БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ВЪРХУ „НАЙ-МАЛКАТА НЕУСТОЙЧИВОСТ" НА ДВУПАРАМЕТРОВИТЕ ВИХРОВИ УЛИЦИ

Благовест Долапчиев

Както е известно, Кармановите шахматни вихрови улици при подходящо специално нареждане на вихрите на двете паралелни редици, а именно

$$\operatorname{sh} \varkappa\pi = 1, \tag{1}$$

или при стойност на параметъра им

$$\varkappa = \frac{h}{l} \approx 0{,}2806\ldots, \tag{2}$$

където с $2h$ е означена широчината на вихровата конфигурация, а с $2l$ — отдалечението на вихрите, съседни за всяка от редиците, при линеен, а така също и при квадратичен закон на смущенията [1, 2] са необходимо устойчиви. Тази устойчивост Кочин [3] нарече „най-малка неустойчивост", тъй като при произволен порядък на смущенията с метода на Ляпунов за изследване устойчивостта на движението той доказа най-общата неустойчивост на Кармановите шахматни улици въпреки удовлетворението на условието (1), (2), което ние [4] разпространихме и за така наречените от нас „двупараметрови вихрови конфигурации", т. е. такива, при които двете вихрови, паралелни и праволинейни редици са отместени една спрямо друга от симетричното им или от шахматното им разположение на произволна величина $2d$. Най-малката неустойчивост или линейната устойчивост на двупараметровите улици сега се дава с условието

$$\operatorname{sh} \varkappa\pi = \sin \lambda\pi, \tag{3}$$

където $\lambda = d/l$ означава втория параметър на конфигурацията, който при стойност $1/2$ води до Кармановото условие (1), (2). Условието (3) бе намерено по-рано и от Maue [5], но трябва да се имат пред вид забележките към извода на Maue, намерили място и в [6], направени от нас в работата ни [7]. Domm [8] приложи квадратичния закон и за двупараметровите улици и показа, че вече при вторите степени на малките смущения е налице неустойчивост, която Coddington [9] търси отново в ефекта на „косото" протичане на конфигурацията, на който ефект впрочем след нашите разглеждания [7, 10] се спира в две свои работи и Bils [11, 12].

В настоящата работа ние искаме да допълним изследването си [4] с един по-подробен анализ на решението, дадено в него, което решение ни доведе до „обобщеното условие за линейна устойчивост“ (3), наречено в обзорната работа на Bils „условие на Maye — Долапчиев“. С това допълнение се цели да се даде както един по-строг и пълен извод на споменатото условие (3), така и да се изправят някои печатни грешки, допуснати поради отсъствието ми от страната през време на отпечатването на [4]. Най-после някои по-забележителни пресмятания в краен стадий ще бъдат приведени и тук.

Като въведем векторите смущения $\bar{\varrho}'_k(\xi'_k, \eta'_k)$ и $\bar{\varrho}''_k(\xi''_k, \eta''_k)$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ върху k-тия вихър с афикс z'_k на горната (′) редица, респективно върху k-тия вихър с афикс z''_k на долната (″) редица, което означава, че сега афиксите им z'_k и z''_k ще имат координати

$$
(5) \qquad \begin{aligned} x'_k &= l(2k+\lambda)+\xi'_k & y'_k &= h+\eta'_k; \\ x''_k &= l(2k-\lambda)+\xi''_k, & y''_k &= -h+\eta''_k, \end{aligned} \qquad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,
$$

в изразите, следващи от комплексната скорост, съответствуваща на комплексния потенциал

$$
(6) \qquad F(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z'_0)}{\sin\frac{\pi}{2l}(z-z''_0)},
$$

гдето Γ е постоянната по абсолютна големина циркулация на вихрите, а z е афиксът на коя да е флуидна точка, върху която се индуцира казаната скорост, стига z да бъде заместено с афиксите z'_k и z''_k, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, на останалите вихри и като пренебрегнем по-високите от втора степен на малките смущения, получаваме следната система диференциални уравнения за смутителните движения на k-те вихъра, отнесени спрямо координатни системи на всеки един от тях, с оси, успоредни на основната система с начало, симетрично относно нулевата двойка вихри (z'_0, z''_0) и оси тия на основната система: $\Omega\xi$ — по направление на целокупното движение (течение), и $\Omega\eta$ — перпендикулярна ней. В тази система диференциалните уравнения безбройно многото неизвестни са ξ'_s, η'_s и ξ''_s, η''_s, $s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; тя гласи

