БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. I

Б. Г. Габдулхаев

Теория и практика квадратурных и кубатурных формул для регулярных интегралов в настоящее время достаточно хорошо разработаны. В определенной степени разработана также теория квадратурных формул для одномерных сингулярных интегралов.

В то же время, насколько нам известно, нет ни одной работы, посвященной исследованию кубатурных формул для многомерных сингулярных интегралов (м. с. и.). Между тем ряд важных теоретических и практических задач (в частности, некоторые задачи конструктивной теории функций и теории аналитических функций) приводит именно к м. с. и. и интегральным уравнениям с такими интегралами [1—3]. Это делает актуальной разработку методов и приемов приближенного вычисления м. с. и. с соответствующим теоретическим обоснованием.

В этой работе для многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта и связанных с ними некоторых других сингулярных интегралов предлагается ряд кубатурных формул. Основное внимание уделяется исследованию сходимости предлагаемых формул и установлению эффективных оценок погрешностей.

§ 1. ВЫВОД КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Для краткости и простоты письма и формулировок ограничимся рассмотрением двумерных сингулярных интегралов.

В этой части работы будем рассматривать сингулярный интеграл вида

$$Ix = I(x;s,\varphi) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma,\theta)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\sigma\,d\theta, \tag{1.1}$$

где $x(s,\varphi)$ — плотность интеграла — комплекснозначная непрерывная (в обычном смысле или в смысле Гельдера) 2π-периодическая по обоим аргументам функция, причем интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу.

Пусть $\widetilde{x}(s,\varphi) = (P_{n,m}x)(s,\varphi) = P_{n,m}(x;s,\varphi)$ — тригонометрический полином порядка n по переменной s и порядка m по переменной φ, аппроксимирующий плотность $x(s, \varphi)$ в определенном смысле. За кубатурную формулу для интеграла (1.1) будем принимать выражение

$$I_{n,m}x = I_{n,m}(x\,;\,s,\varphi) = I\tilde{x} = IP_{n,m}x\,. \tag{1.2}$$

Принимая в качестве $\tilde{x} = P_{n,m}x$ различные сумматорные полиномы (например, интерполяционные полиномы, частные суммы рядов Фурье, аналоги сумм Фейера, Валле — Пуссена, Бернштейна — Рогозинского и др.), для (1.1) получим различные кубатурные формулы.

Наиболее простые и удобные кубатурные формулы получаются в случае, когда в качестве $\tilde{x} = P_{n,m}x$ рассматриваются тригонометрические интерполяционные полиномы по некоторой системе узлов $\{s_k, \varphi_j\} = \{s_k^{(n)}, \varphi_j^{(m)}\}$ при определенном способе задания операторов $P_{n,m}$. Таким путем удается, в частности, перенести на интеграл (1.1) некоторые из результатов наших работ [4—9], полученных при исследовании квадратурных формул для одномерных сингулярных интегралов, а также получить ряд новых результатов.

I группа формул

Пусть $\tilde{X}_{n,\infty}$ — семейство тригонометрических полиномов порядка n по переменной s при любом фиксированном φ, интерполирующих плотность $x(s, \varphi)$ в попарнонеэквивалентных корнях $\{s_k\} = \{s_k^{(n)}\}$ уравнения $\sin(ns+\omega) = 0$, где ω — произвольная постоянная.

Зафиксируем произвольно n и φ и найдем минимум функционала

$$f(\tilde{x}) = \|\tilde{x}\|^2_{L_2^s} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\tilde{x}(s,\varphi)|^2\,ds = \min\,(\tilde{x} \in \tilde{X}_{n,\infty}).$$

Нетрудно видеть, что минимум реализуется (ср. [8], [9]) для выражения

$$P_{n,\infty}x = P_{n,\infty}(x\,;\,s,\varphi) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(s_k, \varphi)\sin n(s-s_k)\operatorname{ctg}\frac{s-s_k}{2}. \tag{1.3}$$

Аналогичным образом приходим к оператору $P_{\infty,m}$, определяющему интерполяционный полином порядка m по переменной φ:

$$P_{\infty,m}\,x = P_{\infty,m}\,(x\,;\,s,\varphi) = \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} x(s,\varphi_j)\sin m(\varphi-\varphi_j)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_j}{2}, \tag{1.4}$$

где $\{\varphi_j\} - \{\varphi_j^{(m)}\}$ — попарно неэквивалентные корни уравнения $\sin(m\varphi+\delta) = 0$, δ — произвольная постоянная. Оператор $P_{n,m}$ определим так:

$$P_{n,m}x = P_{n,\infty}P_{\infty,m}\,x = P_{\infty,m}\,P_{n,\infty}x \tag{1.5}$$

$$= \frac{1}{4nm}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2m-1} x(s_k, \varphi_j)\sin n(s-s_k)\sin m(\varphi-\varphi_j)\operatorname{ctg}\frac{s-s_k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_j}{2}\,.$$

Заметим, что формула (1.5) точна для всех тригонометрических полиномов порядка ($n-1$, $m-1$) (т. е. порядка $n-1$ по переменной s и порядка $m-1$

по переменной φ). Это следует из формул (1.3)—(1.5) с учетом аналогичного утверждения для одномерного случая [8].

