БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

КИНЕМАТИЧНО ЗНАЧЕНИЕ НА ИНВАРИАНТИТЕ НА РОЙ, ОБРАЗУВАН ОТ ХЕЛИКОИДАЛНИТЕ ОСИ НА ОБЩО ВИНТОВО ДВИЖЕНИЕ

Васил Диамандиев

Едно общо хеликоидално движение се характеризира чрез полето от скоростите си, полето ускорения и съответно ускорения от по-висок ред, базиращи се на основните зависимости при движение на твърда материална система (твърдо тяло). Важна роля при тези зависимости имат основните кинематични инварианти, като ротационна скорост, моментна винтова ос, моментна транслация, моментен център на ускоренията и др., които служат като отправна точка за характеристика на полето скорости и ускорения. Както е известно, движението на едно твърдо тяло кинематически може да бъде определено чрез скоростта $\bar{v}_0$ на един произволен негов полюс и мометната ротационна скорост ω. Това определяне в общия случай е нееднозначно, тъй като за еднозначното определяне са необходими някои допълнителни условия. Този проблем е бил предмет на иследване от Darbaux, Леви Чивита, Garnier и други автори.

В тази работа се изследва роят, образуван от моментните хеликоидални оси на общо винтово движение на твърдо тяло, чрез неговите геометрични характеристики. Геометричният параметър на този хеликоидален рой е в общия случай функция на времето. В друга работа [3] е иследвана връзката между класа (фамилията) движения и геометричните свойства на конгруенцията от съответните винтови оси на движенията. Там е разгледан един специален вид хеликоидални движения, които има постоянен ъгъл на нутацията θ. Тук движението е взето в най-общ вид без ограничение за неговите кинематични характеристики. Геометричните скаларни инварианти на хеликоидалния рой, както и другите му геометрични характеристики (централна точка, триедър на Френе и др.) от самата дефиниция на роя имат непосредствено кинематично значение. Изясняването кинематичния характер на тези инварианти с цел да добият възможно обозрим вид е главната част от предмета на тази работа. Същевременно при определянето на различните механично-геометрични връзки и зависимости са получени и някои самостоятелни кинематични свойства за полето скорости и ускорения на твърдото тяло и техните инварианти.

§ 1. Централен триедър на роя хеликоидални оси

За хеликоидалния рой и неговите инварианти ще спазваме обикновените означения, както за геометричен рой, за който са в сила формулите на Френе:

$$\frac{dz}{d\sigma}=a\bar{e}+c\bar{h},\quad \frac{d\bar{e}}{d\sigma}=\bar{g}, \tag{1}$$

$$\frac{d\bar{g}}{d\sigma}=a\bar{h}-\bar{e},\quad \frac{d\bar{h}}{d\sigma}=-a\bar{g}.$$

Тук $\bar{Z}$ е централната точка на роя, векторите $\bar{e}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ са съответно направляващият вектор на роя, централната нормала и централната тангента на роя, образуващи триедъра на Френе, а скаларните величини a, c, a — съответно ротацията, разпределителният параметър и хлъзгането на роя. В нашия случай очевидно

$$\bar{e}=\frac{\bar{\omega}}{\omega}, \tag{2}$$

гдето ω е големината на ротационната скорост, един от кинематичните скаларни инварианти. Означаваме с γ скаларния квадрат на вектора $\dot{\bar{\omega}}^0$, т. е.

$$\gamma=\dot{\bar{\omega}}^{0\,2}=\dot{\bar{e}}^{\,2}. \tag{3}$$

Величината γ характеризира изменението на направлението на ротационата скорост. Ако $\bar{\omega}$ има постоянно направление, например при ротация около постоянна ос или движение на равнина върху равнина, тогава $\gamma=0$. При общо хеликоидално движение, което е предмет на нашето разглеждане, $\gamma\neq 0$. Като следствие от (1) и (3) се получава следната връзка между естествения параметър на роя σ и времето:

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{\gamma}. \tag{4}$$

Аналогично на (2) ще изразим останалите вектори от триедъра на Френе чрез ω и неговите производни спрямо времето. Ако въведем вектора ъглово ускорение

$$\bar{\varepsilon}=\frac{d\bar{\omega}}{dt},$$

като следствие от (1), (2) и (3) получаваме

$$\bar{\varepsilon}=\dot{\omega}\bar{e}+\omega\sqrt{\gamma}\;\bar{g}. \tag{5}$$

От (5) и (2) имаме

$$\bar{g}=\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}\,\bar{\varepsilon}-\frac{\dot{\omega}}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\,\bar{\omega}. \tag{6}$$

Умножаваме векторно (2) и (6) и получаваме

$$\bar{h}=\frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}). \tag{7}$$

Зависимостите (2), (6) и (7) дават непосредствено механично тълкуване на централния триедър на Френе на роя хеликоидални оси.

С оглед на следващите разглеждания тук ще дадем отнасянето на скоростите и ускоренията на точките от твърдото тяло спрямо триедъра на роя. Нека $\bar{v}_0$ и $\bar{w}_0$ са съответно скоростта и ускорението на произволен полюс $\bar{r}_0$ на подвижната система. Представени спрямо осите на триедъра, те имат вида

$$\bar{v}_0=v_{0e}\bar{e}+v_{0g}\bar{g}+v_{0h}\bar{h},$$

$$\bar{w}_0=w_{0e}\bar{e}+w_{0g}\bar{g}+w_{0h}\bar{h}.$$

От формулата за разпределение на скоростите на точките от твърдо тяло

$$\bar{v}_M=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\overline{OM}$$

имаме основния кинематичен инвариант

$$\bar{v}_M\bar{\omega}=\bar{v}_0\bar{\omega}=\omega u, \tag{8}$$

гдето u е слагаемата на скоростта на произволен полюс в посока на хеликоидалната ос. Величината u обикновено се нарича моментна транслация на точките от твърдото тяло. Въз основа на (2), (6), (7) и (8) за компонентите на $\bar{v}_0$ и $\bar{w}_0$ върху осите на централния триедър на роя получаваме

$$v_{0e}=u, \tag{9}$$

$$v_{0g}=\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}(\bar{v}_0\bar{\varepsilon})-\frac{\dot{\omega}u}{\omega\sqrt{\gamma}}, \tag{10}$$

$$v_{0h}=\frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon}), \tag{11}$$

$$w_{0e}=\frac{1}{\omega}(\bar{w}_0\bar{\omega}), \tag{12}$$

$$w_{0g}=\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}(\bar{w}_0\bar{\varepsilon})-\frac{\dot{\omega}}{\omega^2\sqrt{\gamma}}(\bar{w}_0\bar{\omega}), \tag{13}$$

$$w_{0h}=\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}(\bar{w}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon}). \tag{14}$$