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\frac{d\xi'_s}{dt} &= a'\eta'_s + e'\xi'_s + \sum{}' b_k\eta'_k - \sum e'_k\xi''_k - \sum c'_k\eta''_k, \\
\frac{d\eta'_s}{dt} &= a'\xi'_s - e'\eta'_s + \sum{}' b_k\xi'_k + \sum e'_k\eta''_k - \sum c'_k\xi''_k, \\
\frac{d\xi''_s}{dt} &= -a''\eta''_s + e''\xi''_s - \sum{}' b\xi\eta''_k - \sum e''_k\xi'_k + \sum c''_k\eta'_k, \\
\frac{a\eta''_s}{dt} &= -a''\xi''_s - e''\eta''_s - \sum{}' b_k\xi''_k + \sum e''_k\eta'_k + \sum c''_k\xi'_k;
\end{aligned}
$$

$$
\Sigma = \sum_{k \neq s}.
$$

Тук сме положили $\Gamma=2\pi$ и още

$$a'=\frac{1}{4l^2}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(\overline{k-s}\mp\lambda)^2-\varkappa^2}{[(\overline{k-s}\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\overline{k-s}^2}\right]=a'', \tag{8}$$

$$e'=e''=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(e'_k,\ e''_k), \tag{9}$$

$$c',\ c''=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(c'_k,\ c''_k),$$

гдето

$$e'_k=\frac{1}{2l^2}\,\frac{\varkappa(\overline{k-s}\mp\lambda)}{[(\overline{k-s}\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}=e''_k, \tag{10}$$

$$b_k=\frac{1}{4l^2}\,\frac{1}{\overline{k-s}^2}, \tag{11}$$

$$c'_k=\frac{1}{4l^2}\,\frac{(\overline{k-s}\mp\lambda)^2-\varkappa^2}{[(\overline{k-s}\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}. \tag{12}$$

Но ние установихме в [4], че

$$c'=\frac{\pi^2}{2l^2}\,\frac{1-\cos 2\lambda\pi\,\mathrm{ch}\,2\varkappa\pi}{(\cos 2\lambda\pi-\mathrm{ch}\,\varkappa\pi)^2}=c''=c \tag{13}$$

и

$$e'=-\frac{\pi^2}{4l^2}\,\frac{\sin 2\lambda\pi\,\mathrm{sh}\,2\varkappa\pi}{(\cos 2\lambda\pi-\mathrm{ch}\,2\varkappa\pi)^2}=-e''=e \tag{14}$$

и че

$$a',\ a''=c',\qquad c''-b=a.$$

По такъв начин системата (7) се написва по-просто във вида

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi'_s}{dt}&=a\eta'_s+e\xi'_s+\sum{}'\,b_k\eta'_k-\sum e_k\xi''_k-\sum c_k\eta''_k,\\
\frac{d\eta'_s}{dt}&=a\xi'_s-e\eta'_s+\sum{}'\,b_k\xi'_k+\sum e_k\eta''_k-\sum c_k\xi''_k,\\
\frac{d\xi''_s}{dt}&=-a\eta''_s-e\xi''_s-\sum{}'\,b_k\eta''_k+\sum e_k\xi'_k+\sum c_k\eta'_k,\\
\frac{d\eta''_s}{dt}&=-a\xi''_s+e\eta''_s-\sum{}'\,b_k\xi''_k-\sum e_k\eta'_k+\sum c_k\xi'_k.
\end{aligned} \tag{16}$$

В нашите работи [1, 4] ние разгледахме **алтернативни** смущения, т. е. такива смущения, които разпределяме върху вихрите (z_0', z_0'') с четен индекс (0) и върху вихрите с нечетен индекс (1). Векторите смущения сега означаваме с $\bar{\varrho}_0'(\xi_0', \eta_0')$, $\bar{\varrho}_0''(\xi_0'', \eta_0'')$, $\bar{\varrho}_1'(\xi_1', \eta_1')$, $\bar{\varrho}_1''(\xi_1'', \eta_1'')$, като върху всеки **четен** вихър тези смущения са едни и същи за дадена редица, но различни за различните редици; същото се отнася и за всеки **нечетен** вихър, като смущенията сега са различни от тези, разпределени върху четните вихри.

