БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ФОРМУЛИ НА ФРЕНЕ ЗА КРИВА ЛИНИЯ В n-МЕРНИТЕ РЕАЛНИ КВАЗИНЕЕВКЛИДОВИ ПРОСТРАНСТВА

Дечко Митов

§ 1. n-мерно реално квазинеевклидово пространство ${}^{k,l}S_n^m$ (ще го означаваме с Q) се нарича n-мерното проективно пространство P_n, в което са дадени хиперконус Q_0 с индекс k с равнинен $(n-m-1)$-мерен връх T и неизродена квадрика Q_1 с индекс l във върха T. Съвкупността от Q_0 и Q_1 се нарича абсолют на квазинеевклидовото пространство Q. Движения на квазинеевклидовото пространство (квазинеевклидови движения) се наричат неизродените колинеации, запазващи абсолюта.

В проективни координати $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ хиперконусът Q_0, който ще наричаме абсолютен хиперконус, има уравнение

$$\sum_{a,b=0}^{m}{}' g_{ab}x^a x^b = 0, \quad g_{ab} = g_{ba}, \tag{1}$$

а върхът T, който ще наричаме абсолютна равнина, уравнения

$$x^0 = 0, \quad x^1 = 0, \dots, x^m = 0. \tag{2}$$

Квадриката Q_1, която ще наричаме абсолютна квадрика, се определя с уравненията (2) и

$$\sum_{u,v=m+1}^{n} \gamma_{uv} x^u x^v = 0, \quad \gamma_{uv} = \gamma_{vu}. \tag{3}$$

Ако $X(x^\alpha)$ и $Y(y^\alpha)$ са точки на пространството Q, означаваме

$$(X, Y) = \sum_{a,b=0}^{m} g_{ab} x^a y^b, \quad \langle X, Y \rangle = \sum_{u,v=m+1}^{n} \gamma_{uv} x^u y^v. \tag{4}$$

Подвижния репер на пространството Q избираме по следния начин: точките $A_0, A_1, \dots, A_m$ на репера определят m-мерна равнина, нямаща общи точки с абсолютната равнина T, а точките $A_{m+1}, A_{m+2} \dots, A_n$ на репера лежат в T. Имаме сега

$$(A_a, A_b) = g_{ab}, \quad (A_a, A_u) = 0, \quad \langle A_u, A_v \rangle = \gamma_{uv}; \tag{5}$$

тук и навсякъде по-нататък

(6) $a, b, c=0, 1, \ldots, m$; $u, v, w=m+1, m+2, \ldots, n$; $\alpha, \beta=0, 1, \ldots, n$.

Не ни е известно да е публикувана теория на кривите линии в най-общия тип реални квазинеевклидови пространства, построена по излагания от нас метод.

Тъй като нашите разглеждания се извършват именно в общия случай, т. е.

$$m \neq 0, \quad k \neq 0, \quad l \neq 0, \tag{7}$$

абсолютният хиперконус Q_0 разлага многообразието на всички крайни точки на Q на две области. Точките A, за които $(A, A)<0$, ще наричаме вътрешни точки относно абсолюта, а множеството на всички такива точки — вътрешна област на пространството Q; точките A, за които $(A, A)>0$, ще наричаме външни точки относно абсолюта, а множеството на всички външни точки — външна област. Тук

$$(A, A)=\sum_{a,b} g_{ab} x^a x^b, \tag{8}$$

където (x^a) са проективните координати на точката A.

Вътрешната област означаваме с Q^-; ако A е точка от нея, A може да се нормира чрез условието

$$(A, A)=-1.$$

Външната област означаваме с Q^+; ако A е точка от нея, A може да се нормира чрез условието

$$(A, A)=+1,$$

Групата на движенията на квазинеевклидовото пространство се дава с

$$x'^\alpha=\sum_\beta a^\alpha_\beta x^\beta,$$

$$a^a_u=0.$$

$$\sum_a \varepsilon_a a^a_b a^a_c=\varepsilon_b \delta_{bc}, \tag{*}$$

$$\sum_u \gamma_u a^u_v a^u_w=\gamma_v \delta_{vw},$$

където

$$\varepsilon_a=\begin{cases}-1 & \text{при } a=0,1, \ldots, k-1, \\ +1 & \text{при } a=k, k+1, \ldots, m,\end{cases} \quad \gamma_u=\begin{cases}-1 & \text{при } u=m+1, m+2, \ldots, m+l, \\ +1 & \text{при } u=m+l+1, m+l+2, \ldots, n,\end{cases}$$

а $\delta_{\alpha\beta}$ е символът на Кронекер:

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \text{при } \alpha\neq\beta,\\ 1 & \text{при } \alpha=\beta;\end{cases}$$

броят на независимите параметри е $n(n+1)/2$.