§ 2. Механично значение на ротацията a на роя

Тук ще изразим директно скаларния инвариант a чрез компонентите на ω и неговите производни спрямо времето. Изхождаме от последната от зависимостите (1), която очевидно може да се напише във вида

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = -a\sqrt{\gamma}\,\bar{g}. \tag{15}$$

От друга страна, чрез диференциране на (7) получаваме

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}\right](\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}) + \frac{1}{\omega^2\sqrt{\gamma}}(\bar{\omega}\times\dot{\bar{\varepsilon}}). \tag{16}$$

Сравняваме (15) и (16), от които след скаларно умножение с $\bar{g}$ получаваме

$$a = \frac{1}{\omega^3\sqrt{\gamma^3}}(\bar{\omega},\ \bar{\varepsilon},\ \dot{\bar{\varepsilon}}). \tag{17}$$

Зависимостта (17) показва, че a е диференциален инвариант от втори ред спрямо вектора $\bar{\omega}$. Ще дадем скаларен вид на (17), изразявайки $\bar{\omega}$ спрямо осите на подвижния триедър, свързан неизменно с твърдото тяло:

$$\bar{\omega} = p\bar{\xi}_0 + q\bar{\eta}_0 + r\bar{\zeta}_0. \tag{18}$$

Диференцираме два пъти (18) спрямо t:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{p}\,\bar{\xi}_0 + \dot{q}\,\bar{\eta}_0 + \dot{r}\,\bar{\zeta}_0,$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \ddot{p}\,\bar{\xi}_0 + \ddot{q}\,\bar{\eta}_0 + \ddot{r}\,\bar{\zeta}_0 + \bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}.$$

Заместваме $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ в (17) и след известни пресмятания получаваме

$$a = \frac{1}{\omega^3\sqrt{\gamma^3}}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \dot{p} & \dot{q} & \dot{r} \\ \ddot{q} & \ddot{q} & \ddot{r} \end{vmatrix} + \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}}. \tag{19}$$

Релацията (19) дава директно ротацията на хеликоидалния рой чрез компонентите на ротационната скорост и нейните производни спрямо подвижната координатна система. Аналогично, ако $\bar{\omega}$ и неговите производни бъдат отнесени спрямо неподвижната координатна система, от (17) получаваме

$$a = \frac{1}{\omega^3\sqrt{\gamma^3}}\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_x & \dot{\omega}_y & \omega_z \\ \ddot{\omega}_x & \ddot{\omega}_y & \omega_z \end{vmatrix}. \tag{19'}$$

§ 3. Механичен израз на централната точка на хеликоидалния рой

Както е известно, моментното положение на хеликоидалната ос може да бъде определено чрез полюс на твърдото тяло посредством точката

(20) $$\bar{A}=\bar{r}_0+\frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega}\times\bar{v}_0).$$

При различни полюси $\bar{r}_0$ получаваме различни точки $\bar{A}$, но всички те лежат върху хеликоидалната ос. Централната точка на роя се определя от известната формула

$$\bar{Z}=\bar{A}-\frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{e}}}{\dot{\bar{e}}^2}\bar{e}$$

или съгласно (3)

(21) $$\bar{Z}=\bar{A}-\frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{e}}}{\gamma}\bar{e}.$$

Релацията (21) дава централната точка във функция от произволен полюс на твърдото тяло. Но дефиницията на $\bar{Z}$ е чисто геометрична и следователно тази точка по същество е инвариантна спрямо полюсите на твърдото тяло. По тази причина ще потърсим друг израз за $\bar{Z}$, който е независим от избора на полюса $\bar{r}_0$. Не е трудно да се забележи, че $\bar{A}$ е ортогонална проекция на $\bar{r}_0$ върху хеликоидалната ос. Нека с $\bar{A}_0$ означим ортогоналната проекция на центъра на неподвижната координатна система върху винтовата ос. За така дефинираната точка получаваме

(22) $$\bar{A}_0=\bar{r}_0+\frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega}\times\bar{v}_0)-\frac{1}{\omega^2}(\bar{r}_0\bar{\omega})\bar{\omega}.$$

Въз основа на закона за разпределение на скоростите се проверява, че $\bar{A}_0$ е инвариант относно произволен полюс $\bar{r}_0$. Ако заместим $\bar{A}_0$ в (21), получаваме

(23) $$Z=\bar{A}_0-\frac{1}{\gamma}(\dot{\bar{A}}_0\dot{\bar{e}})\bar{e}.$$

Диференцираме (22) спрямо t и намираме

(24) $$\dot{\bar{A}}_0=\bar{v}_0+\frac{\bar{\varepsilon}\times\bar{v}_0}{\omega^2}+\frac{\bar{\omega}\times\bar{w}_0}{\omega^2}-\frac{2\dot{\omega}}{\omega^2}(\bar{\omega}\times\bar{v}_0)-\frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\bar{r}_0\bar{\omega})\bar{\omega}-\frac{1}{\omega^2}(\bar{v}_0\bar{\omega})\bar{\omega}$$
$$-\frac{1}{\omega^2}(\bar{r}_0\bar{\varepsilon})\bar{\omega}-\frac{1}{\omega^2}(\bar{r}_0\bar{\omega})\bar{\varepsilon}.$$

Може да се покаже, че $\dot{\bar{A}}_0$ не зависи от полюса $\bar{r}_0$. За да опростим израза за $\dot{\bar{A}}_0$, взимаме в (24) за полюс самата точка $\bar{A}_0$. Така получаваме

$$\dot{\bar{A}}_0=\frac{u}{\omega^3}(\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega})+\frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega}\times\bar{w}_{A_0})-\frac{1}{\omega^2}(\bar{r}_0\bar{\varepsilon})\bar{\omega}.$$

Спрямо векторите на централния триедър същият израз има вида

$$(25)\qquad \dot{\bar{A}}_0=\frac{u\sqrt{\gamma}}{\omega}(\bar{g}\times\bar{e})+\frac{1}{\omega}(\bar{e}\times\bar{w}_{A_0})-(\bar{A}_0\bar{g})\sqrt{\gamma}\,\bar{e}.$$

Заместваме (25) в (23) и намираме

$$(26)\qquad \bar{Z}=\bar{A}_0+\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}(\bar{h}\,\bar{w}_{A_0})\bar{e}.$$

Изразът (26) за централната точка е независим от избора на полюс, но привидно зависи от координатната система поради дефиницията на точката $\bar{A}_0$. Тук ще забележим, че w_{A_0} е ускорението на точка от твърдото тяло, която в даден момент съвпада с точката $\bar{A}_0$ от хеликоидалната ос. Това ускорение трябва да се различава от ускорението на точката $\bar{A}_0^*$, неизменно свързана с хеликоидалната ос, която е подвижна и спрямо точките от твърдото тяло.