И така системата (16) вече се редуцира на осем уравнения с осем неизвестни — горните две четворки координати, — вместо да имаме система от безбройно много неизвестни. Освен това сега ще получим следните значения за коефициентите ѝ, в които на индекса k са дадени само стойности 0 (за четните вихри) и 1 (за нечетните вихри):

(17а) $$\frac{1}{4l^2}\frac{1}{k^2}=b_{k0},\quad \sum_0{}' b_{k0}=b_{00},\quad \sum_1{}' b_{k0}=b_{10};$$

(17б) $$\frac{1}{4l^2}\frac{1}{\overline{k-1}^2}=b_{k1},\quad \sum_0{}' b_{k1}=b_{01},\quad \sum_1{}' b_{k1}=b_{11};$$

(18а) $$\frac{\varkappa}{2l^2}\frac{k\mp\lambda}{[(k\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}=\mp e_{k0},\quad \sum_0 e_{k0}=e_{00},\quad \sum_1 e_{k0}=e_{10},$$

(18б) $$\frac{\varkappa}{2l^2}\frac{k-1\mp\lambda}{[(\overline{k-1}\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}=\mp e_{k1},\quad \sum_0 e_{k1}=e_{01},\quad \sum_1 e_{k1}=e_{11};$$

(19а) $$\frac{1}{4l^2}\frac{(k\mp\lambda)^2-\varkappa^2}{[(k\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}=c_{k0},\quad \sum_0 c_{k0}=c_{00},\quad \sum_1 c_{k0}=c_{10},$$

(19б) $$\frac{1}{4l^2}\frac{(\overline{k-1}\mp\lambda)^2+\varkappa^2}{[(\overline{k-1}\mp\lambda)^2+\varkappa^2]^2}=c_{k1},\quad \sum_0 c_{k1}=c_{01},\quad \sum_1 c_{k1}=c_{11}.$$

Като извършим пресмятанията, намираме

(20) $$b_{10}=b_{01}=\frac{1}{4l^2}\frac{\pi^2}{4},\quad b_{00}=b_{11}=\frac{1}{4l^2}\frac{\pi^2}{12},$$

(21) $$e_{00}=e_{11},\quad e_{10}=e_{01},\quad c_{00}=c_{11},\quad c_{10}=c_{01},$$

(22) $$b_{00}+b_{11}=b=b_{10}+b_{01},\quad e_{00}+e_{11}=e=e_{01}+e_{10},$$

(23) $$c_{00}+c_{11}=c=c_{10}+c_{01}.$$

Системата (26) въз основа на стойностите за коефициентите ѝ в това редуцирано разглеждане взема вида

$$\dot{\xi}_0' = e\xi_0'+(a+b_{00})\eta_0'+b_{01}\eta_1'-e_{00}\xi_0''-e_{10}\xi_1''-c_{00}\eta_0''-c_{10}\eta_1'',$$

$$\dot{\eta}_0' = -e\eta_0'+(a+b_{00})\xi_0'-b_{10}\xi_1'+e_{00}\eta_0''+e_{10}\eta_1''-c_{00}\xi_0''-c_{10}\xi_1'',$$