С помощью формул (1.2), (1.5) и соответствующих результатов работ [8], [9] находим для интеграла (1.1) следующую кубатурную формулу:

$$(1.6)\qquad I_{n,m}x=\frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2m-1}x_{k,j}\sin^2 n\frac{s_k-s}{2}\sin^2 m\frac{\varphi_j-\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_k-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_j-\varphi}{2},$$

где $x_{k,j}=x_{k,j}^{(n,m)}=x(s_k,\varphi_j)$. В узловых точках $\{s_p,\varphi_q\}=\{s_p^{(n)},\varphi_q^{(m)}\}$ эта формула принимает вид

$$(1.7)\qquad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{2n-1}{}'\sum_{j=0}^{2m-1}{}'x_{k,j}\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_p}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_j-\varphi_q}{2}\qquad\begin{pmatrix}p=\overline{0,2n-1}\\ q=\overline{0,2m-1}\end{pmatrix},$$

где штрихи у знаков суммы означают, что суммирование ведется только по тем k и j, для которых $k-p$ и $j-q$ нечетны.

Из результатов [8] следует, что последняя формула может быть представлена также в виде

$$(1.8)\qquad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{1}{4nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}a_{k,j}(p,q)\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi\operatorname{ctg}\frac{2j+1}{2m}\pi,$$

$$a_{k,j}(p,q)=x_{p+2k+1,\,q+2j+1}-x_{p+2k+1,\,q-2j-1}-x_{p-2k-1,\,q+2j+1}+$$
$$+x_{p-2k-1,\,q-2j-1},$$

$$(1.9)\qquad s_p=s_p^{(n)}=\frac{p\pi}{n}+\frac{\omega}{n},\qquad p=0,\pm1,\ldots;$$

$$\varphi_q=\varphi_q^{(m)}=\frac{q\pi}{m}+\frac{\delta}{m},\qquad q=0,\pm1,\ldots.$$

Отметим, что тригонометрическая степень точности кубатурных формул (1.6) — (1.8) равна $(n-1,\ m-1)$.

Заметим также, что в одномерном случае соответствующие (1.6) — (1.8) квадратурные формулы впервые получены и исследованы нами в [8], [9]*.

II группа формул

Пусть теперь $P_{n,m}x$ означает обычный тригонометрический интерполяционный полином порядка $(n,\ m)$ в узлах

$$(1.10)\qquad s_k=s_k^{(n)}=\frac{2k\pi}{2n+1},\quad k=\overline{0,2n};\qquad \varphi_j=\varphi_j^{(m)}=\frac{2j\pi}{2m+1},\quad j=\overline{0,2m}.$$

Известно, что $P_{n,m}x$ определяется единственным образом и имеет вид

---

* Следует отметить, что в [8], [9] допущены некоторые неточности: 1) при определении нормы одномерного оператора P_n в принятых там обозначениях должно быть $\|P_n\|_{C\to L}$ $\sqrt{2}$; 2) в формулировке теоремы 1 из [9], а именно, правыми частями формул (5) и (6) должны быть соответственно $2\sqrt{2}E_{n-1}(x)$ и $(A\ln n+B)E_{n-1}(x)$.

Справедливость этого замечания следует из результатов этой и следующих частей данной работы.

$$(1.11)\qquad P_{n,m}x=\frac{4}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2m}x_{k,j}D_n(s-s_k)D_m(\varphi-\varphi_j),$$

где $D_r(\alpha)$ — ядро Дирихле порядка r.

Рассуждая так же как и в работах [4—6] при исследовании квадратурных формул для одномерных интегралов, из (1.2) и (1.11) для интеграла (1.1) получаем формулы

$$I_{n,m}x=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2m}x_{k,j}\frac{\sin(n+1)\frac{s_k-s}{2}\sin n\frac{s_k-s}{2}\sin(m+1)\frac{\varphi_j-\varphi}{2}\sin m\frac{\varphi_j-\varphi}{2}}{\sin\frac{s_k-s}{2}\sin\frac{\varphi_j-\varphi}{2}},\tag{1.12}$$

$$(1.13)\qquad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2m}x_{k,j}\,a_{k-p}\,a_{j-q}\qquad\begin{pmatrix}p=\overline{0,2n}\\ q=\overline{0,2m}\end{pmatrix},$$

где $a_{k-p}=a_{k-p}^{(n)},\quad a_{j-q}=a_{j-q}^{(m)},\quad s_r=s_r^{(l)}=\varphi_r^{(l)}=\varphi_r=\frac{2r\pi}{2l+1}$,

$$(1.14)\qquad a_r^{(l)}=\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{s_r}{4}, & \text{если } r \text{ четно},\\ -\operatorname{ctg}\frac{s_r}{4}, & \text{если } r \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Очевидно, что тригонометрическая степень точности формул (1.12) — (1.13) равна (n, m).

Заметим, что в одномерном случае соответствующие (1.12) — (1.13) квадратурные формулы впервые были исследованы в связи с их приложениями к сингулярным интегральным уравнениям в наших работах [4—7].

Далее, если плотность $x(s,\varphi)$ обладает свойством четности или нечетности, то кубатурные формулы (1.6) — (1.8) и (1.12) — (1.13) значительно упрощаются. Однако в этом случае можно найти также новые, более эффективные кубатурные формулы.