§ 4. Разпределение на ускоренията на точките от твърдата система, разположени в даден момент върху хеликоидалната ос

С оглед на следващи изследвания ще намерим израз за фигуриращото в (26) ускорение на точките от твърдото тяло, които в даден момент съвпадат с точките на винтовата ос. Първоначално за простота ще разгледаме този въпрос за движение на твърдото тяло с постоянна точка. Ако постоянната точка е полюс, съгласно формулата на Ривалс имаме

$$(27)\qquad \bar{w}_M=\bar{\varepsilon}\times\overline{OM}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\overline{OM}),$$

гдето M е произволна точка от твърдото тяло. Нека M в даден момент се намира върху винтовата ос, т. е.

$$(28)\qquad \overline{OM}=\frac{OM}{\omega}\bar{\omega}.$$

Заместваме (27) в (28) и получаваме

$$(29)\qquad \bar{w}_M=\frac{OM}{\omega}(\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega}).$$

Ще обобщим (29) в случай на общо хеликоидално движение. За тази цел ще използваме точката, наречена моментен център на ускоренията. Известно е [5], че при

$$(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2\neq 0$$

тази точка с ускорение нула съществува във всеки момент и се дава с израза

$$(30)\qquad \bar{r}_Q=\bar{r}_0+\frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}[\bar{\varepsilon}(\bar{w}_0\bar{\varepsilon})+(\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega})(\bar{w}_0\bar{\omega})+\bar{\omega}\{\omega^2(\bar{w}_0\bar{\omega})+(\bar{w}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})\}],$$

гдето $\bar{r}_0$ е произволен полюс. Формулата на Ривалс, приложена за полюс, съвпадащ в даден момент с моментния център на ускоренията, има вида

$$(31)\qquad w_M=\bar{\varepsilon}\times\overline{OM}+(\bar{\omega}\,\overline{QM})\bar{\omega}-\omega^2\overline{QM}.$$

Означаваме с I ортогоналната проекция на Q върху хеликоидалната ос. Тогава точките от хеликоидалната ос могат да се представят във вида

$$QM = QI + IM. \tag{32}$$

Заместваме (32) в (31) и получаваме

$$\bar{w}_M = \frac{IM}{\omega}(\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) + \bar{\varepsilon} \times I\bar{Q} - \omega^2 I\bar{Q}, \tag{33}$$

което очевидно е обобщение на (29) при $I = Q = 0$. От (33) може да се направи изводът, че ускоренията на точките, съвпадащи с хеликоидалната ос, имат едни и същи проекции върху векторите $\bar{e}$ и $\bar{g}$, следователно в частност и върху самата винтова ос.

Означаваме с φ ориентирания ъгъл между векторите $\bar{g}$ и $I\bar{Q}$, като двойката $\bar{g}, I\bar{Q}$ има същата ориентация, както двойката $\bar{g}, \bar{h}$, или

$$\overline{IQ} = IQ\cos\varphi\bar{g} + IQ\sin\varphi\bar{h}. \tag{34}$$

Проектираме (33) върху осите на централния триедър на роя и съгласно (34) получаваме

$$w_{Me} = -\omega\sqrt{\gamma}\, IQ\sin\varphi, \tag{35}$$

$$w_{Mg} = \dot{\omega} IQ\sin\varphi + \omega^2 IQ\cos\varphi \tag{36}$$

$$w_{Mh} = \omega^2 IQ\sin\varphi - \dot{\omega} IQ\cos\varphi - IM\omega\sqrt{\gamma}, \tag{37}$$

Формулите (35), (36) потвърждават направения по-горе извод.

§ 5. Някои инвариантни кинематични зависимости

Като следствие от (8) ще получим други инвариантни кинематични зависимости за полето скорости, ускорения и ускорения от по-висок ред на точките от твърдата система. Диференцираме (8) последователно два пъти спрямо t и получаваме

$$\bar{w}_0\bar{\omega} + \bar{v}_0\bar{\varepsilon} = \dot{\omega}u + \omega\dot{u}, \tag{38}$$

$$\dot{\bar{w}}_0\bar{\omega} + 2\bar{w}_0\bar{\varepsilon} + \bar{v}_0\dot{\bar{\varepsilon}} = \ddot{\omega}u + 2\dot{\omega}\dot{u} + \omega\ddot{u}. \tag{39}$$

От дефиницията на хеликоидалната ос следва, че точките от твърдото тяло, съвпадащи в даден момент с нея, имат само транслационна скорост, т. е.

$$\bar{v}_{M\text{хел}} = u\bar{e}. \tag{40}$$

В (38) взимаме за полюс точка от винтовата ос; въз основа на (5) и (40) получаваме

$$w_{Me} = \dot{u}, \tag{41}$$

или отново виждаме, че проекцията на ускорението на точките от винтовата ос върху самата нея е инвариант. Сравняваме (35) с (41), отгдето следва

(42) $$IQ \sin\varphi = -\frac{\dot{u}}{\omega\sqrt{\gamma}}\cdot$$

Ще получим същата релация по друг начин. В (38) взимаме за полюс моментния център на ускоренията Q и получаваме

(43) $$\bar{v}_Q\bar{\varepsilon} = \dot{u}\omega + u\dot{\omega}.$$

От формулата за разпределение на скоростите имаме

(44) $$\bar{v}_Q = \bar{v}_I + \bar{\omega}\times\overline{IQ}.$$

Проектираме (44) върху осите на централния триедър, като използваме (40) и (34):

(45) $$\bar{v}_Q = u\bar{e} - \omega IQ \sin\varphi\bar{g} + \omega IQ\cos\varphi\bar{h}.$$

Ако заместим (45) в (43), получаваме (42).