(24) $$\dot{\xi}_0'' = -e\xi_0''-(a+b_{00})\eta_0''-b_{10}\eta_1''+e_{00}\xi_0'+e_{10}\xi_1'+c_{00}\eta_0'+c_{10}\eta_1',$$

$$\dot{\eta}_0'' = \quad e\eta_0'' - (a+b_{00})\xi_0'' + b_{10}\xi_1'' - e_{00}\eta_0' - e_{10}\eta_1' + c_{00}\xi_0' + c_{10}\xi_1',$$

$$\dot{\xi}_1' = \quad e\xi_1' + (a+b_{11})\eta_1' + b_{01}\eta_0' - e_{11}\xi_1'' - e_{01}\xi_0'' - c_{11}\eta_1'' - c_{01}\eta_0'',$$

$$\dot{\eta}_1' = -e\eta_1' + (a+b_{11})\xi_1' - b_{01}\xi_0' + e_{11}\eta_1'' + e_{01}\eta_0'' - c_{11}\xi_1'' - c_{01}\xi_0'',$$

$$\dot{\xi}_1'' = -e\xi_1'' - (a+b_{11})\eta_1'' - b_{01}\eta_0'' + e_{11}\xi_1' + e_{01}\xi_0' + c_{11}\eta_1'' - c_{01}\eta_0',$$

$$\dot{\eta}_1'' = \quad e\eta_1'' - (a+b_{11})\xi_1'' + b_{01}\xi_0'' - e_{11}\eta_1' - e_{01}\eta_0' + c_{11}\xi_1' + c_{01}\xi_0'.$$

Методът, който прилагаме за решение на системата (24), се състои в събиране, респективно изваждане, на съответните абсциси (ординати) на вихрите с четен, респективно с нечетен индекс. Докато сборовете обаче са е д н и и с ъ щ и за долната и за горната вихрова редица, следователно те характеризират к о с а т а транслация на целокупната вихрова конфигурация [4, 5, 7], която в смисъла на Кочин на дефиницията за устойчивост следва да се елиминира, за разликите, които означаваме с

$$\begin{aligned} &\xi_0' - \xi_1' = X', \quad \eta_0' - \eta_1' = Y', \\ &\xi_0'' - \xi_1'' = X'', \quad \eta_0'' - \eta_1'' = Y'', \end{aligned} \tag{25}$$

получаваме новата система

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= \quad eX' + (a+b_{00}-b_{10})\,Y' - (e_{00}-e_{10})\,X'' - (c_{00}-c_{10})Y'', \\ \dot{Y}' &= -eY' + (a+b_{00}-b_{10})X' + (e_{00}-e_{10})\,Y'' - (c_{00}-c_{10})\,X'', \\ \dot{X}'' &= -eX'' - (a+b_{00}-b_{10})\,Y'' + (e_{00}-e_{10})\,X' + (c_{00}-c_{10})Y', \\ \dot{Y}'' &= \quad eY'' - (a+b_{00}-b_{10})\,X'' - (e_{00}-e_{10})\,Y' + (c_{00}-c_{10})\,X'. \end{aligned} \tag{26}$$

Като въведем новите означения

$$a + b_{00} - b_{10} = \mu, \quad e_{00} - e_{10} = \varepsilon \quad c_{00} - c_{10} = \nu, \tag{27}$$

системата диференциални уравнения за смутителните движения се представя окончателно във формата

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= eX' + \mu Y' - \varepsilon X'' - \nu Y'', \\ \dot{Y}' &= \mu X' - eY' - \nu X'' + \varepsilon Y'', \\ \dot{X}'' &= \varepsilon X' + \nu Y' - eX'' - \mu Y'', \\ \dot{Y}'' &= \nu X' - \varepsilon Y' - \mu X'' + eY''. \end{aligned} \tag{28}$$

Тук именно ние ще направим едно отклонение от разглежданата работа [4], което ще ни позволи по-подробния и по-строг анализ на решението ѝ, който ще ни доведе до най-малката неустойчивост (в смисъла на Кочин) и на двупараметровите вихрови конфигурации.