Тази група има две числени инварианти.

Нека A и B са точки от пространството Q. Инвариантата при произволно квазинеевклидово движение

$$\cos\varrho=\frac{(A,B)}{\sqrt{(A,A)}\sqrt{(B,B)}} \tag{9}$$

ще наричаме основна метрика на пространството Q. Очевидно основната метрика е изродена. Определената от (9) инварианта ϱ ще наричаме (основно) разстояние между точките A и B. В сила е формулата

$$\varrho(A,B)=\frac{1}{2i}\ln(ABMN), \tag{10}$$

където $(ABMN)$ е двойното отношение на точките A и B и точките M и N на пресичане на правата AB с абсолютния хиперконус Q_0.

Ако за две точки A и B имаме

$$\hat{A}=\hat{B},$$

където координатите на точка $\hat{A}$ са $(x^0, x^1, \ldots, x^m, 0{,}0, \ldots, 0)$ при положение, че тези на A са (x^a) (аналогично за $\hat{B}$), то съществува и друга инварианта

$$r(A,B)=\sqrt{\langle A,A\rangle+\langle B,B\rangle-2\langle A,B\rangle}. \tag{11}$$

Ще наричаме r присъединена метрика на квазинеевклидовото пространство или присъединено разстояние $r(A, B)$ между точките A и B. Разбира се, ако съществува присъединеното разстояние между две точки, то основното разстояние между тях е равно на нула.

Инфинитезималните квазинеевклидови движения на избрания от нас репер имат вида

$$\begin{aligned} dA_a&=\omega_a^b A_b+\omega_a^u A_u,\\ dA_u&=\omega_u^v A_v;\end{aligned} \tag{12}$$

тук и навсякъде по-нататък имаме сумиране по еднаквите горен и долен индекс.

Линейните форми ω_α^β удовлетворяват следните структурни уравнения на пространството Q:

$$\begin{aligned} D\omega_a^b&=[\omega_a^c\omega_c^b],\\ D\omega_a^u&=[\omega_a^a\omega_a^u],\\ D\omega_u^v&=[\omega_u^w\omega_w^v],\\ \omega_u^a&=0\end{aligned} \tag{13}$$

и диференциалните уравнения

$$\omega_u^c g_{cb} + \omega_{\cdot}^c g_{ac} = dg_{ab},$$
(14)
$$\omega_u^w \gamma_{wv} + \omega_v^w \gamma_{uw} = d\gamma_{uv}.$$

§2. Да разгледаме в квазинеевклидовото пространство Q крива линия c, дадена чрез $(n+1)$-те координати на текущата си точка A_0:

(15) $$c:\ A_0 = A_0(q),$$

където q се мени в интервал J (реален).

Нека $A_0(q)$ притежава непрекъснати производни до n-ти ред включително, нека точките $A_0, A_0', A_0'', \ldots, A_0^{(n-1)}$ са линейно независими и нека точките $\hat{A}_0, \hat{A}_0', \hat{A}_0'', \ldots, \hat{A}_0^{(m)}$ (ако координатите на точка A_0 са $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$, с $\hat{A}_0^{(a)}$ означаваме точката с координати $(x^{0(a)}, x^{1(a)}, \ldots, x^{m(a)}, 0, 0, \ldots, 0)$) са линейно независими; останалите изисквания за кривата c ще уточним в хода на изложението. Ще работим в околност на A_0 върху кривата c, нямаща общи точки с абсолюта.

Нормираме $A_0(q)$:

(16) $$(A_0, A_0) = g_{00},$$

където $g_{00} = -1$, ако $A \in Q^-$, и $g_{00} = +1$, ако $A \in Q^+$.

Точките A_0 и A_0' определят тангентата l_1 към кривата c в точка A_0 От (16) имаме

$$(A_0, A_0') = 0,$$

т. е. A_0' е полярно спрегната на A_0 относно Q_0. Означаваме A_0' с A_1. Ще искаме A_1 да не лежи на абсолюта. Нормираме A_1:

$$(A_1, A_1) = \pm 1\ (= g_{11}).$$

Понеже точките A_0, A_0', A_0'' са линейно независими, те определят една двумерна равнина l_2, която ще наречем двумерна допирателна равнина на кривата c в точка A_0. Избираме в l_2 точка A_2, полярно спрегната относно Q_0 на тангентата l_1. Нека

$$A_2 = \bar{x}_2^0 A_0 + \bar{x}_2^1 A_1 + \bar{x}_2^2 A_0'';$$

тогава условията за полярна спрегнатост на A_2 на l_1 са

$$\bar{x}_2^0 (A_0, A_0) + \bar{x}_2^2 (A_0, A_0'') = 0,$$
(17)
$$\bar{x}_2^1 (A_1, A_1) + \bar{x}_2^2 (A_1, A_0'') = 0,$$