Изхождайки от (39), ще получим други релации. Чрез диференциране на (5) получаваме

(46) $$\dot{\bar{\varepsilon}} = (\dot{\omega} - \omega\gamma)\bar{e} + \left(2\omega\sqrt{\gamma} + \frac{\omega\dot{\gamma}}{2\sqrt{\gamma}}\right)\bar{g} + \omega\gamma a\bar{h}.$$

Релацията (39), приложена за точки от хеликоидалната ос, съгласно (5), (33), (40) и (46) добива вида

(47) $$\bar{\omega}\,\dot{\bar{w}}_M = -2\omega^3\sqrt{\gamma}\, IQ\cos\varphi + \ddot{u}\omega + 2\dot{\omega}\dot{u} + \omega u\gamma,$$

отгдето следва, че и вторите ускорения на точките върху хеликоидалната ос имат инвариантна проекция върху нея. Вземайки за полюс Q в (39) и като използваме (42), получаваме

(48) $$\dot{\bar{w}}_Q\omega = \quad \omega^2\gamma a IQ\cos\varphi + \ddot{u}\omega + u\omega\gamma - \frac{\omega\dot{u}\dot{\gamma}}{2\gamma}\cdot$$

Тук $\dot{\bar{w}}_Q$ е второто ускорение на точката от твърдото тяло, която в даден момент съвпада с моментния център на ускоренията.

§ 6. Друго инвариантно представяне на централната точка на хеликоидалния рой

Формулата за разпределение на ускоренията (33) ще приложим за точката $\bar{A}_0$, дефинирана чрез (22); имаме

(49) $$\bar{w}_{A0} = \frac{IA_0}{\omega}(\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega}) + \varepsilon\times\overline{IQ} + \omega^2\overline{IQ}.$$

Заместваме (49) в (26), което след известни преобразования добива вида

$$\bar{Z} = \bar{I} + \frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}[\bar{h}(\overline{IQ}\times\bar{\varepsilon}) + \omega^2\bar{h}\overline{IQ}]\bar{e}. \tag{50}$$

От (5) и (34) следва

$$IQ\cos\varphi = \frac{\bar{\varepsilon}\,\overline{IQ}}{\omega\sqrt{\gamma}}. \tag{51}$$

Въз основа на (5), (34), (42) и (51) изразът (50) добива вида

$$\bar{Z} = \bar{I} - \left[\frac{\dot{u}}{\gamma} + \frac{\dot{\omega}}{\omega^2\gamma}(\bar{\varepsilon}\,\overline{IQ})\right]\bar{e}. \tag{52}$$

Релацията (52) за централната точка на роя очевидно е независима както от полюса на материалната система, така и от координатната система; тя съдържа само механични инварианти.

Изхождайки от дефиницията на точката I като ортогонална проекция на моментния център на ускоренията върху винтовата ос, ще получим по нов независим начин (52). За тази цел вземаме I за определяща точка на винтовата ос и тогава за централната точка имаме

$$\bar{Z} = \bar{I} - \frac{(\dot{\bar{e}}\,\dot{\bar{I}})}{\gamma}\bar{e}. \tag{53}$$

От определението на I имаме

$$\bar{I} = \bar{r}_Q + \frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega}\times\bar{v}_Q), \tag{54}$$

гдето $\bar{r}_Q$ се дава от (30), а за $\bar{v}_Q$ имаме

$$\bar{v}_Q = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\overline{OQ}. \tag{55}$$

От (30) получаваме

$$\overline{OQ} = \frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}[\bar{\varepsilon}(\bar{w}_0\bar{\varepsilon}) + (\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega})(\bar{w}_0\bar{\omega}) + \bar{\omega}\{\omega^2(\bar{w}_0\bar{\omega}) + \bar{w}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon}\}]. \tag{56}$$

Заместваме (56) в (55) и намираме

$$\bar{v}_Q = \bar{v}_0 + \frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}[(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})(\bar{w}_0\bar{\varepsilon}) + \omega^2(\bar{w}_0\bar{\omega})\bar{\varepsilon} - \omega\dot{\omega}(\bar{\omega}\,\bar{w}_0)\bar{\omega}]. \tag{57}$$

От (54) имаме

$$\dot{\bar{I}} = \dot{\bar{r}}_Q + \frac{1}{\omega^2}(\bar{\varepsilon}\times\bar{v}_Q) + \frac{1}{\omega^2}(\bar{\omega}\times\dot{\bar{v}}_Q) - \frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\bar{\omega}\times\bar{v}_Q). \tag{58}$$

Фигуриращите в (58) вектори $\dot{\bar{r}}_Q$ и $\dot{\bar{v}}_Q$ ще определим от (30) и (55). (Нека отбележим, че

$$\dot{\bar{r}}_Q = \bar{v}_Q$$

и

$$\dot{\bar{v}}_Q = \bar{w}_Q,$$

понеже точката Q си изменя положението не само спрямо координатната система, но и спрямо точките от твърдото тяло, или другояче казано, абсолютните скорости на векторите $\bar{r}_Q$, $\bar{v}_Q$ не съвпадат с преносните им скорости.) Диференцираме (30) и (55) и получаваме

$$\dot{\bar{r}}_Q=\bar{v}_0+\frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}\left[\bar{\varepsilon}(\dot{\bar{w}}_0\bar{\varepsilon})+(\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega})(\dot{\bar{w}}_0\bar{\omega})+\bar{\omega}\{\omega^2(\dot{\bar{w}}_0\omega)+(\bar{w}_0\omega\dot{\bar{\varepsilon}})\}+\cdots\right]+\cdots, \tag{59}$$

$$\dot{\bar{v}}_Q=\dot{\bar{w}}_0+\frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}\left[(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})(\dot{\bar{w}}_0\bar{\varepsilon})+\omega^2(\dot{\bar{w}}_0\bar{\omega})\bar{\varepsilon}-\omega\dot{\omega}(\dot{\bar{w}}_0\bar{\omega})\bar{\omega}+\cdots\right]+. \tag{60}$$