III группа формул

Пусть $x(-s,\varphi)=x(s,-\varphi)=x(s,\varphi)$. Аппроксимируем плотность четным по каждой из переменных интерполяционным полиномом порядка $(n\;\;1, m-1)$ следующего вида:

$$(1.15)\qquad P_{n,m}x=\frac{\cos ns\cos m\varphi}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{k+j}x_{k,j}\sin s_k\sin\varphi_j}{(\cos s-\cos s_k)(\cos\varphi-\cos\varphi_j)},$$

$$(1.16)\qquad s_k=s_k^{(n)}=\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=\overline{1,n};\quad \varphi_j=\varphi_j^{(m)}=\frac{2j-1}{2m}\pi,\quad j=\overline{1,m}.$$

Тогда, используя формулы § 3 работы [6], для (1.1) находим соответствующую кубатурную формулу, которую запишем лишь в узловых точках:

$$(1.17)\qquad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{k,j}\cdot\left(\pm\operatorname{ctg}\frac{s_k\mp s_p}{2}\right)\cdot\left(\pm\operatorname{ctg}\frac{\varphi_j\mp\varphi_q}{2}\right),$$

где верхние знаки берутся при $k-p$ и $j-q$ нечетном, а нижние — в противном случае.

Легко видеть, что формула (1.17) точна для всех тригонометрических полиномов порядка не выше $(n-1, m-1)$, четных по каждой из переменных.

Пусть теперь $x(-s, \varphi)=x(s, -\varphi)=-x(s, \varphi)$. Аппроксимируем плотность нечетным по каждой из переменных тригонометрическим полиномом порядка (n, m) следующего вида:

$$(1.18)\qquad P_{n,m}x=\frac{\sin(n+1)s.\sin(m+1)\varphi}{(n+1)(m+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{k+j}x_{k,j}\sin s_k\sin\varphi_j}{(\cos s-\cos s_k)(\cos\varphi-\cos\varphi_j)},$$

$$(1.19)\qquad s_k=s_k^{(n)}=\frac{k\pi}{n+1},\quad k=\overline{1,n};\quad \varphi_j=\varphi_j^{(m)}=\frac{j\pi}{m+1},\quad j=\overline{1,m}.$$

Тогда аналогично предыдущему случаю находим

$$(1.20)\quad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{4}{(n+1)(m+1)}\sum_{k=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{m}{}'x_{k,j}\frac{\sin s_k\sin\varphi_j}{(\cos s_k-\cos s_p)(\cos\varphi_j-\cos\varphi_q)},$$

где штрихи у знаков сумм имеют тот же смысл, что и в (1.7).

Кубатурная формула (1.20) точна для всех тригонометрических полиномов порядка не выше (n, m), нечетных по каждой из переменных.

Если плотность $x(s, \varphi)$ является четной по какой-либо переменной и нечетной по другой, то кубатурные формулы для (1.1) можно найти, исходя из формул (1.15) — (1.20).

Действительно, пусть $x(s, -\varphi)=-x(-s, \varphi)=x(s, \varphi)$. Тогда, аппроксимируя плотность тригонометрическим интерполяционным полиномом порядка $(n, m-1)$, нечетным по переменной s и четным по переменной φ, по аналогии с (1.17) и (1.20) находим кубатурную формулу

$$(1.21)\qquad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{2}{(n+1)m}\sum_{k=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{m}\frac{x_{k,j}\sin s_k}{\cos s_p-\cos s_k}\left(\pm\operatorname{ctg}\frac{\varphi_j+\varphi_q}{2}\right),$$

$$(1.22)\qquad s_k=s_k^{(n)}=\frac{k\pi}{n+1},\quad k=\overline{1,n};\quad \varphi_j=\varphi_j^{(m)}=\frac{2j-1}{2m}\pi,\quad j=\overline{1,m};$$

если же $x(-s, \varphi)=-x(s, -\varphi)=x(s, \varphi)$, то аналогичным образом получаем кубатурную формулу

$$(1,23)\qquad I_{n,m}(x;s_p,\varphi_q)=\frac{2}{n(m+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}{}'\frac{x_{k,j}\sin\varphi_j}{\cos\varphi_q-\cos\varphi_j}\left(\pm\operatorname{ctg}\frac{s_k\mp s_p}{2}\right),$$

$$(1.24)\qquad s_k=s_k^{(n)}=\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=\overline{1,n};\quad \varphi_j=\varphi_j^{(m)}=\frac{j\pi}{m+1},\quad j=\overline{1,m}.$$

Кубатурные формулы (1.21) и (1.23) точны для всех тригонометрических полиномов порядка не выше $(n, m-1)$ и $(n-1, m)$ соответственно, нечетных (четных) по переменной s и четных (нечетных) по переменной φ.

IV группа формул

Формулы этой группы получаются из формул каждой из групп при сочетании их с соответствующими формулами остальных групп. Например, при сочетании формул групп I и II поступаем следующим образом. Пусть плотность $x(s, \varphi)$ аппроксимируется по s (по φ) полиномом вида (1.3) (вида (1.4)), а по φ (по s) — обычным интерполяционным полиномом по узлам $\{\varphi_j\}$ ($\{s_k\}$) из (1.10) (из (1.9)). Тогда выражение (1.2) доставляет соответствующую кубатурную формулу, тригонометрическая степень точности которой равна $(n-1, m)$ (соответственно $(n, m-1)$).

Аналогично поступаем и в случае формул других групп. В силу очевидности на этом подробнее останавливаться не будем.

Далее, в следующих параграфах этой работы будем заниматься исследованием рассмотренных выше кубатурных формул. При этом, следуя нашей работе [9], остаточный член кубатурных формул $R_{n,m}(x)$ будем рассматривать как линейный оператор из одного нормированного пространства X в другое пространство Y. Выбирая X и Y определенным образом, мы докажем сходимость в различных смыслах и соответственно этому установим различные эффективные оценки для погрешностей.

