваме се с разглеждането на каква да е m-мерна крайна повърхнина F_m, за която допирателната равнина η_μ в произволна точка M не съдържа единствената трансверзала през тази точка. Освен това предполагаме, че равнината η_μ пресича j_p в едно $(m+p-n)$-мерно подпространство, а равнината k_q в едно $(m+q-n)$-мерно подпространство.

С произволна точка $M \in F_m$ свързваме репер $(A_i; B_a)$, за който важи представянето (в съгласие с (8))

$$M = A_1 + B_1.$$

Лесно се съобразява, че главните форми на повърхнината са

$$\omega_1^{\bar{i}}, \quad \psi_1^{\bar{a}}, \quad \omega_1^1 - \psi_1^1; \quad \bar{i} = 2, \ldots, p+1, \quad \bar{a} = 2, \ldots, q+1.$$

С помощта на допирателните равнини към повърхнината F_m в проективното пространство j_p получаваме едно множество от двойки „точка+ +$(m+p-n)$-мерна равнина". Това множество съгласно формула (2) на Сантало притежава мярка тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$m = n - 1.$$

Това означава, че повърхнината F_m е една хиперповърхнина. Но тогава между главните форми съществува точно едно линейно съотношение, което написваме във вида

$$\psi_1^1 - \omega_1^1 = \alpha_{\bar{i}}\, \omega_1^{\bar{i}} + \beta_{\bar{a}}\, \psi_1^{\bar{a}}. \tag{51}$$

Както в предния параграф поставяме върховете $A_{\bar{i}}$, $B_{\bar{a}}$ в равнината η_M. Това води до уравнението

$$\omega_1^1 = \psi_1^1, \tag{52}$$

което след външно диференциране дава

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{i}}^1 &= \lambda_{\bar{i}\,\bar{j}}\, \omega_1^{\bar{j}} + \lambda^*_{\bar{i}\,\bar{b}}\, \psi_1^{\bar{b}}, \quad \bar{i}, \bar{j} = 2, \ldots, p+1, \\ -\psi_{\bar{a}}^1 &= \mu^*_{\bar{a}\,\bar{j}}\, \omega_1^{\bar{j}} + \mu_{\bar{a}\,\bar{b}}\, \psi_1^{\bar{b}}, \quad \bar{a}, \bar{b} = 2, \ldots, q+1. \end{aligned} \tag{53}$$

като

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{i}\,\bar{j}} = \lambda_{\bar{j}\,\bar{i}}, \quad \mu_{\bar{a}\,\bar{b}} = \mu_{\bar{b}\,\bar{a}}, \\ \lambda^*_{\bar{i}\,\bar{a}} = \mu^*_{\bar{a}\,\bar{i}}. \end{aligned} \tag{54}$$

Външните форми

$$\begin{aligned} \omega_{2p} &= \prod_{\bar{i}} \omega_1^{\bar{i}} \wedge \prod_{\bar{j}} \omega_{\bar{j}}^1, \\ \psi_{2q} &= \prod_{\bar{a}} \psi_1^{\bar{a}} \wedge \prod_{\bar{b}} \psi_{\bar{b}}^1 \end{aligned} \tag{55}$$

от степени съответно $2p$, $2q$ са инвариантни плътности в пространствата j_p, k_q. Ако $p=q$, непременно n трябва да бъде нечетно и двете форми (55) са равни.

Нека $p<q$. Следва $2p<n-1$, $2q>n-1$ и тъй като за една хиперповърхнина имаме $(n-1)$-мерен базис на формите на Пфаф, следва $\psi_{2q}=0$. Можем да формулираме следната

Теорема 11. Необходимото и достатъчно условие една повърхнина F_m, притежаваща свойствата: допирателната равнина η_M в произволна точка M от повърхнината не съдържа единствената трансферзала през тази точка и сече абсолютните пространства j_p, k_q съответно в $(m+p-n)$- и $(m+q-n)$-мерни равнини, да притежава инвариантна плътност е тя да бъде една хиперповърхнина, т. е.

$$m=n-1.$$

Ако $p=q$, възниквалите в j_p, k_q множества от двойки „точка+хиперповърхнина“ имат равни плътности:

$$\omega_{2p}=\psi_{2q}.$$

Ако $p<q$, формата $\psi_{2q}=0$ и хиперповърхнината F_{n-1} притежава плътност от степен $2p<n-1$.