Изпуснатите изрази в (59) и (60), означени с многоточие, съдържат ускорението на произволен полюс $\bar{w}_0$. От дефиницията на точката Q следва, че векторите $\dot{\bar{r}}_Q$ и $\dot{\bar{v}}_Q$ не зависят от избора на полюса $\bar{r}_0$; в противен случай би излязло, че изменението на моментния център на ускоренията и неговата скорост за различните полюси е различно. За опростяване на (59) и (60) взимаме в тях за полюс точката Q. Следователно получаваме

$$\dot{\bar{r}}_Q=\bar{v}_Q+\frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}\left[\bar{\varepsilon}(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\varepsilon})+(\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega})(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega})+\bar{\omega}\{\omega^2(\dot{\bar{w}}_Q\omega)+(\dot{\bar{w}}_Q\omega\bar{\varepsilon})\}\right], \tag{61}$$

$$\dot{\bar{v}}_Q=\frac{1}{(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2}\left[(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\varepsilon})+\omega^2(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega})\bar{\varepsilon}-\omega\dot{\omega}(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega})\bar{\omega}\right]. \tag{62}$$

От (58) намираме

$$\dot{\bar{l}}\,\dot{\bar{e}}=\dot{\bar{r}}_Q\dot{\bar{e}}+\frac{1}{\omega^2}(\dot{\bar{\varepsilon}}\times\bar{\varepsilon})\bar{v}_Q+\frac{1}{\omega^2}(\dot{\bar{e}}\times\bar{\omega})\dot{\bar{v}}_Q-\frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\bar{e}\times\bar{\omega})\bar{v}_Q. \tag{63}$$

Въз основа на (43), (42), (61) и (62) получаваме последователно

$$\dot{\bar{r}}_Q\dot{\bar{e}}=\dot{u}+\frac{1}{\omega^3}(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\varepsilon}).$$

$$\frac{1}{\omega^2}(\dot{\bar{e}}\times\bar{\varepsilon})\bar{v}_Q-\frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\dot{\bar{e}}\times\bar{\omega})\bar{v}_Q=\frac{\dot{\omega}\sqrt{\gamma}}{\omega}\,lQ\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\omega^2}(\dot{\bar{e}}\times\bar{\omega})\dot{\bar{v}}_Q=-\frac{1}{\omega^3}(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\varepsilon}).$$

Получените изрази заместваме в (63) и получаваме

$$\dot{\bar{l}}\,e=\dot{u}+\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}(\bar{\varepsilon}\,l\,\bar{Q}). \tag{64}$$

Лесно се вижда, че ако се замести (64) в (53), се получава (52).

Релацията (52) показва, че централната точка на хеликоидалния рой се отчита спрямо точката l, която има чисто кинематично съдържание. Тук ще отбележим един частен случай. Нека имаме равномерна транслация, т. е. $u=\text{const}$, и постоянна големина на ротацията, т. е. ω const при хеликоидалното движение. Тогава очевидно във всеки момент $\dot{u}=0$, $\dot{\omega}=0$ и (52) добива вида

$$(65) \qquad \bar{Z}=\bar{I}.$$

Следователно при такова специално винтово движение централната точка на хеликоидалния рой има простото механично тълкуване: тя е ортогоналната проекция на моментния център на ускоренията на точките от твърдото тяло върху винтовата ос. В този случай, както следва от (65), моментният център на ускоренията през време на цялото движение лежи в главната равнина на хеликоидалния рой.

Подобно тълкуване на централната точка ще имаме по-общо и тогава, когато кинематичните инварианти на хеликоидалното движение са свързани със зависимостта

$$\dot{u}+\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}(\bar{\varepsilon}\,.\,I\bar{Q})=0$$

във всеки момент на движението.

§ 7. Кинематично значение на разпределителния параметър на хеликоидалния рой

Първата от формулите на Френе (1) може да се напише във вида

$$(66) \qquad \dot{\bar{Z}}=\sqrt{\gamma}(a\bar{e}+c\bar{h}).$$

Оттук за c намираме

$$(67) \qquad c=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\dot{\bar{Z}}\bar{h}).$$

Диференцираме (53) спрямо t и получаваме

$$(68) \qquad \dot{\bar{Z}}=\dot{\bar{I}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\bar{e}}\,\dot{\bar{I}}}{\gamma}\right]\bar{e}-\frac{\dot{\bar{e}}\,\dot{\bar{I}}}{\gamma}\dot{\bar{e}}$$

Заместваме (68) в (67), или имаме

$$c=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\dot{\bar{I}}\,\bar{h}).$$

Въз основа на (58) получаваме

$$\dot{\bar{I}}\,\bar{h}=\bar{h}\,\dot{\bar{r}}_Q+\frac{1}{\omega^2}(\bar{h}\times\bar{\varepsilon})\bar{v}_Q+\frac{1}{\omega^2}(\bar{h}\times\bar{\omega})\dot{\bar{v}}_Q+\frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\bar{\omega}\times\bar{h})\bar{v}_Q,$$

или като вземем под внимание (51), (61) и (62), след известни пресмятания намираме

$$(69) \qquad c=-\frac{u}{\omega}-\frac{\dot{u}\,\dot{\omega}}{\omega^2\gamma}+\frac{\bar{\varepsilon}\,I\bar{Q}}{\gamma}.$$

Формула (69) изразява разпределителния параметър на хеликоидалния рой чрез механични инварианти на полето скорости и ускорения на точките от твърдото тяло. Ще получим същата релация по друг начин, като изхождаме от геометричната дефиниция на c. Известно е, че c се дефинира като граница на отношението на оста отсечка на две безкрайно близки прави от роя към синуса на ориентирания ъгъл, заключен между тях. В случая ще имаме две безкрайно близки по отношение на времето хеликоидални оси. От равенството

$$(70)\qquad \bar{\omega}(t)\times\bar{\omega}(t+\Delta t)=\Delta t(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})+\Delta t^2\bar{R}(\bar{\omega},\bar{\varepsilon},\dots)$$

получаваме

$$\sin[\bar{\omega}(t),\bar{\omega}(t+\Delta t)]=\Delta t\frac{|\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}+\Delta t^2R^*,$$

или въз основа на (17) имаме

$$(71)\qquad \sin[\bar{\omega},\bar{\omega}(t+\Delta t)]=\frac{\Delta t}{\sqrt{\gamma}}+\Delta t^2R^*,$$