В этой части работы мы подробно остановимся на исследовании наиболее интересного, но в то же время более трудного в смысле доказательств, случая кубатурных формул I группы.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ

2.1. Аппроксимация в среднем многомерными интерполяционными полиномами

Пусть C и L_2 — пространства комплекснозначных 2π-периодических (по обоим аргументам) функций, соответственно непрерывных и квадратично суммируемых, с нормами

$$\|x\|_C = \max_{s,\varphi} |x(s, \varphi)| \qquad \|x\|_{L_2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(s, \varphi)|^2 ds\, d\varphi\right)^{1/2}$$

Оценим норму оператора $P_{n,m}$ из (1.5), как оператора из C в L_2.

Лемма 1. Справедлива формула

$$\|P_{n,m}\|_{C\to L_2} = 1, \quad n = 1, 2, \ldots; \; m = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Доказательство. Выражение (1.3) представим в виде

$$P_{n,\infty}x = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{r=1}^{n} a_r(\varphi) \cos rs + b_r(\varphi) \sin rs, \tag{2.2}$$

где

$$a_r(\varphi) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(s_k, \varphi) \cos rs_k, \qquad r = \overline{0, n-1},$$

$$b_r(\varphi)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}x(s_k,\varphi)\sin rs_k,\quad r=\overline{1,n-1},$$

(2.3)

$$a_n(\varphi)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}x(s_k,\varphi)\cos ns_k,\quad b_n(\varphi)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}x(s_k,\varphi)\sin ns_k.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для формулы (1.4).
Из (2.2) — (2.3) находим

$$(2.4)\quad \|P_{n,\infty}x\|^2_{L_2^s}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_{n,\infty}(x;s,\varphi)|^2\,ds=\frac{1}{2}\left\{\frac{|a_0(\varphi)|^2}{2}+\sum_{r=1}^{n}|a_r(\varphi)|^2+|b_r(\varphi)|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{y=0}^{2n-1}x(s_k,\varphi)\overline{x(s_y,\varphi)}\left[D_{n-1}(s_k-s_y)+\frac{1}{4}\cos n(s_k-s_y)\right].$$

Для ядра Дирихле $n-1$-порядка в узлах (1.9) имеем

$$(2.5)\quad D_{n-1}(s_k-s_y)=\begin{cases}\dfrac{2n-1}{2} & \text{при } k=y,\\[2mm] \dfrac{(-1)^{k-y+1}}{2} & \text{при } k\neq y.\end{cases}$$

Из (2.4) и (2.5) находим

$$(2.6)\quad \|P_{n,\infty}x\|^2_{L_2^s}=\frac{2n-1}{4n^2}\sum_{k=y=0}^{2n-1}(-1)^{k-y}x(s_k,\varphi)\overline{x(s_y,\varphi)}$$

$$+\frac{1}{4n^2}\sum_{\substack{k\neq y\\ k,\,y=0}}^{2n-1}(-1)^{k-y+1}x(s_k,\varphi)\overline{x(s_y,\varphi)}+\frac{1}{8n^2}\sum_{k,\,y=0}^{2n-1}(-1)^{k-y}x(s_k,\varphi)\overline{x(s_y,\varphi)}$$

$$=-\frac{1}{8n^2}\left|\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x(s_k,\varphi)\right|^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}|x(s_k,\varphi)|^2.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для $\|P_{\infty,m}x\|_{L_2^\varphi}$. Отсюда и из (2.6) получаем неравенства

$$(2.7)\quad \frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{2n-1}|x(s_k,\varphi)|^2\leqq\|P_{n,\infty}x\|^2_{L_2^s}\leqq\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}|x(s_k,\varphi)|^2,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$(2.8)\quad \frac{1}{4m}\sum_{j=0}^{2m-1}|x(s,\varphi_j)|^2\leqq\|P_{\infty,m}x\|^2_{L_2^\varphi}\leqq\frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1}|x(s,\varphi_j)|^2,\quad m=1,2,\ldots$$

С помощью формул (2.7) и (2.8) находим

$$(2.9)\qquad \|P_{n,m}x\|^2_{L_2}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_{n,m}(x;s,\varphi)|^2\,ds\,d\varphi\leq\frac{1}{4nm}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2m-1}|x(s_k,\varphi_j)|^2.$$

Из (2.9) следует оценка

$$(2.10)\qquad \|P_{n,m}x\|_{L_2}\leq\max_{k,j}|x(s_k,\varphi_j)|\leq\|x\|_C,\quad x\in C,$$

откуда уже легко получить формулу (2.1).

Следуя Бернштейну [10], введем следующие обозначения:

$E_{n,m}(x)=E_{n,m}(x;s,\varphi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $x\in C$ посредством тригонометрических полиномов порядка (n,m);

$E_{n,\infty}(x)=E_{n,\infty}(x;s,\varphi)=E_{n,\infty}(x;s,(\varphi))$ — наилучшее равномерное приближение $x(s,\varphi)$ тригонометрическими полиномами порядка n по переменной s, коэффициенты которых произвольные непрерывные функции относительно переменной φ;

$E_{\infty,m}(x)=E_{\infty,m}(x;s,\varphi)=E_{\infty,m}(x;(s),\varphi)$ — определяется аналогично;

$E^s_n(x)=E_n(x;s,(\varphi))$ — наилучшее равномерное приближение $x(s,\varphi)$ посредством тригонометрических полиномов порядка n по переменной s при любом фиксированном φ;

$E^\varphi_m(x)=E_m(x;(s),\varphi)$ — определяется аналогично.