тъй като достатъчно е A_2 да бъде полярно спрегната на A_0 и A_1. Понеже $(A_0, A_0) \neq 0$, $(A_1, A_1) \neq 0$, тези уравнения са независими и следователно в

l_2 има точно една точка A_2, полярно спрегната на l_1 относно Q_0. Ще искаме A_2 да не лежи на абсолюта. Нормираме я:

$$(A_2, A_2) = \pm 1 \ (= g_{22}).$$

Продължавайки разсъжденията в последния абзац, да разгледаме равнината l_a, определена от линейно независимите точки $A_0, A_0', A_0'', \ldots, A_0^{(a)}$, $a \leqq m-1$; наричаме я a-мерна допирателна равнина на кривата c в точка A_0. Избираме в l_a точка

$$A_a = \bar{x}_a^0 A_0 + \bar{x}_a^1 A_1 + \cdots + \bar{x}_a^{a-1} A_{a-1} + \bar{x}_a^a A_0^{(a)},$$

полярно спрегната на $(a-1)$-мерната допирателна равнина l_{a-1}; условията за това са

$$\bar{x}_a^0 (A_0, A_0) + \bar{x}_a^a (A_0, A_0^{(a)}) = 0,$$

$$\bar{x}_a^1 (A_1, A_1) + \bar{x}_a^a (A_1, A_0^{(a)}) = 0,$$

$$\bar{x}_a^{a-1} (A_{a-1}, A_{a-1}) + \bar{x}_a^a (A_{a-1}, A_0^{(a)}) = 0.$$

Понеже $(A_0, A_0) \neq 0$, $(A_1, A_1) \neq 0, \ldots, (A_{a-1}, A_{a-1}) \neq 0$, A_a е определена еднозначно; ще искаме да не лежи на абсолюта. Нормираме я:

$$(A_a, A_a) = \pm 1 (= g_{aa}).$$

Постъпвайки аналогично, намираме в m-мерната допирателна равнина l_m, определена от точките $A_0, A_0', A_0'', \ldots, A_0^{(m)}$, точка A_m, полярно спрегната на $(m-1)$-мерната допирателна равнина l_{m-1}; ще искаме да не лежи върху абсолюта. Нормираме я:

$$(A_m, A_m) = \pm 1 \ (= g_{mm}).$$

Така намерените точки $A_0, A_1, \ldots, A_m$, всеки две по две полярно спрегнати относно Q_0, вземаме за първи $m+1$ точки на придружаващия репер на кривата c. Тези точки са върхове на m-мерен автополярен относно Q_0 симплекс, лежащ в l_m. Ще искаме l_m да няма общи точки с абсолютната равнина T. Дотук процедирахме подобно на Бочина и Игнатенков в [1].

$(m+1)$-мерната допирателна равнина l_{m+1}, определена от точките $A_0, A_0', A_0'', \ldots, A_0^{(m+1)}$ (линейно независими), има с абсолютната равнина T обща точка

$$A_{m+1} = \bar{x}_{m+1}^0 A_0 + \bar{x}_{m+1}^1 A_1 + \cdots + \bar{x}_{m+1}^m A_m + \bar{x}_{m+1}^{m+1} A_0^{(m+1)},$$

определена чрез

$$0 = \bar{x}_{m+1}^0 x_0^0 + \bar{x}_{m+1}^1 x_1^0 + \cdots + \bar{x}_{m+1}^m x_m^0 + \bar{x}_{m+1}^{m+1} x_0^{0(m+1)},$$

$$0 = \bar{x}_{m+1}^0 x_0^1 + \bar{x}_{m+1}^1 x_1^1 + \cdots + \bar{x}_{m+1}^m x_m^1 + \bar{x}_{m+1}^{m+1} x_0^{1(m+1)},$$

$$0 = \bar{x}^0_{m+1} x^m_0 + \bar{x}^1_{m+1} x^m_1 + \cdots + \bar{x}^m_{m+1} x^m_m + \bar{x}^{m+1}_{m+1} x^{m(m+1)}_0,$$