Тази теорема обобщава теорема 9 от предния параграф. От изложението се вижда, че и теорема 11 непосредствено може да се обобщи, като някои от условията в теоремата се отслабят. Например плътността ω_{2p} съществува и когато $p\leq q$ и не се прави никакво предположение за сечението на допирателната равнина η_M с абсолютното пространство k_q.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б. Върху един аналог в нечетномерно проективно пространство на двуосната геометрия. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **60**, 1967, 33—60.
2. Станилов, Гр. Интегральные инварианты множеств пар прямых в биаксиальном пространстве. An. st. Univ. Iaşi, a Matematika, XIII, 1967, 89—94.
3. Сантало, Л. А. Введение в интегральную геометрию. Москва, 1956.
4. Широков, А. П. Геометрия обобщенных биаксиальных пространств. Уч. зап. КГУ, **4**, кн. 2, 1954, 123—166.
5. Chern Shiing-Shen. On integral geometry in Klein spaces. Ann. of Math., **43**, 1942, 178—189.
6. Varga, O. Integralgeometrie 8. Über Maße von linearer Mannigfaltigkeit im projektiven Raum P_n. Rev. Mat. Hispano-Americana (2), **10**, 1935, 241—264; **11**, 1936, 1—14.

Постъпила на 30. X. 1967 г.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОБОБЩЕННЫХ БИАКСИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Грозю Станилов

(Резюме)

В проективном пространстве P_{2n+1} рассматриваем группу G_n из тех колинеаций, которые оставляют неподвижные две скрещивающиеся действительные плоскости j_n, k_n. Геометрия, которая индуцируется группой G_n, называется бипланарной геометрией, а P_{2n+1} с указанным абсолютом j_n, k_n называется бипланарным пространством B_{2n+1}.

В работе используются реперы $(A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2})$, для которых $A_i \in j_n$, $i=1,\ldots,m+1$, $A_p \in k_n$, $p=n+2,\ldots,2n+2$.

Работа посвящена интегральной геометрии пространства B_{2n+1}.

В § 1 — Системы линейных подпространств — доказывается теорема 5 общего характера: Множество H, каждый элемент P которого представляет конечную систему непересекающихся (чужих между собой) линейных подпространств $P_{s1},\ldots, P_{sk}$, скрещенных с абсолютными плоскостями и удовлетворяющих условию (20), имеет плотность (соответственно меру), инвариантную относительно группы G_n, тогда и только тогда, когда выполняется равенство (20).

Специальные случаи этой теоремы представляют:

а) теорема 4, результат которой получается, полагая $k=1$. Одновременно эта теорема представляет собой геометрическую характеристику максимально мерных Σ_n, составленных из n-мерных подпространств P_n;

б) теорема 6: Множество H, каждый элемент которого состоит из систем k точек, имеет инвариантную плотность (меру) тогда и только тогда, когда выполняется равенство (22).

В конце § 1 приводится формула (30) типа Крофтона. $\varphi_{(n+1)(2n+1)}$ — плотность множества, составленного из систем $n+1$ конечных точек M_i, $i=1,\ldots,n+1$ $(M_i \overline{\in} j_n, k_n)$; $\varphi_{(n+1)^2}$ — плотность множества линейных пространств P_n, причем P_n натянуто на линейно независимых точках M_i; $\varphi_{n(n+1)}$ — проективная плотность индуцированного множества из систем $n+1$ точек A_i, $i=1,\ldots, n+1$ согласно (8).

В § 2 — Плотность гиперповерхности в бипланарном пространстве — доказывается следующая теорема: Гиперповерхность F_{2n}, для которой касательная плоскость в каждой точке A пересекает j_n, k_n в $(n-1)$-мерных подпространствах и не содержит прямой пересекающей j_n, k_n через A, измерима и Φ_1 (или Φ_2) является ее плотностью.

Кроме того дается геометрическая проективная интерпретация этой плотности: Пусть точка $A \in F_{2n}$ и A_1A_{n+2} прямая через A, пересекающая j_n, k_n, причем $A_1 \in j_n$. Касательная плоскость к F_{2n} в A пересекает j_n в одной гиперплоскости j_n, определенной точками $(A_2,\ldots, A_{n+1})$. В соответствии с формулой Варга — Сантало (2) индуцированное множество пар вида „точка+гиперповерхность“ в j_n имеет плотность и она равна плотности гиперповерхности.