Соответствующие введенным величинам полиномы наилучшего равномерного приближения будем обозначать через

$$Q_{n,m}=Q_{n,m}(x)=Q_{n,m}(s,\varphi),\quad Q_{n,\infty}=Q_{n,\infty}(x)=Q_{n,\infty}(s,\varphi),$$

$$Q_{\infty,m}=Q_{\infty,m}(x)=Q_{\infty,m}(s,\varphi),\quad Q^s_n=Q^s_n(x)=Q_n(s,(\varphi)),$$

$$Q^\varphi_m=Q^\varphi_m(x)=Q_m((s),\varphi).$$

Существенную роль в дальнейшем играет следующая

Лемма 2. Интерполяционный процесс (1.5) сходится в среднем для любой непрерывной функции, причем для любых $n=1,2,\ldots$ и $m=1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$(2.11)\qquad \|x-P_{n,m}x\|_{L_2}\leq 2E_{n-1,\,m-1}(x),\quad x\in C,$$

$$(2.12)\qquad \|x-P_{n,m}x\|_{L_2}<2\{E_{n-1,\,\infty}(x)+E_{\infty,\,m-1}(x)\},\quad x\in C.$$

Доказательство. Поскольку формула (1.5) точна для всех тригонометрических полиномов порядка $(n-1,\,m-1)$, то $P_{n,m}Q_{n-1,m-1}=Q_{n-1,m-1}$ и поэтому справедливо тождество

$$(2.13)\qquad (E-P_{n,m})x=(E-P_{n,m})(x-Q_{n-1,\,m-1}),$$

где E — единичный оператор. Отсюда и из леммы 1 следует оценка (2.11).

Для доказательства (2.12) рассмотрим тождество

$$(2.14)\qquad x-P_{n,m}x=x-P_{n,\infty}x+P_{n,\infty}(x-P_{\infty,m}x).$$

Благодаря неравенству (2.7) имеем

$$(2.15)\qquad \|x-P_{n,\infty}x\|^2_{L^s_2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(s,\varphi)-P_{n,\infty}(x;s,\varphi)|^2\,ds$$

$$=\| (E-P_{n,\infty})(x-Q^s_{n-1}) \|^2_{L^s_2} \leq \left\{ E^s_{n-1}(x)+\left[\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} | x(s_k, \varphi)-Q_{n-1}(s_k, (\varphi)) |^2 \right]^{1/2} \right\}^2$$

$$\leq 4E^2_{n-1}(x; s, (\varphi)) \leq 4E^2_{n-1,\infty}(x).$$

Из (2.15) интегрированием по φ получим

$$\| x-P_{n,\infty}x \|_{L_2} \leq 2E_{n-1,\infty}(x). \tag{2.16}$$

Далее, используя последовательно неравенства (2.7) и (2.8), с учетом введенных выше обозначений находим

$$\| P_{n,\infty}(x-P_{\infty,m}x) \|^2_{L_2} \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \| x(s_k, \varphi)-P_{\infty,m}(x; s_k, \varphi) \|^2_{L^\varphi_2}$$

$$=\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \| (E-P_{\infty,m}) [x(s_k, \varphi)-Q_{m-1}((s_k), \varphi)] \|^2_{L^\varphi_2}$$

$$\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \left\{ E_{m-1}(x; (s_k), \varphi)+\frac{1}{2m} \left[\sum_{j=0}^{2m-1} | x(s_k, \varphi_j)-Q_{m-1}((s_k), \varphi_j) |^2 \right]^{1/2} \right\}^2$$

$$\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} 4E^2_{m-1}(x; (s_k), \varphi) \leq 4E^2_{\infty, m-1}(x).$$

Следовательно, имеем неравенство

$$\| P_{n,\infty}(x-P_{\infty,m}x) \|_{L_2} \leq 2E_{\infty, m-1}(x). \tag{2.17}$$

Из формул (2.14), (2.16) и (2.17) следует оценка (2.12).

Сходимость интерполяционного процесса (1.5) следует из оценки (2.11) или (2.12) с учетом свойств соответствующих наилучших равномерных приближений (см., например, [10], [11]).

Следует отметить, что для практических целей оценка (2.12) значительно удобнее оценки (2.11).

2.2. О норме многомерного сингулярного интегрального оператора в пространстве L_2

В этом пункте под L_2 будем понимать множество комплекснозначных функций $x(s, \varphi)$, $0 \leq s, \varphi \leq 2\pi$, квадратично суммируемых по каждой из переменных равномерно относительно другой из переменных.

Справедлива следующая

Лемма 3. Сингулярный интеграл (1.1) определяет непрерывный оператор в L_2, причем

$$\| I \|_{L_2 \to L_2} = 1. \tag{2.18}$$

Доказательство. Любая функция разлагается в сходящийся в среднем тригонометрический ряд Фурье, который в комплексной форме записывается в виде

$$(2.19)\qquad x(s, \varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m}\, e^{i(ns+m\varphi)}, \quad x\in L_2,$$

где

$$c_{n,m}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s, \varphi)\, e^{-i(ns+m\varphi)}\, ds\, d\varphi.$$

Используя хорошо известные свойства одномерных сингулярных интегралов и следуя Михлину [1], можно доказать, что $Ix\in L_2$. Теперь с помощью (2.19) получаем

$$(2.20)\qquad I(x; s, \varphi)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty} i^2 c_{n,m}\, e^{i(ns+m\varphi)}.$$

Отсюда, используя равенство Парсеваля

$$\| x \|_{L_2}^2=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} | x(s, \varphi) |^2\, ds\, d\varphi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} | c_{n,m} |^2,$$

легко находим

$$(2.21)\qquad \| Ix \|_{L_2}=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} | I(x; s, \varphi) |^2\, ds\, d\varphi\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty} | c_{n,m} |^2\right\}^{1/2}\leq \| x \|_{L_2}.$$

Равенство в (2.21) достигается для функций, у которых коэффициенты Фурье $c_{n,0}=c_{0,n}=0$, $n=0, \pm 1, \ldots$ Отсюда следует (2.18).