където $(x^0_a, x^1_a, x^2_a, \ldots, x^n_a)$ са координатите на точките A_a. Понеже точките $\hat{A}_0, \hat{A}'_0, \ldots, \hat{A}^{(m)}_0$ са линейно независими, то системата (18) определя еднозначно A_{m+1}. Ще искаме A_{m+1}да не лежи на абсолютната квадрика Q_1. Нормираме A_{m+1}:

(19) $$\langle A_{m+1}, A_{m+1}\rangle = \gamma_{m+1,m+1},$$

където $\gamma_{m+1,m+1} = -1$, ако $A \in T^-$, и $\gamma_{m+1,m+1} = +1$, ако $A \in T^+$ (с T^- означаваме вътрешната, а с T^+ външната област на T, която представлява неевклидово пространство ${}^lS_{n-m-1}$).

Точките $A_0, A'_0, A''_0, \ldots, A^{(m+2)}_0$ са линейно независими и определят $(m+2)$-мерна допирателна равнина l_{m+2}. Избираме в l_{m+2} точка A_{m+2}, принадлежаща и на абсолютната равнина T и полярно спрегната на l_{m+1} относно Q_1 (т. е. полярно спрегната относно Q_1 на точката A_{m+1}):

$$A_{m+2} = \bar{x}^0_{m+2} A_0 + \bar{x}^1_{m+2} A_1 + \cdots + \bar{x}^m_{m+2} A_m + \bar{x}^{m+1}_{m+2} A_{m+1} + \bar{x}^{m+2}_{m+2} A^{(m+2)}_0;$$

условията за това са

(20) $$\begin{aligned} &\bar{x}^0_{m+2} x^0_0 + \bar{x}^1_{m+2} x^0_1 + \cdots + \bar{x}^m_{m+2} x^0_m + \bar{x}^{m+2}_{m+2} x^{0(m+2)}_0 = 0,\\ &\bar{x}^0_{m+2} x^1_0 + \bar{x}^1_{m+2} x^1_1 + \cdots + \bar{x}^m_{m+2} x^1_m + \bar{x}^{m+2}_{m+2} x^{1(m+2)}_0 = 0,\\ &\qquad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\ &\bar{x}^0_{m+2} x^m_0 + \bar{x}^1_{m+2} x^m_1 + \cdots + \bar{x}^m_{m+2} x^m_m + \bar{x}^{m+2}_{m+2} x^{m(m+2)}_0 = 0; \end{aligned}$$

(21) $$\bar{x}^{m+1}_{m+2} \langle A_{m+1}, A_{m+1}\rangle + \bar{x}^{m+2}_{m+2} \langle A_{m+1}, A^{(m+2)}_0\rangle = 0.$$

Точките $\hat{A}_0, \hat{A}'_0, \hat{A}''_0, \ldots, \hat{A}^{(m)}_0$ са линейно независими и следователно от (20) могат да се определят отношенията $\bar{x}^0_{m+2}/\bar{x}^{m+2}_{m+2}$, $\bar{x}^1_{m+2}/\bar{x}^{m+2}_{m+2}$, , $\bar{x}^m_{m+2}/\bar{x}^{m+2}_{m+2}$, а понеже $\langle A_{m+1}, A_{m+1}\rangle \neq 0$, то (21) ни дава възможност да определим и $\bar{x}^{m+1}_{m+2}/\bar{x}^{m+2}_{m+2}$. По такъв начин A_{m+2} е определена еднозначно; ще искаме да не лежи на абсолютната квадрика Q_1. Нормираме A_{m+2}:

$$\langle A_{m+2}, A_{m+2}\rangle = \pm 1 \ (= \gamma_{m+2,m+2}).$$

Аналогично за $u < n-1$ точките $A_0, A'_0, \ldots, A^{(u)}_0$ определят u-мерна допирателна равнина l_u. Избираме в l_u точка

$$A_u = \bar{x}^0_u A_0 + \bar{x}^1_u A_1 + \cdots + \bar{x}^{u-1}_u A_{u-1} + \bar{x}^u_u A^{(u)}_0,$$