Вместо да извършим двукратно диференциране на системата (28), с което да́ я доведем до единственото уравнение от четвърти ред относно

Z, важащо за всяко неизвестно X', Y', X'', Y'', както това направихме в [4], тук ние ще определим направо характеристичното уравнение, съответствуващо на системата [28]. Както е известно, формално това става, като към всички елементи от главния диагонал на квадратната схема, образувана от коефициентите на системата (28), прибавим например по едно u; като означим детерминантата с $L(u)$, получаваме за характеристичното уравнение вида

$$(29) \qquad L(u) \equiv \begin{vmatrix} u+e & \mu & -\varepsilon & -\nu \\ \mu & u-e & -\nu & \varepsilon \\ \varepsilon & \nu & u-e & -\mu \\ \nu & -\varepsilon & -\mu & u+e \end{vmatrix} = 0.$$

Лесно се узнава, че развитието на горната детерминанта ни води до следното алгебрично уравнение от четвърта степен по отношение на u:

$$(30) \qquad L(u) \equiv (u^2 - e^2 - \mu^2 + \nu^2 + \varepsilon^2)^2 + 4(\mu\varepsilon - \nu e)^2 = 0.$$

Ако второто събираемо в многочлена $L(u)$ е отлично от нула. т. е. имаме

$$(31) \qquad \mu\varepsilon \neq \nu e,$$

характеристичното уравнение (30) ще притежава четири различни корена u_σ, $\sigma = 1, 2, 3, 4$. При това в този случай един от тях — както това непосредствено се вижда — ще притежава непременно положителна реална част. Оттук веднага заключаваме, че всяка устойчивост (дори най-малка неустойчивост) на разглежданата вихрова конфигурация е изключена.

От горното следва, че за устойчивостта преди всичко трябва да е изпълнено

$$(32) \qquad \mu\varepsilon - \nu e = 0,$$

което е едно необходимо условие двупараметровите улици да са линейно устойчиви.

Щом обаче е налице условието (32), от видоизмененото характеристично уравнение (30), а именно

$$(33) \qquad (u^2 - e^2 - \mu^2 + \nu^2 + \varepsilon^2)^2 = 0,$$

следва, че сега то ще притежава два двукратни корена или в специален случай четворния корен $u_{1,2,3,4} = 0$, ако имаме още

$$(34) \qquad e^2 + \mu^2 = \nu^2 + \varepsilon^2.$$

Да се спрем на по-общия случай, когато корените са двойни, и да предположим, че

$$(35) \qquad e^2 + \mu^2 > \nu^2 + \varepsilon^2.$$

В този случай измежду двата корена на (30) единият ще бъде положителен. Тогава нему ще отговарят сигурно такива интеграли на системата (28), които за $t \to \infty$ растат неограничено и вихровата конфигурация пак не може да бъде устойчива.

Следователно друго необходимо условие за нейната устойчивост налага да имаме

(36) $$e^2+\mu^2<\nu^2+\varepsilon^2.$$

Но от условието (32), което изискахме, имаме

(37) $$\varepsilon=e\frac{\nu}{\mu}\cdot$$

Тогава, като заместим в условието (36) ε с (37) и съкратим на израза $e^2+\mu^2$, който е отличен от нула, получаваме

(38) $$\mu^2<\nu^2,$$

или

(39) $$|\mu|<|\nu|$$

Но тъй като уравнението (30) има двойни корени, очевидно е, че нашата система (28) ще притежава решения, в които поне една от функциите X', Y', X'', Y'' трябва да има вида

(40) $$(t+\omega)e^{ut},$$

което ще означава, че тази функция няма да бъде ограничена за $t\to\infty$. Но това ще бъде случаят, ако рангът на детерминантата (29) беше точно три, след като сме заместили u с един от двойните (чисто имагинерни) корени на (30).

Случаят обаче не е такъв.

Наистина лесно ще може да проверим, че щом е изпълнено условието (32), рангът на детерминантата (29) е точно две.

Доказателството ще извършим косвено. За целта да разгледаме системата

(41) $$\begin{aligned}(u+e)\alpha+\mu\beta-\varepsilon\gamma+\nu\delta&=0,\\ \mu\alpha+(u-e)\beta-\nu\gamma+\varepsilon\delta&=0.\end{aligned}$$

Матрицата от коефициентите на горната система съвпада с матрицата, която би се получила от първите два реда на детерминантата (29). Тогава лесно можем да докажем, че всяко решение $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ на (41) ще удовлетворява и уравненията

(42) $$\begin{aligned}\varepsilon\alpha+\nu\beta+(u-e)\gamma-\mu\delta&=0.\\ \nu\alpha-\varepsilon\beta-\mu\gamma+(u-e)\delta&=0.\end{aligned}$$

Да забележим преди всичко, че какво да е решение на (41) ще се получи, като на α и β се дават произволни стойности, след което същата система се реши относно γ и δ.