гдето R^* е величина, съдържаща $\bar{\omega}$ и производните й. Оста отсечка определяме от зависимостта

$$(72)\qquad d=\bar{n}\,.\,\overline{A_1A_2},$$

гдето $\bar{n}$ е единичен вектор, нормален на $\bar{\omega}(t)$ и $\bar{\omega}(t+\Delta t)$, а $\overline{A_1A_2}$ е вектор, съединяващ точките на две безкрайно близки винтови оси. От (70) имаме с приближение от първи ред по отношение на Δt

$$(73)\qquad \bar{n}=\frac{\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}}{|\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}|}=\bar{h}.$$

Въз основа на (20) намираме

$$(74)\qquad \overline{A_1A_2}=\left[\bar{v}_0+\frac{\bar{\omega}\times\bar{v}_0}{\omega^2}+\frac{\bar{\omega}\times\bar{w}_0}{\omega^2}-\frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\bar{\omega}\times\bar{w}_0)\right]\Delta t+\Delta t^2\bar{R}_1.$$

От (71), (72), (73), (74) и геометричната дефиниция на c получаваме

$$(75)\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{h}\,.\left[\bar{v}_0+\frac{\bar{\varepsilon}\times\bar{v}_0}{\omega^2}+\frac{\bar{\omega}\times\bar{w}_0}{\omega^2}-\frac{2\dot{\omega}}{\omega^3}(\bar{\omega}\times\bar{w}_0)\right].$$

Очевидно (75) е инвариантен относно полюса $\bar{r}_0$; ако вземем за полюс точка от хеликоидалната ос и съобразим (5) и (40), получаваме

$$(76)\qquad c=-\frac{u}{\omega}+\frac{1}{\omega\sqrt{\gamma}}\bar{g}\,\bar{w}_{0(\text{хел})}.$$

Въз основа на (33), (36), (42), (51) се вижда, че (69) и (76) са еквивалентни.

Ще намерим друг израз за c, от който ще получим една отделна инвариантна кинематична зависимост за полето скорости и ускорения на точките от подвижната система. За тази цел изхождаме от формулата на Ривалс, приложена за моментния център на ускоренията Q:

$$(77)\qquad \bar{w}_Q=\bar{w}_0+\bar{\varepsilon}\times\overline{OQ}+\bar{\omega}(\bar{\omega}\overline{OQ})-\omega^2\overline{OQ}=0.$$

Векторът $\overline{OQ}$ представяме във вида

(78) $$O\bar{Q}=\frac{\bar{\omega}\times\bar{v}_0}{\omega^2}+h\bar{e}+IQ\cos\varphi\,\bar{g}+IQ\sin\varphi\,\bar{h},$$

гдето h е големината на ортогоналната проекция на $O\bar{Q}$ върху винтовата ос. Проектираме (77) върху осите на централния триедър, като вземем под внимание (78), и получаваме

(79) $$w_{0e}+\frac{\bar{\omega}\,\bar{v}_0}{\omega}-\frac{\dot{\omega}}{\omega}v_{0e}+\omega\sqrt{\gamma}\;IQ\sin\varphi=0,$$

(80) $$w_{0g}-\frac{\dot{\omega}}{\omega}v_{0g}-IQ\sin\varphi\omega+\omega v_{0h}-\omega^2 IQ\cos\varphi=0.$$

Не е трудно да се види, че (79) е еквивалентно с (42). Като съобразим (42) в (80), последното равенство добива вида

(81) $$IQ\cos\varphi=\frac{\dot{u}\omega}{\omega^3\sqrt{\gamma}}+\frac{w_{rg}}{\omega^2}-\frac{\omega v_{0g}}{\omega^3}+\frac{v_{0h}}{\omega}.$$

Заместваме (81) в (69) и получаваме

$$c=-\frac{u}{\omega}+\frac{w_{rg}}{\omega\sqrt{\gamma}}-\frac{\dot{\omega}v_{rg}}{\omega^2\sqrt{\gamma}}+\frac{v_{0h}}{\sqrt{\gamma}},$$

или въз основа на (10), (11) и (13) получаваме

(82) $$c=-\frac{u}{\omega}+\frac{\omega^2 u}{\omega^3\gamma}-\frac{\dot{\omega}}{\omega^3\gamma}[(\bar{w}_0\bar{\omega})+(\bar{v}_0\bar{\varepsilon})]+\frac{1}{\omega^2\gamma}[(\bar{w}_0\bar{\varepsilon})+(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})].$$

Като вземем под внимание (38), (82) добива вида

(83) $$c=-\frac{u}{\omega}-\frac{\dot{\omega}\dot{u}}{\omega^2\gamma}+\frac{1}{\omega^2\gamma}[(\bar{w}_0\bar{\varepsilon})+(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})].$$

Като следствие от (83) получаваме инвариантна кинематична зависимост

(84) $$(\bar{w}_0\bar{\varepsilon})+(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})=\omega^2\gamma c+u\gamma\omega+\omega\dot{u},$$

свързваща скоростта и ускорението на произволен полюс $\bar{r}_0$ на подвижната система. Тази релация е независима от (38) и не може да се получи като следствие от основната зависимост (8).

Ще отбележим, че ако в (83) вземем за полюс точка от хеликоидалната ос или моментния център на ускоренията, получаваме отново (69).

§ 8. Инвариантна кинематична зависимост, свързана с ротацията a на хеликоидалния рой

Релацията (19) или (19′) изразява a непосредствено чрез компонентите на ротационната скорост $\bar{\omega}$ и нейните производни. Тук ще намерим друг израз за a, който е свързан със скоростта и ускорението на произволен полюс на подвижната система. За тази цел диференцираме спрямо t израза

$$\bar{v}_0=v_{0e}\bar{e}+v_{0g}\bar{g}+v_{0h}\bar{h}$$

и като съобразим (1), (4), получаваме

(85) $$\overline{w}_0=(\dot{v}_{0e}-v_{0g}\sqrt{\gamma})\,\overline{e}+(\dot{v}_{0g}+\sqrt{\gamma}\,v_{0e}-a\sqrt{\gamma}\,v_{0h})\overline{g}+(v_{0h}+\alpha v_{0g}\sqrt{\gamma})\,\overline{h}.$$

В (85) взимаме компонентата по централната тангента, или имаме

(86) $$w_{0h}=\dot{v}_{0h}+a v_{0g}\sqrt{\gamma}\,.$$

Тук ще отбележим, че изобщо $w_{0h}\neq\dot{v}_{0h}$, тъй като централният триедър $\overline{e}$, $\overline{g}$, $\overline{h}$ е подвижен и спрямо точките на твърдото тяло. Ако за даден момент $v_{0g}=0$, тогава от (86) следва, че в частен случай може $w_{0h}=\dot{v}_{0h}$. Ако изключим тези моменти в движението от (86), получаваме

(87) $$a=\frac{w_{0h}-\dot{v}_{0h}}{v_{0g}\sqrt{\gamma}}\,.$$

Въз основа на (10), (11) и (14) (87) добива вида

(88) $$a=\omega\,\frac{(\overline{v}_0\overline{\omega}\,\overline{\varepsilon})\dfrac{d}{dt}\,[\ln[\omega^2\sqrt{\gamma}\,]]-(\overline{v}_0\,\overline{\omega}\,\dot{\overline{\varepsilon}})}{(\overline{v}_0\,\overline{\varepsilon})-\dot{\omega}u}\,.$$

Релациите (87) или (88) могат, обратно, да се разглеждат като инвариантни кинематични зависимости, свързани с ротацията на хеликоидалния рой.