лежаща в абсолютната равнина T и полярно спрегната относно Q_1 на сечението на $(u-1)$-мерната допирателна равнина l_{u-1} с T:

$$\bar{x}^0_u x^0_0 + \bar{x}^1_u x^0_1 + \cdots + \bar{x}^m_u x^0_m + \bar{x}^u_u x^{0(u)}_0 = 0.$$

$$\bar{x}^0_u x^1_0 + \bar{x}^1_u x^1_1 + \cdots + \bar{x}^m_u x^1_m + \bar{x}^u_u x^{1(u)}_0 = 0,$$

$$\bar{x}_u^0 x_0^m + \bar{x}_u^1 x_1^m + \cdots + \bar{x}_u^m x_m^m + \bar{x}_u^u x_0^{m(u)} = 0,$$

$$\bar{x}_u^{m+1} \langle A_{m+1}, A_{m+1} \rangle + \bar{x}_u^u \langle A_{m+1}, A_0^{(u)} \rangle = 0,$$

$$\bar{x}_u^{m+2} \langle A_{m+2}, A_{m+2} \rangle + \bar{x}_u^u \langle A_{m+2}, A_0^{(u)} \rangle = 0,$$

$$\bar{x}_u^{u-1} \langle A_{u-1}, A_{u-1} \rangle + \bar{x}_u^u \langle A_{u-1}, A_0^{(u)} \rangle = 0.$$

Понеже $\hat{A}_0$, $\hat{A}'_0$, $\hat{A}''_0, \ldots, \hat{A}_0^{(m)}$ са линейно независими и $\langle A_{m+1}, A_{m+1} \rangle \neq 0$, $\langle A_{m+2}, A_{m+2} \rangle \neq 0, \ldots, \langle A_{u-1}, A_{u-1} \rangle \neq 0$, точката A_u е определена еднозначно; ще искаме да не лежи на абсолютната квадрика Q. Нормираме A_u:

$$\langle A_u, A_u \rangle = \pm 1 \ (= \gamma_{uu}).$$

Точките A_0, A'_0, $A''_0, \ldots, A_0^{(n-1)}$ определят допирателна хиперравнина l_{n-1} на кривата c в точка A_0. Избираме в l_{n-1} точка A_{n-1}, полярно спрегната относно Q_1 на сечението на $(n-2)$-мерната допирателна равнина l_{n-2} с T и лежаща в T. Ще искаме A_{n-1} да не лежи на Q_1. Нормираме я:

$$\langle A_{n-1}, A_{n-1} \rangle = \pm 1 \quad (= \gamma_{n-1,n-1}).$$

Ще искаме l_{n-1} да не се допира до Q_1; освен това l_{n-1} не съдържа T. Следователно има точно една точка A_n, лежаща в T и явяваща се полюс на l_{n-1}, т. е. полярно спрегната относно Q_1 на $l_{n-1} \cap T$; при това A_n не лежи на Q_1. Нормираме A_n:

$$\langle A_n, A_n \rangle = \pm 1 \ (= \gamma_{nn}).$$

Така намерените A_{m+1}, $A_{m+2}, \ldots, A_n$ вземаме за останалите n и m точки на придружаващия репер на кривата c; те са върхове на $(n-m-1)$-мерен автополярен относно Q_1 симплекс.

§3. За така построения придружаващ репер (14) стават

$$\begin{aligned} &\omega_a^b g_{bb} + \omega_b^a g_{aa} = 0, \\ &\omega_u^v \gamma_{vv} + \omega_v^u \gamma_{uu} = 0, \\ &\omega_a^a \qquad\qquad = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Пред вид (22), получаваме следните формули на Френе:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^1 A_1, \\ dA_1 &= -\frac{g_{11}}{g_{00}} \omega_0^1 A_0 + \omega_1^2 A_2, \\ &\cdot \\ dA_{m-1} &= -\frac{g_{m-1,m-1}}{g_{m-2,m-2}} \omega_{m-2}^{m-1} A_{m-2} + \omega_{m-1}^m A_m, \\ dA_m &= -\frac{g_{mm}}{g_{m-1,m-1}} \omega_{m-1}^m A_{m-1} + \omega_m^{m+1} A_{m+1}, \\ dA_{m+1} &= \omega_{m+1}^{m+2} A_{m+2} \end{aligned} \tag{23}$$

$$dA_{m+2} = -\frac{\gamma_{m+2,m+2}}{\gamma_{m+1,m+1}} \omega_{m+1}^{m+2} A_{m-1} + \omega_{m+2}^{m+3} A_{m+3},$$

$$dA_{n-1} = -\frac{\gamma_{n-1,n-1}}{\gamma_{n-2,n-2}} \omega_{n-2}^{n-1} A_{n-2} + \omega_{n-1}^{n} A_{n},$$

$$dA_n = -\frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n-1,n-1}} \omega_{n-1}^{n} A_{n-1}.$$

Да изясним геометричния израз на участвуващите в (22) линейни форми. За тази цел нека най-напред намерим разстоянието между текущата точка $A_0(q)$ на кривата c и точката $A_0(q+dq)$.