Такова решение е възможно, понеже имаме, че

(43) $$\begin{vmatrix}-\varepsilon & -\nu\\ -\nu & \varepsilon\end{vmatrix}\neq 0.$$

Но оттук заключаваме, че кое да е решение на (41) ще се получи като линейна комбинация на две нетривиални решения, от които едното се получава, като заместим α с нула, а второто — като заместит β с нула. Но такива са до един постоянен множител решенията

$$\alpha=0,\quad \beta=\varepsilon^2+\nu^2,\quad \gamma=\nu u,\quad \delta=\mu\nu-\varepsilon(u-e), \tag{44}$$

$$\alpha=\varepsilon^2+\nu^2,\quad \beta=0,\quad \gamma=\mu\nu+\varepsilon(u+e),\quad \delta=\nu u. \tag{45}$$

Сега всяко едно от тези решения обаче удовлетворява и двете уравнения (42). По такъв начин ние доказахме, че уравненията (42) са следствие от уравненията (41), което е все същото, че рангът на детерминантата (29) е точно две.

Забележка. Тук трябва да се отбележи, че горният резултат е в сила, когато се предположи, че

$$\varepsilon^2+\nu^2>0, \tag{47}$$

което означава, че величините ε и ν не са едновременно нули, какъвто е фактът. И наистина, ако едновременно $\varepsilon=0$, $\nu=0$, то би следвало, че в този случай характеристичното уравнение (30) би притежавало реални корени.

Сега вече можем да заключим, че на двете съществено различни решения (44) и (45) на системата (41), (42) ще отговарят двете съществено различни решения на системата диференциални уравнения (28).

Така ще имаме решенията

$$\begin{aligned}
&X_1'=0, \quad Y_1'=(\varepsilon^2+\nu^2)e^{ut},\\
&X_1''=\nu u e^{ut}, \quad Y_1''=[\nu\mu-\varepsilon(u-e)]e^{ut};\\
&X_2'=(\varepsilon^2+\nu^2)e^{ut}, \quad Y_2'=0,\\
&X_2''=[\mu\nu+\varepsilon(u+e)]e^{ut}, \quad Y_2''=\nu u e^{ut},
\end{aligned} \tag{48}$$

които са две различни решения на системата (28), съответствуващи на двойния корен u.

Аналогично на другия двоен корен $-u$ ще отговарят решенията

$$\begin{aligned}
&X_3'=0, \quad Y_3'=(\varepsilon^2+\nu^2)e^{-ut},\\
&X_3''=-\nu u e^{-ut}, \quad Y_3''=[\mu\nu+\varepsilon(u+e)]e^{-ut};\\
&X_4'=(\varepsilon^2+\nu^2)e^{-ut}, \quad Y_4'=0,\\
&X_4''=[\mu\nu-\varepsilon(u-e)]e^{-ut}, \quad Y_4''=-\nu u e^{-ut}.
\end{aligned}$$

Тези четири решения (48) и (49) обаче образуват една фундаментална система, което означава, че детерминантата

$$\Delta=\begin{vmatrix} X_1' & Y_1' & X_1'' & Y_1'' \\ X_2' & Y_2' & X_2'' & Y_2'' \\ X_3' & Y_3' & X_3'' & Y_3'' \\ X_4' & Y_4' & X_4'' & Y_4'' \end{vmatrix} \tag{50}$$

е отлична от нула.