В § 3 — О мерах поверхностей в пространстве с абсолютом, состоящимся из двух непересекающихся плоскостей — обобщаются некоторые из приведенных результатов.

ÜBER DIE INTEGRALGEOMETRIE VERALLGEMEINERTER ZWEIACHSIGER RÄUME

Grozjo Stanilov

(Zusammenfassung)

Wir betrachten im projektiven Raum P_{2n+1} die Gruppe G_N aller Kollineationen, für welche zwei reelle Ebenen j_n, k_n ohne gemeinsamen Punkt invariant sind. Die von G_N induzierte Geometrie wird biplanare Geometrie genannt; P_{2n+1} mit der genannten Fundamentalfläche j_n, k_n wird biplanarer Raum B_{2n+1} genannt.

Es werden Bezugsysteme $(A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2})$ benützt, für die $A_i \in j_n$, $i=1,\ldots,n+1$, $A_p \in k_n$, $p=n+2,\ldots,2n+2$.

Diese Arbeit ist der Integralgeometrie des Raumes B_{2n+1} gewidmet.

Im § 1 — Systeme linearer Unterräume im biplanaren Raum — wird der Satz 5 bewiesen, der einen allgemeinen Charakter hat. Es ist eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine Menge H aus den Elementen P, wobei jedes Element P ein endliches System aus untereinander fremden, mit den absoluten Ebenen sich kreuzenden und der Bedingung (20) genügenden, linearen Unterräumen $P_{s_1}, \ldots, P_{s_k}$, ist eine in bezug auf die Gruppe G_n invariante Dichte (bzw. ein Maß) besitzt, daß die Gleichung (20) erfüllt ist.

Spezialfälle dieses Satzes sind:

a) Der Satz 4, dessen Resultat man bei $k=1$ bekommt. Gleichzeitig stellt dieses Theorem eine geometrische Charakteristik der maximal-dimensionalen Räume Σ_n, die aus n-dimensionalen linearen Unterräumen P_n bestehen, dar.

b) Der Satz 6 lautet: Es ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Menge H aus k-Tupeln von Punkten eine invariante Dichte (Maß) besitzt, daß die Gleichung (22) erfüllt ist.

Am Ende des § 1 wird die Formel (30) Krofton'schen Typs angeführt. $\varphi_{(n+1)(2n+1)}$ ist die Dichte einer Menge, die aus $(n+1)$-Tupeln von endlichen Punkten M_i, $i=1,\ldots,n+1$ $(M_i \bar{\in} j_n, k_n)$ besteht; $\varphi_{(n+1)^2}$ ist die Dichte der linearen Räume P_n, indem P_n durch die linear unabhängigen Punkte M_i bestimmt ist; $\varphi_{n(n+1)}$ ist die projektive Dichte der induzierten Menge aus $(n+1)$-Tupeln von Punkten A_i, $i=1,\ldots,n+1$, laut (8).

Im § 2 — Die Dichte einer Hyperfläche im biplanaren Raum — wird folgender Satz bewiesen: Eine Hyperfläche F_{2n}, deren Berührungsebene in jedem Punkte A j_n, k_n in $(n-1)$-dimensionalen linearen Unterräumen schneidet und Geraden, die j_n, k_n durch A schneiden, nicht enthält, ist meßbar und Φ_1 (oder Φ_2) ist ihre invariante Dichte.

Außerdem wird eine projektiv-geometrische Interpretation dieser Dichte gegeben: Es sei der Punkt $A \in F_{2n}$ und A_1A_{n+2} die Gerade durch A, die j_n, k_n schneidet, indem $A_1 \in j_n$. Die Tangentialebene zu F_{2n} in A schneidet j_n in einer Hyperebene für j_n, die durch die Punkte $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ bestimmt ist. Laut der Formel von Varga — Santallo (2) besitzt die induzierte Menge von Paaren „Punkt + Hyperebene" in j_n eine Dichte und diese ist der Dichte Φ_1 der Hyperfläche gleich.

Im § 3 — Über die Maße von Flächen im Raum mit einer Fundamentalfläche, die aus zwei sich schneidenden Ebenen besteht — werden einige der angedeuteten Resultate verallgemeinert.