$$\cos\varrho = \frac{(A_0, A_0+dA_0)}{\sqrt{(A_0, A_0)}\sqrt{(A_0+dA_0, A_0+dA_0)}} = \left[1+(\omega_0^1)^2 \frac{g_{11}}{g_{00}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Разлагаме в редове:

$$1-\frac{1}{2}\varrho^2+\cdots = 1-\frac{1}{2}\frac{g_{11}}{g_{00}}(\omega_0^1)^2+\cdots,$$

откъдето (работим в диференциална околност от първи ред)

$$\varrho^2 = \frac{g_{11}}{g_{00}}(\omega_0^1)^2.$$

Така за линейния елемент на кривата c получаваме

$$ds^2 = \frac{g_{11}}{g_{00}}(\omega_0^1)^2, \tag{24}$$

$$\omega_0^1 = \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}}\, ds. \tag{25}$$

Въвеждаме инвариантен параметър s за кривата c:

$$s = \int_{q_0}^{q} ds = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{00}}} \int_{q_0}^{q} \omega_0^1. \tag{26}$$

Тъй като за дадена A_0 всички точки на построения от нас придружаващ репер са еднозначно геометрично определени, формите $\omega_1^2, \omega_2^3, \ldots$ ω_{n-1}^n ще се изразят линейно чрез ω_0^1, т. е. чрез ds:

$$\omega_1^2 = k_1 ds, \quad \omega_2^3 = k_2 ds, \ldots, \omega_{n-1}^n = k_{n-1} ds. \tag{27}$$

където $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ са функции на координатите на A_0.

За изясняване геометричния смисъл на инвариантата k_1 да намерим разстоянието от точката

$$\bar{Q} = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2} d^2 A_0$$

от диференциалната околност от втори ред до тангентата l_1. Означаваме петата на перпендикуляра, издигнат от l_1 към $\bar{Q}$, с $\bar{P}$. Тогава

$$\bar{Q}=A_0+\omega_0^1 A_1+\frac{1}{2}\,d(\omega_0^1 A_1)=\bar{P}+\frac{1}{2}\,\omega_0^1\omega_1^2 A_2.$$

Разстоянието $\overset{2}{\varrho}$ между $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ се дава с

$$\cos\overset{2}{\varrho}=\frac{(\bar{P},\bar{Q})}{\sqrt{(\bar{P},\bar{P})}\sqrt{(\bar{Q},\bar{Q})}}=\left[1+\frac{\left(\frac{1}{2}\,\omega_0^1\,\omega_1^2\right)^2}{(\bar{P},\bar{P})}\,g_{22}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Разлагайки в редове, намираме (в диференциална околност от втори ред)

(28) $$\overset{2}{\varrho}{}^2=\frac{1}{4}\frac{g_{22}}{g_{00}}(\omega_0^1\omega_1^2)^2.$$

Израза

(29) $$K_1=\left(\frac{2\overset{2}{\varrho}}{ds^2}\right)^2=\frac{g_{22}}{g_{11}}k_1^2$$

ще наричаме първа кривина K_1 на кривата c в точка A_0. Следователно инвариантата k_1 е или равна на квадратен корен от първата кривина K_1, или се различава от него с множител $i\,(i=\sqrt{-1})$:

(30) $$k_1=\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\sqrt{K_1}.$$

Сега пресмятаме разстоянието $\overset{3}{\varrho}$ от точката

$$\bar{R}=A_0+dA_0+\frac{1}{2!}\,d^2A_0+\frac{1}{3!}\,d^3A_0$$

от диференциалната околност от трети ред до двумерната допирателна равнина l_2. Нека точката $\bar{P}_1$ е петата на перпендикуляра, издигнат от l_2 към $\bar{R}$. Тогава

$$\bar{R}=\bar{P}_1+\frac{1}{6}\,\omega_0^1\omega_1^2\omega_2^3A_3,\quad \cos\overset{3}{\varrho}=\left[1+\frac{\left(\frac{1}{6}\omega_0^1\omega_1^2\omega_2^3\right)^2}{(\bar{P}_1,\bar{P}_1)}\,g_{33}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

откъдето

$$\overset{3}{\varrho}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{22}}}\sqrt{K_1}k_2ds^3.$$

Израза

(31) $$K_2=\left(\frac{6\overset{3}{\varrho}}{ds^3}\right)^2=\frac{g_{33}}{g_{22}}K_1k_2^2$$

наричаме втора кривина на кривата c в точка A_0. Тогава

$$k_2=\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{33}}}\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}. \tag{32}$$