Доказателство. Наистина тази детерминанта можем да напишем така:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \nu^2+\varepsilon^2 & \nu u & \mu\nu-\varepsilon(u-e) \\ \varepsilon^2+\nu^2 & 0 & \mu\nu+\varepsilon(u+e) & \nu u \\ 0 & \nu^2+\varepsilon^2 & -\nu u & \mu u+\varepsilon(u+e) \\ \nu^2+\varepsilon^2 & 0 & \mu\nu-\varepsilon(u-e) & -\nu u \end{vmatrix}. \tag{51}$$

Но тя е равна на

$$\Delta=(\nu^2+\varepsilon^2)\Delta', \tag{52}$$

гдето с Δ' сме означили детерминантата

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \nu u & \mu\nu-\varepsilon(u-e) \\ 0 & 0 & 2\varepsilon\nu & 2\nu u \\ 0 & 1 & -\nu u & \mu\nu+\varepsilon(u+e) \\ 1 & 0 & \mu\nu-\varepsilon(u-e) & -\nu u \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Чрез просто пресмятане намираме

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 2\varepsilon u & 2\nu u \\ -\nu u & \mu\nu+\varepsilon(u+\varepsilon) \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \nu u & \mu\nu-\varepsilon(u-\varepsilon) \\ 2\varepsilon u & 2\nu u \end{vmatrix}=-4(\nu^2+\varepsilon^2). \tag{54}$$

Следователно за фундаменталната детерминанта намираме стойността

$$\Delta=-4(\nu^2+\varepsilon^2)^3 u^2 \neq 0, \tag{55}$$

която въз основа на направената забележка очевидно е отлична от нула.

Но тъй като частните решения (48) и (49) образуват една фудаментална система, следва, че кое да е решение на системата (28) се представя като линейна комбинация с постоянни коефициенти на въпросните четири решения.

Но оттук е явно, че в разглеждания случай (когато u е чисто имагинерно) функциите на **всяко решение** на системата (28) за $t\to\infty$ ще бъдат ограничени и изследваната вихрова конфигурация ще бъде устойчива.

От изложението дотук се вижда, че заключението, което правим в [4], а именно, че „за да не се явят членове, които биха нараснали безкрайно много" (стр. 306), трябва да имаме едновременно

$$\mu\varepsilon=\nu e, \quad \mu^2-e^2<\nu^2-e^2\text{''}, \tag{56}$$

чрез този подробен анализ е напълно и строго мотивирано.

За пълнота да дадем стойностите на количествата μ, ν, ε, e, въведени с (27) и фигуриращи в условието за стабилност (32), които бяхме пресметнали в [4]. По-точно пресмятаме

$$\begin{aligned} \mu\varepsilon&=\left(c-\frac{\pi^2}{8l^2}\right)(2e_{00}-e), \\ \nu e&=(2c_{00}-c)\,e. \end{aligned} \tag{57}$$

Но, от една страна, имаме

$$(58)\qquad 2e_{00}=\frac{1}{l^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{\varkappa}{2}\left(n-\frac{\lambda}{2}\right)}{4\left[\left(n-\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2\right]^2}=-\frac{\pi^2}{8l^2}\,\frac{\sin\lambda\pi\,.\,\mathrm{sh}\,\varkappa\pi}{(\cos\lambda\pi-\mathrm{ch}\,\varkappa\pi)^2},$$

а, от друга,

$$(59)\qquad 2c_{00}=\frac{1}{2l^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\left(n-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2}{4\left[\left(n-\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2\right]^2}=\frac{\pi^2}{4l^2}\,\frac{1-\cos\lambda\pi\,.\,\mathrm{ch}\,\varkappa\pi}{(\cos\lambda\pi-\mathrm{ch}\,\varkappa\pi)^2}.$$

Тъй като c и e са познати от (13) и (14), условието (32) се свежда към познатото изискване за устойчивост на двупараметровите двустранно безкрайни вихрови улици при линейни смущения, а именно

$$(60)\qquad \mathrm{ch}^2\varkappa\pi+\cos^2\lambda\pi=2,$$

което е все същото (3). За $\lambda=1/2$ то води до кармановото условие

$$(61)\qquad \mathrm{ch}\varkappa\pi=\sqrt{2},$$

или все същото (1). Него Кочин характеризира като условие за най-малката нестабилност на шахматните карманови вихрови улици.

Но сега и неравенството (36) е удовлетворено.