§ 9. Представяне хлъзгането на хеликоидалния рой чрез механични инварианти

От (66) получаваме

(89) $$a=\frac{\dot{\overline{Z}}\,\overline{e}}{\sqrt{\gamma}}\,.$$

Умножавайки скаларно (68) с $\overline{e}$, намираме

(90) $$\dot{\overline{Z}}\,\overline{e}=\overline{e}\,\dot{\overline{I}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\overline{e}}\,\dot{\overline{I}}}{\gamma}\right].$$

От (64) имаме

(91) $$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\overline{e}}\,\dot{\overline{I}}}{\gamma}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{u}}{\gamma}+\frac{\dot{\omega}}{\gamma\omega^2}(\overline{\varepsilon}\overline{I}\overline{Q})\right].$$

От (58) получаваме

(92) $$\overline{e}\,\dot{\overline{I}}=\dot{\overline{r}}_Q\overline{e}+\frac{\sqrt{\gamma}}{\omega}\,\overline{h}\,\overline{v}_Q.$$

Въз основа на (45) и (61) (92) добива вида

(93) $$\overline{e}\,\dot{\overline{I}}=u+\sqrt{\gamma}\,IQ\cos\varphi+\frac{\dot{\omega}}{\omega^4\gamma}(\overline{w}_Q\overline{\varepsilon})+\frac{1}{\omega\gamma}(\dot{\overline{w}}_Q\overline{\omega})+\frac{1}{\omega^3\gamma}(\overline{w}_Q\overline{\omega}\,\overline{\varepsilon}).$$

От (89), (90), (91) и (93) окончателно получаваме

$$(94)\qquad a=\frac{u}{\sqrt{\gamma}}+\frac{(\bar{\varepsilon} I\bar{Q})}{\varepsilon\sqrt{\gamma}}+\frac{\dot{\omega}}{\omega^4\gamma}(\dot{\bar{w}}_Q\,\bar{\varepsilon})+\frac{1}{\omega\gamma}(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega})+\frac{1}{\omega^3\gamma}(\dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{u}}{\gamma}+\frac{\omega}{\omega^2\gamma}(\bar{\varepsilon}\ I\bar{Q})\right].$$

Релацията (94) изразява хлъзгането на хеликоидалния рой посредством механичните инварианти на полето скорости, полето ускорения и полето втори ускорения на точките на подвижната система. Аналогично на (83) може да се намери формула за a във функция от кинематичните елементи на произволен полюс на твърдото тяло. Обаче както показват изчисленията, получава се твърде сложен и обемист израз, който едва ли ще е полезен за изводи и следствия. Тук ще дадем само изразяване величините с вторите ускорения на Q чрез известни кинематични инварианти и чрез геометричните инварианти c и a на самия хеликоидален рой.

От (48) имаме

$$(95)\qquad \dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega}=-\omega\sqrt{\gamma}\,a(\bar{\varepsilon}\ I\bar{Q})+\ddot{u}\,\omega+\omega u\gamma-\frac{\omega\dot{u}\dot{\gamma}}{2\gamma}$$

Чрез диференциране на (84) спрямо t получаваме

$$(96)\qquad (\dot{\bar{w}}_0\bar{\varepsilon})+(\bar{w}_0\,\dot{\bar{\varepsilon}})+(\dot{w}_0\overline{\omega\varepsilon}+(\bar{v}_0\bar{\omega}\ \dot{\bar{\varepsilon}})=\frac{d}{dt}(\omega^2\gamma c+u\omega\gamma+\dot{\omega}\dot{u}).$$

В (96) взимаме за полюс Q (поради инвариантността) и получаваме

$$(97)\qquad (\dot{\bar{w}}_Q\,\bar{\varepsilon})=a\sqrt{\gamma}\,\omega^2\dot{u}-(\bar{\varepsilon}\,I\bar{Q})\left(2\omega\omega+\frac{\omega^2\dot{\gamma}}{2\gamma}\right)+\frac{d}{dt}(c\omega^2\gamma+u\omega\gamma+\dot{\omega}\dot{u}),$$

като същевременно използвахме съгласно (45) и (46) релацията

$$(98)\qquad (\bar{v}_Q\bar{\omega}\,\dot{\bar{\varepsilon}})=-a\sqrt{\gamma}\,\omega^2\,\dot{u}+(\bar{\varepsilon}\,I\bar{Q})\left(2\omega\dot{\omega}+\frac{\omega^2\dot{\gamma}}{2\gamma}\right).$$

За да получим още една аналогична зависимост, ще изходим от тъждественото равенство

$$(\bar{w}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})=\frac{d}{dt}(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})-(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\dot{\bar{\varepsilon}}),$$

което, диференцирано спрямо t, дава

$$(99)\qquad (\dot{\bar{w}}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})+(\bar{w}_0\bar{\omega}\,\dot{\bar{\varepsilon}})=\frac{d^2}{dt^2}(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})-(\bar{w}_0\bar{\omega}\,\dot{\bar{\varepsilon}})-(\bar{v}_0\bar{\varepsilon}\,\dot{\bar{\varepsilon}})-(\bar{v}_0\bar{\omega}\,\ddot{\bar{\varepsilon}}).$$

Очевидно (99) катоследствие от тъждество е инвариантно относно полюса и ако за такъв вземем Q, получаваме

$$(100)\qquad (\dot{\bar{w}}_Q\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})=\frac{d^2}{dt^2}(\bar{v}_Q\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})-(\bar{v}_Q\bar{\varepsilon}\,\dot{\bar{\varepsilon}})-(\bar{v}_Q\bar{\omega}\,\ddot{\bar{\varepsilon}}).$$