Аналогично за разстоянието $\overset{a}{\varrho}$, $a \leqq m-1$, от точката

$$\overline{T}=A_0+dA_0+\cdots+\frac{1}{a!}d^aA_0$$

от диференциалната околност от a-ти ред до $(a-1)$-мерната допирателна равнина l_{a-1} получаваме

$$\overset{a}{\varrho}=\frac{1}{a!}\sqrt{\frac{g_{aa}}{g_{a-1,a-1}}}\sqrt{K_{a-2}}k_{a-1}ds^a.$$

Израза

$$K_{a-1}=\left(\frac{a!\overset{a}{\varrho}}{ds^a}\right)^2=\frac{g_{aa}}{g_{a-1,a-1}}K_{a-2}k_{a-1}^2 \tag{33}$$

наричаме $(a-1)$-ва кривина на кривата c в точка A_0. Тогава

$$k_{a-1}=\sqrt{\frac{g_{a-1,a-1}}{g_{aa}}}\sqrt{\frac{K_{a-1}}{K_{a-2}}}. \tag{34}$$

За разстоянието $\overset{m}{\varrho}$ от точката

$$\overline{U}=A_0+dA_0+\cdots+\frac{1}{m!}d^mA_0$$

от диференциалната околност от m-ти ред до $(m-1)$-мерната допирателна равнина l_{m-1} имаме

$$\overset{m}{\varrho}=\frac{1}{m!}\sqrt{\frac{g_{mm}}{g_{m-1,m-1}}}\sqrt{K_{m-2}}k_{m-1}ds^m.$$

Израза

$$K_{m-1}=\left(\frac{m!\overset{m}{\varrho}}{ds^m}\right)^2=\frac{g_{mm}}{g_{m-1,m-1}}K_{m-2}k_{m-1}^2 \tag{35}$$

наричаме $(m-1)$-ва кривина на c (в точка A_0). Оттук

$$k_{m-1}=\sqrt{\frac{g_{m-1,m-1}}{g_{mm}}}\sqrt{\frac{K_{m-1}}{K_{m-2}}} \tag{36}$$

Сега пресмятаме присъединеното разстояние $\overset{m+1}{r}$ от точката

$$\overline{V}=A_0+dA_0+\cdots+\frac{1}{m!}d^mA_0+\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}A_0$$

от диференциалната околност от $(m+1)$-ви ред до m-мерната допирателна равнина l_m, представляващо присъединеното разстояние от $\overline{V}$ до петата

$\bar{P}_{m-1}$ на перпендикуляра, издигнат от l_m към $\bar{V}$; то съществува, понеже първите $m+1$ координати на $\bar{P}_{m-1}$ са съответно равни на първите $m+1$ координати на $\bar{V}$. Имаме

$$\bar{V}=\bar{P}_{m-1}+\frac{1}{(m+1)!}\,\omega_0^1\omega_1^2\ldots\omega_m^{m+1}A_{m+1};$$

$$\overset{m+1}{r}=\sqrt{\langle\bar{V},\bar{V}\rangle+\langle\bar{P}_{m-1},\bar{P}_{m-1}\rangle-2\langle\bar{V},\bar{P}_{m-1}\rangle}$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\sqrt{\frac{\gamma_{m+1,m+1}}{g_{mm}}}\,g_{00}\sqrt{K_{m-1}}\,k_m ds^{m+1}.$$

Израза

(37)
$$K_m=\left(\frac{(m+1)!\,\overset{m+1}{r}}{ds^{m+1}}\right)^2=K_{m-1}\frac{\gamma_{m+1,m+1}}{g_{mm}}\,g_{00}\,k_m^2$$

наричаме m-та кривина (или още смесена кривина) на c. Тогава

(38)
$$k_m=\sqrt{\frac{g_{mm}}{\gamma_{m+1,m+1}\cdot g_{00}}}\sqrt{\frac{K_m}{K_{m-1}}}.$$

Аналогично за присъединеното разстояние $\overset{m+2}{r}$ от точката

$$\bar{W}=A_0+dA_0+\cdots+\frac{1}{(m+2)!}\,d^{m+2}A_0$$

от диференциалната околност от $(m+2)$-ри ред до $(m+1)$-мерната допирателна равнина l_{m+1} имаме

$$\bar{W}=\bar{P}_m+\frac{1}{(m+2)!}\,\omega_0^1\omega_1^2\ldots\omega_{m+1}^{m+2}A_{m+2},$$

$$\overset{m+2}{r}=\sqrt{\langle\bar{W},\bar{W}\rangle+\langle\bar{P}_m,\bar{P}_m\rangle-2\langle\bar{W},\bar{P}_m\rangle}$$

$$=\frac{1}{(m+2)!}\sqrt{\frac{\gamma_{m+2,m+2}}{\gamma_{m+1,m+1}}}\sqrt{K_m}\,k_{m+1}ds^{m+2}.$$