Лемма доказана. Впрочем, в дальнейшем нам будет нужна лишь оценка (2.21), причем в случае плотностей из достаточно гладких функций.

2.3. Сходимость кубатурных формул в среднем

Обозначим через $R_{n,m}(x)=R_{n,m}(x; s, \varphi)=R_{n,m}(s, \varphi)$ — остаточный член предложенных в § 1 кубатурных формул.

Пусть $X=C$ и $Y=L_2$ с обычными нормами. Тогда из лемм 2 и 3 следует

Теорема 1. Кубатурный процесс (1.6) — (1.9) сходится в среднем для любой плотности $x(s, \varphi)\in C$ при $m\to\infty$, $n\to\infty$. При этом средняя погрешность может быть оценена неравенствами

$$(2.22)\qquad \| R_{n,m}(x) \|_{L_2}\leq 2E_{n-1,\, m-1}(x), \quad x\in C; \quad n=1, 2, \ldots; \ m=1, 2, \ldots,$$

$$(2.23)\qquad \| R_{n,m}(x) \|_{L_2}\leq 2\, \{E_{n-1,\, \infty}(x)+E_{\infty,\, m-1}(x)\}, \quad x\in C; \quad n=1, 2, \ldots; \ m=1, 2, \ldots$$

Введем ряд классов функций.

Пусть C_0 — множество функций $x(s, \varphi)$ из C, имеющих $r\geq 0$ частных производных по s и $l\geq 0$ частных производных по φ. Положим $C_0=C^{(r,l)}$, если

$$x_s^{(r)}=\frac{\partial^r x(s,\varphi)}{\partial s^r}\in C,\quad x_\varphi^{(l)}=\frac{\partial^l x(s,\varphi)}{\partial \varphi^l}\in C;$$

при этом будем писать

$$M(x_s^{(r)})=\max_{s,\varphi}|x_s^{(r)}(s,\varphi)|,\quad M(x_\varphi^{(l)})=\max_{s,\varphi}|x_\varphi^{(l)}(s,\varphi)|.$$

Далее, пусть $C_0\subset C^{(r,l)}$ и, кроме того, $x_s^{(r)}(s,\varphi)\in H_\alpha$ (удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha\leq 1$) по переменной s равномерно относительно φ и $x_\varphi^{(l)}(s,\varphi)\in H_\beta$ $(0<\beta\leq 1)$ по переменной φ равномерно относительно s. Этот класс функций обозначим через $H_{\alpha,\beta}^{(r,l)}$; при этом наименьшие постоянные условий Гельдера, вычисленные по соответствующим переменным (равномерно относительно других переменных), будем обозначать соответственно через $H_s(x_{s\,;\,\alpha}^{(r)})$ и $H_\varphi(x_{\varphi\,;\,\beta}^{(l)})$. Наконец, обозначим через $C_0=\mathcal{C}$ множество аналитических функций из C.

Для классов функций C_0 теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 2. Пусть плотность интеграла (1.1) удовлетворяет соответственно условиям

$$x(s,\varphi)\in H_{\alpha,\beta}^{(r,l)},\quad r\geq 0,\quad l\geq 0,\quad 0<\alpha,\quad \beta\leq 1,$$

$$x(s,\varphi)\in C^{(r,l)},\quad r\geq 0,\quad l\geq 0,\quad x(s,\varphi)\in\mathcal{C}.$$

Тогда равномерно относительно n и m справедливы соответствующие оценки

$$\|R_{n,m}(x;s,\varphi)\|_{L_2}\leq 6\left\{\frac{H_s(x_{s\,;\,\alpha}^{(r)})}{n^{r+\alpha}}+\frac{H_\varphi(x_{\varphi\,;\,\beta}^{(l)})}{m^{l+\beta}}\right\},\tag{2.24}$$

$$\|R_{n,m}(x;s,\varphi)\|_{L_2}\leq\pi\left\{\frac{M(x_s^{(r)})}{n^r}+\frac{M(x_\varphi^{(l)})}{m^l}\right\},\tag{2.25}$$

$$\|R_{n,m}(x;s,\varphi)\|_{L_2}=O(p_1^n+p_2^m),\quad 0<p_j=\text{const}<1.\tag{2.26}$$

Доказательство. Неравенства (2.24) и (2.25) получаем (ср. [7], [8]) из оценки (2.23) теоремы 1 с учетом известных верхних границ для наилучших равномерных приближений функций (см., например, [11]).

Для получения (2.26) воспользуемся оценкой (2.22) из теоремы 1. Пусть $x_1(s,\varphi)$ и $x_2(s,\varphi)$ вещественные и мнимые части функции $x(s,\varphi)$. Тогда $P_{n,m}x=P_{n,m}x_1+iP_{n,m}x_2$ и, в силу (2.22),

$$\|R_{n,m}(x)\|_{L_2}=\|R_{n,m}(x_1)+iR_{n,m}(x_2)\|_{L_2}\leq 2\{E_{n,m}(x_1)+E_{n,m}(x_2)\}.$$

Отсюда, используя порядки для наилучших равномерных приближений $E_{n,m}(f)$ вещественной аналитической функции $f(s,\varphi)$ посредством тригонометрических полиномов порядка (n,m) (см., например, [12]), приходим к оценке (2.26).