От (45) имаме

$$(101\qquad (\bar{v}_Q\bar{\omega}\,\bar{\varepsilon})=\omega^2(\bar{\varepsilon}\ I\bar{Q}).$$

За останалите изрази след известни пресмятания получаваме

$$(102)\qquad (\bar{v}_Q \bar{\varepsilon}\, \dot{\bar{\varepsilon}}) + (\bar{v}_Q \bar{\omega}\, \ddot{\bar{\varepsilon}}) = au\omega^2\gamma^{3/2} + (\bar{\varepsilon} I \bar{Q}) \left[\frac{1}{4} \frac{\omega^2 \dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - a^2\omega^2\gamma + \frac{d^2}{dt^2} (\omega^2 + \omega^2 \ln \gamma) \right]$$

$$+ \omega \dot{u} \left[a\omega\sqrt{\gamma} + \frac{a\omega\dot{\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} (a\omega\gamma) \right].$$

Ако заместим (101) и (102) в (100), окончателно намираме

$$(103)(\dot{\bar{w}}_Q \omega\, \bar{\varepsilon}) = \frac{d^2}{dt^2} [\omega^2(\bar{\varepsilon} I \bar{Q})] - au\omega^2\gamma^{3/2} - (\bar{\varepsilon} I \bar{Q}) \left[\frac{1}{4} \frac{\omega^2 \dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - a^2\omega^2\gamma^2 + \frac{d^2}{dt^2} (\omega^2 + \omega^2 \ln \gamma) \right]$$

$$+ \omega \dot{u} \left[a\omega\sqrt{\gamma} + \frac{a\omega\dot{\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} (a\omega\gamma) \right].$$

Релациите (95), (97) и (103) се явяват допълнение към (94).

Направените изследвания позволяват да заключим, че геометричните характеристики на роя от винтови оси при общо хеликоидално движение могат да добият пряко кинематично значение. Първоначално изразихме единичните вектори на централния триедър на Френе на роя посредством векторите ъглова скорост $\bar{\omega}$ и ускорение $\bar{\varepsilon}$ на хеликоидалното движение чрез (2), (6) и (7). Показахме, че ротацията a на хеликоидалния рой може да се изрази чрез компонентите на ротационната скорост $\bar{\omega}$ и нейните производни. Намерихме механично представяне на централната точка $\bar{Z}$ на винтовия рой посредством ортогоналната проекция на центъра на координатната система върху хеликоидалната ос и ускорението на същата точка, разглеждана като точка от твърдо тяло. Последният резултат наложи да разгледаме въпроса за разпределение на ускоренията на точките от винтовата ос в даден момент като точки от твърдата система. Това направихме за частния случай на движение на твърдо тяло с постоянна точка и в общия случай на произволно хеликоидално движение чрез зависимостите (29) и (33). Последната формула позволи да намерим ново кинематично представяне на централната точка на хеликоидалния рой чрез една точка, която е ортогоналната проекция на моментния център на ускоренията на точките от твърдото тяло върху винтовата ос. За контрол направихме и самостоятелен извод на новата формула за централната точка. Кинематичният израз (52) на централната точка ни послужи същевременно за извеждане релациите за разпределителния параметър и хлъзгането на хеликоидалния рой. Формулата (69) за разпределителния параметър намерихме и директно чрез геометричната дефиниция на този параметър. В някои специални хеликоидални движения се оказа възможно централната точка на роя да добие просто механично тълкуване като ортогонална проекция на моментния център на ускоренията върху винтовата ос (случая на постоянна моментна транслация и постоянна големина на моментната ротация и в някои по-общи случаи). При механичното тълкуване на скаларните инварианти на роя се получиха някои самостоятелни кинематични инвариантни зависимости, свързващи полето скорости, полето ускорения и полето втори ускорения на точките от твърдата подвижна система.

ЛИТЕРАТУРА

1. Darboux, G. Leçons sur la théorie générale des surfaces, I. Paris, 1887.
2. Garnier, R. Cours de Cinématique. I. Paris, 1954.
3. Диамандиев, В. Конгруенция w от хеликоидалните оси на клас прецесионни движения. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **60**, 1967, 9—15.
4. Гьонов, Ал. Върху диференциалната геометрия на реални роеве прави, чиито инварианти имат специални стойности или удовлетворяват дадени връзки. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **50**, кн. 1, 1957, 99—126.
5. Суслов, Г. К. Теоретическая механика. Москва, 1946.
6. Петканчин, Б. Диференциална геометрия, София, 1955.

Постъпила на 19. XII. 1968 г.

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФАМИЛИИ ПРЯМЫХ, ОБРАЗОВАННОЙ ВИНТОВЫМИ ОСЯМИ ОБЩЕГО ВИНТОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Васил Диамандиев

(Резюме)

В работе дается кинематический анализ характеристик однопараметрической фамилии прямых, образованной винтовыми осями при общем винтовом движении твердого тела. Скалярные инварианты однопараметрической фамилии прямых — ротация, распределительный параметр и скольжение — выражены с помощью кинематических инвариантов поля скоростей (и их производных) точек тела. Найдено инвариантное кинематическое выражение центральной точки винтовой однопараметрической фамилии прямых. В некоторых частных случаях получена простая кинематическая интерпретация той же точки. Наряду с этими результатами получены и некоторые кинематические зависимости, имеющие самостоятельное значение, как, например, распределение ускорений точек винтовой оси в связи с моментальным центром ускорений и т. п.

THE CINEMATIC MEANING OF THE INVARIANTS OF A SWARM FORMED BY THE HELICAL AXES AT A GENERAL HELICAL MOTION

Vassil Diamandiev

(Summary)

In this paper it is made a cinematic analysis of characteristics of a swarm, formed by the helical axes at a general helical motion of a solid. The Frene's central trihedron of the swarm is expressed through the vectors: the angular invariants of the swarm — the rotation, distributing parameter and slipping are expressed through cinematic invariants of the field of

velocities (and their derivatives) of the points of the solid. It is found an invariant cinematic expression for the central point of the helical swarm. In some particular cases, a simple cinematic interpretation for the same point is obtained. In the course of work some cinematic dependences, owning an independent significance, were obtained, such as distribution of the accelerations of the points from the helical axe, in connection with the momentary centre of the accelerations, etc.