Като вземем под внимание въведените означения и условието (60), изискването (36) се свежда към по-простото

$$(62)\qquad e_{00}<e$$

или в интервала $0<\lambda<1/2$ към

$$(63)\qquad 2-\sin^4\lambda\pi>2\sqrt{1-\sin^4\lambda\pi},$$

което очевидно е всякога изпълнено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dolaptschiew, Bl. Über die Stabilität der Kármánschen Wirbelstrasse. ZAMM, **17**, 1937, 313—323.
2. Dolaptschiew, Bl. Störungsbewegungen (Bahnen) der einzelnen Wirbel der Kármánschen Wirbelstrasse, ZAMM, **18**, 1938, 263—271.
3. Кочин, Н. Е. О неустойчивости вихревых цепочек Кармана. ДАН СССР, **24**, 1938.
4. Долапчиев, Бл. Двупараметрови вихрови улици. Год. Соф. унив., **39**, 1942/43, 287—320.
5. Maue, A. W. Zur Stabilität der Kármánschen Wirbelstrasse. ZAMM, **20**, 1940, 129—137.
6. Sommerfeld, A. Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. II. Mechanik der deformierbaren Medien. Leipzig, 1957.
7. Долапчиев Бл. Об устойчивости и косом протекании двухпараметровых вихревых дорожек. ДАН СССР, **98**, 1954, 349—352.
8. Domm, U. Über die Wirbelstrassen von geringster Instabilität, ZAMM, **36**, 1956, 367—371.
9. Coddington, E. A. The stability of infinite differential systems associated with vortex streets. Journ. of Math. and Phys., **30**, 1952, 171—199.
10. Долапчиев, Бл. и Ив. Чобанов. Върху понятието „вихър" и движенията на вихровите конфигурации. Год. Соф. унив., **58**, 1965, 63—94.

11. Bils, O. On Coddington's stability theory of vortex streets I. Journ. of Math. and Phys., 44, 1965, 86—88.
12. Bils, O. On Coddingston's stability theory of vortex streets II, Journ. of Math. and Phys., 44, 1965, 96—98.

Постъпила на 3. IX. 1968 г.

О „НАИМЕНЬШЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ" ДВУХПАРАМЕТРОВЫХ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК

Благовест Долапчиев

(Резюме)

Н. Е. Кочин охарактеризирует условие устойчивости (1), (2) Кармана при линейном законе смущения вихров в их шахматном порядке в двухсторонне бесконечных цепочках „наименьше неустойчивое". То же самое относится и для двухпараметровых вихревых дорожек, т. е. таких двухсторонних бесконечных вихревых цепочек, которые отодвинуты одна по отношению к другой из их симметричного порядка на величину $2d$, так что если один из параметров $\varkappa = h/l$, то второй параметр $\lambda = d/l$ ($2h$ ширина дорожки $2l$ — деление вихров, а $2d$ — перемещение цепочек).

В настоящей работе дан другой способ исследования, отличный от [4], для строгого устанавливания условия устойчивости (3), (60) через подробное алгебраическое рассмотрение характеристичного уравнения (30) системы диффереициальных уравнений (28).

ÜBER DIE „GERINGSTE INSTABILITÄT" DER ZWEIPARAMETRIGEN WIRBELSTRASSEN

Blagowest Dolapčiev

(Zusammenfassung)

N. E. Kotschin nannte die Kármánsche Stabilitätsbedingung (1), (2) bei linearen Störungsgesetz der Wirbel in ihrer schachbrettartigen Anordung der zweiseitig unendlichen Wirbelreihen „geringste Instabilität". Dasselbe gilt aber auch für die zweiparametrigen Wirbelkonfigurationen, d. h. für solche zwei zweiseitig unendlichen Wirbelreihen, die in Bezug ihrer symmetrischen Anordnung um die Grösse $2d$ gegeneinander verschoben sind, so dass wenn das erste Parameter der Strasse $\varkappa = h/l$ ist, so ist das zweite Parameter $\lambda = d/l$ ($2h$ — Strassenbreite, $2l$ — Wirbelteilung, $2d$ — die Verschiebung)

In vorliegender Arbeit ist ein anderes Verfahren vorgeschlagen, verschieden demjenigeren in [4], zur strengeren Feststellung der Stabilitätsbedingung (3), (60) durch ausführlichere algebraische Behandlungen der charakteristischen Gleichúng (30) des Differentialgleichungssystems (28).