Израза

(39)
$$K_{m+1}=\left(\frac{(m+2)!\,\overset{m+2}{r}}{ds^{m+2}}\right)^2=\frac{\gamma_{m+2,m+2}}{\gamma_{m+1,m+1}}\,K_m k_{m+1}^2$$

наричаме $(m+1)$-ва кривина на кривата c. Тогава

(40)
$$k_{m+1}=\sqrt{\frac{\gamma_{m+1,m+1}}{\gamma_{m+2,m+2}}}\sqrt{\frac{K_{m+1}}{K_m}}.$$

Нека $u\leq n-1$. Получаваме аналогично

$$\overset{u}{r}=\frac{1}{u!}\sqrt{\frac{\gamma_{uu}}{\gamma_{u-1,u-1}}}\sqrt{K_{u-2}}\,k_{u-1},$$

а за $(u-1)$-вата кривина K_{u-1} и за инвариантата k_{u-1} съответно

$$K_{u-1}=\left(\frac{u!\overset{u}{r}}{ds^u}\right)^2=\frac{\gamma_{uu}}{\gamma_{u-1,u-1}}K_{u-2}k_{u-1}^2, \tag{41}$$

$$k_{u-1}=\sqrt{\frac{\gamma_{u-1,u-1}}{\gamma_{uu}}}\sqrt{\frac{K_{u-1}}{K_{u-2}}} \tag{42}$$

Накрая пресмятаме присъединеното разстояние $\overset{n}{r}$ от точката

$$\bar{Z}=A_0+dA_0+\cdots+\frac{1}{n!}d^nA_0$$

от диференциалната околност от n-ти ред до допирателната хиперравнина l_{n-1}. Получаваме

$$\overset{n}{r}=\frac{1}{n!}\sqrt{\frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n-1,n-1}}}\sqrt{K_{n-2}}\,k_{n-1}ds^n.$$

Израза

$$K_{n-1}=\left(\frac{n!\overset{n}{r}}{ds^n}\right)^2=\frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n-1,n-1}}K_{n-2}k_{n-1}^2 \tag{43}$$

наричаме $(n-1)$-ва кривина на кривата c в точка A_0. Тогава

$$k_{n-1}=\sqrt{\frac{\gamma_{n-1,n-1}}{\gamma_{nn}}}\sqrt{\frac{K_{n-1}}{K_{n-2}}}. \tag{44}$$

В статията излагаме резултатите от нашата дипломна работа, изготвена под научното ръководство на акад. Б. Петканчин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочина, Л. П. и В. И. Игнатенков. Теория кривых в n-мерных неевклидовых пространствах. Сб. раб. по геом. и мат. анал. Ученые записки ОЗПИ, 22, вып. 3, 1964, 35—49.

Постъпила на 20. VI. 1968 г.

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ ДЛЯ КРИВОЙ В n-МЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАЗИНЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дечко Митов

(Резюме)

В n-мерном вещественном проективном пространстве, абсолют которого состоит из гиперконуса индекса k с плоской $(n-m-1)$-мерной вершиной и невырожденной квадрики индекса l в этой вершине, рассматривается кривая, удовлетворяющая некоторым условиям общего типа.

Геометрически строится сопровождающий репер данной кривой; первые $m+1$ точки этого репера лежат в m-мерной плоскости, не имеющей общих точек с вершиной абсолютного гиперконуса, а остальные n-m точки лежат в этой вершине. Геометрическое истолкование входящих в полученные формулы Френе линейных дифференциальных форм позволяет ввести на кривой инвариантный параметр и найти $n-1$ кривизны.

LES FORMULES DE FRENET DE COURBE DANS L'ESPACE n-DIMENSIONAL RÉEL QUASI NON EUCLIDIEN

Dečko Mitov

(Résumé)

Dans l'espace n-dimensional réel quasi non euclidien on considère des courbes satisfaisantes quelques conditions générales. On construit un repère mobile d'une telle courbe. Les premiers $m+1$ points de ce repère sont situés dans un plan m-dimensional disjoint d'un hipercone absolut. Les autres $n-m$ points sont situés dans le sommet de ce hipercône. L'interprétation géométrique des formes différentielles participant dans les formules obtenus de Frenet, permit l'introduction d'un paramètre invariant et de trouver $n-1$ courbures.