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ КАК СЛЕДСТВИЕ СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ

В условиях теоремы 2 удается оценить погрешность кубатурных формул по метрике пространства $Y=C$, а отсюда, как следствие, удается доказать и равномерную сходимость. Это можно сделать с помощью метода, предложенного нами в работе [7]. С этой целью докажем следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть дана оценка

$$\|R_{n,m}(x)\|_{L_2}\leq\frac{A}{n^r}+\frac{B}{m^l},\quad n=1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots \tag{3.1}$$

где A, B и r, l — положительные постоянные. Тогда при $r>1$ и $l>1$ равномерно относительно (s,φ) справедлива оценка

$$|R_{n,m}(x;s,\varphi)|\leq AC(r)\frac{\sqrt{m}}{n^{r-\frac{1}{2}}}+BC(l)\frac{\sqrt{n}}{m^{l-\frac{1}{2}}}, \tag{3.2}$$

$$r>1;\quad l>1,\quad n=1,2,\ldots;\quad m=1,2,\ldots,$$

где

$$C(\delta)=\frac{4(1+2^{-\delta})}{1-2^{1-\delta}},\quad \delta>1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $Ix=f$, $IP_{n,m}x=f_{n,m}$. Интерполяционный полином (1.5) представим в виде

$$P_{n,m}(x;s,\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}a_{k,j}\,e^{i(ks+j\varphi)}, \tag{3.4}$$

где коэффициенты $a_{k,j}$ однозначно определяются функцией $x(s,\varphi)$ с помощью соотношений (2.2) и (2.3) и аналогичных им соотношений для (1.4). Тогда аналогично (2.20) получим формулу

$$f_{n,m}(s,\varphi)=\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\sum_{\substack{j=-m\\j\neq 0}}^{m}i^2a_{k,j}\,e^{i(ks+j\varphi)}, \tag{3.5}$$

которая представляет собой комплексную форму кубатурной формулы (1.6).

Введем в рассмотрение полиномы

$$F_\mu=F_\mu(s,\varphi)=f_{2^\mu n,2^\mu m}(s,\varphi)-f_{2^{\mu-1}n,2^{\mu-1}m}(s,\varphi),\quad \mu=1,2,\ldots, \tag{3.6}$$

и остаточный член представим в виде сходящегося в среднем ряда

$$R_{n,m}(s,\varphi)=f(s,\varphi)-f_{n,m}(s,\varphi)=\sum_{\mu=1}^{\infty}F_\mu(s,\varphi). \tag{3.7}$$

Покажем, что ряд (3.7) сходится равномерно. С этой целью оценим $\|f_{n,m}\|_C$ через $\|f_{n,m}\|_{L_2}$. Из (3.5) последовательно находим

$$(3.8) \qquad \|f_{n,m}\|_C \leq \sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n} \sum_{\substack{j=-m\\j\neq 0}}^{m} |a_{k,j}| \leq 2\sqrt{nm} \left\{ \sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n} \sum_{\substack{j=-m\\j\neq 0}}^{m} |a_{k,j}|^2 \right\}^{1/2} = 2\sqrt{nm}\, \|f_{n,m}\|_{L_2}.$$

Замечая, что неравенство (3.8) верно также для всякого тригонометрического полинома вида (3.5), из (3.6) — (3.8) получаем

$$(3.9) \qquad |R_{n,m}(s,\varphi)| \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \|F_\mu\|_C \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} 2\sqrt{2^\mu n \cdot 2^\mu m}\, \|F_\mu\|_{L_2}$$

$$= 2\sqrt{nm} \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^\mu \|F_\mu\|_{L_2}.$$

В силу (3.1) и (3.6) имеем

$$(3.10) \qquad \|F_\mu\|_{L_2} \leq \left\| R_{2^\mu n, 2^\mu m} \right\|_{L_2} + \left\| R_{2^{\mu-1} n, 2^{\mu-1} m} \right\|_{L_2}$$

$$\leq \frac{A(1+2^r)}{n^r} \frac{1}{2^{\mu r}} + \frac{B(1+2^l)}{m^l} \frac{1}{2^{\mu l}}, \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

Из (3.9) и (3.10) следует равномерная сходимость ряда (3.7) и справедливость оценки (3.2) с постоянной (3.3).

Из теоремы 2 и леммы 4 следует

Теорема 3. Пусть плотность интеграла (1.1) удовлетворяет условиям соответственно:

$$(3.11) \qquad x(s,\varphi) \in H_{\alpha,\beta}^{(r,l)}, \quad r+\alpha > 1, \quad l+\beta > 1,$$

$$(3.12) \qquad x(s,\varphi) \in C^{(r,l)}, \quad r > 1, \quad l > 1.$$

Тогда для остаточного члена кубатурных формул (1.6) — (1.8) равномерно относительно (s, φ) и натуральных (n, m) справедливы оценки соответственно

$$(3.13) \qquad |R_{n,m}(x; s,\varphi)| \leq 24 \left\{ \frac{(1+2^{-r-\alpha}) H_s(x_{s;\alpha}^{(r)})}{1-2^{1-r-\alpha}} \frac{\sqrt{m}}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}} + \frac{(1+2^{-l-\beta}) H_\varphi(x_{\varphi;\beta}^{(l)})}{1-2^{1-l-\beta}} \frac{\sqrt{n}}{m^{l+\beta-\frac{1}{2}}} \right\},$$

$$(3.14) \qquad |R_{n,m}(x; s,\varphi)| \leq 4\pi \left\{ \frac{(1+2^{-r}) M(x_s^{(r)})}{1-2^{1-r}} \frac{\sqrt{m}}{n^{r-\frac{1}{2}}} + \frac{(1+2^{-l}) M(x_\varphi^{(l)})}{1-2^{1-l}} \frac{\sqrt{n}}{m^{l-\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Следствие. Пусть $m = n \to \infty$ и $x \in H_{\alpha,\beta}^{(r,l)}$. Если $r+\alpha > 1$ и $l+\beta > 1$, то кубатурные формулы (1.6) — (1.8) равномерно сходятся к соответствующим значениям интеграла (1.1) со скоростью

$$(3.15)\qquad |R_{n,n}(x;s,\varphi)|\leq 24\left\{\frac{(1+2^{-r-\alpha})H_s(x^{(r)}_{s;\alpha})}{(1-2^{1-r-\alpha})n^{r+\alpha-1}}+\frac{(1+2^{-l-\beta})H_\varphi(x^{(l)}_{\varphi;\beta})}{(1-2^{1-l-\beta})n^{l+\beta-1}}\right\}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и в случае $x\in C^{(r,l)}$. Однако в общем случае ($m\to\infty$, $n\to\infty$) равномерная сходимость для плотностей из $H^{(r,l)}_{\alpha,\beta}$ и $C^{(r,l)}$ зависит от порядка величин m и n; в то же время для $x\in \mathcal{C}^p$ такой зависимости не будет.

Точнее, справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $m\to\infty$, $n\to\infty$ и $m=O(n^\nu)$, где $\nu>0$ — некоторая постоянная. Пусть плотность интеграла (1.1) удовлетворяет условиям (3.11), $r+\alpha>\frac{\nu+1}{2}$, $l+\beta>\frac{\nu+1}{2\nu}$ и соответственно (3.12), $r>\frac{\nu+1}{2}$, $l>\frac{\nu+1}{2\nu}$. Тогда кубатурные формулы (1.6) — (1.8) равномерно сходятся к соответствующим значениям интеграла (1.1) со скоростью

$$(3.16)\qquad \|R_{n,m}(x)\|_C=O\left(n^{\frac{\nu+1}{2}-r-\alpha}+n^{\frac{\nu+1}{2\nu}-l-\beta}\right)$$

и соответственно

$$(3.17)\qquad \|R_{n,m}(x)\|_C=O\left(n^{\frac{\nu+1}{2}-r}+n^{\frac{\nu+1}{2\nu}-l}\right).$$

Если же $x(s,\varphi)\in\mathcal{C}^p$, то кубатурные формулы сходятся равномерно, причем

$$(3.18)\qquad \|R_{n,m}(x)\|_C=O(q_1^n+q_2^m),\quad 0<p_j<q_j=\text{const}<1.$$

Доказательство. Первая часть теоремы следует из соответствующих оценок теоремы 3, а вторая часть получается из оценки (2.26) благодаря соответствующему аналогу леммы 4.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение приведем ряда замечаний относительно результатов предыдущих параграфов.

1. Исследование сходимости и оценки погрешности кубатурных формул были проведены для плотностей из C, $C^{(r,l)}$ и $H^{(r,l)}_{\alpha,\beta}$, а также из $\mathcal{C}^p$ Однако теорема 1 и лемма 4 в сочетании с известными результатами конструктивной теории функций позволяют оценить погрешность и установить сходимость также для плотностей из других классов функций.

2. Выше исследовались лишь кубатурные формулы I группы. Однако все сказанное там справедливо (с учетом некоторых необходимых при этом изменений) и для кубатурных формул всех остальных групп.

3. Из приведенных в §§ 1—3 исследований ясно, что кубатурные формулы для $\mu\geq 3$-мерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта могут быть выведены и исследованы совершенно аналогичным образом; уточнения и добавления, которые при этом должны быть введены в вышеприведенные результаты, очевидным образом вытекают из способа получения этих результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва, 1962.
2. Жижиашвили, Л. В. Некоторые вопросы теории рядов и сопряженных к ним тригонометрических рядов. Тбилиси, 1965.
3. Какичев, В. А. Свойства многомерного интеграла Гильберта и некоторые их приложения. Ученые записки Москов. обл. пед. инст., **110**, 1962, 163—181.
4. Габдулхаев, Б. Г. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Доклады III Сибирской конференции по математике и механике. Томск, 1964, 92—94.
5. Габдулхаев, Б. Г. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Известия вузсв. Математика, № 5 (48), 1965, 43—51.
6. Габдулхаев, Б. Г. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и их некоторые применения. Функциональный анализ и теория функций, № 3, Казань, 1965 (1966), 7—17.
7. Габдулхаев, Б. Г. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов. Функциональный анализ и теория функций, № 4. Казань, 1967, 54—74.
8. Габдулхаев, Б. Г. Об одном общем квадратурном процессе для сингулярных интегралов. Функциональный анализ и теория функций, № 4. Казань, 1967, 75—90.
9. Габдулхаев, Б. Г. Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Доклады АН СССР, **179**, 1968, № 3, 515—517.
10. Бернштейн, С. Н. Собрание сочинений, т. II. Москва, 1954, 540—545.
11. Ахиезер, Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
12. Габисония, О. Д. Некоторые характеристики аналитических функций многих переменных. Труды Сухумского пединта, **18—19**, 1966, 341—348.

Поступила 12. II. 1969 г.

КУБАТУРНИ ФОРМУЛИ ЗА МНОГОМЕРНИ СИНГУЛЯРНИ ИНТЕГРАЛИ. I

Б. Г. Габдулхаев

(Резюме)

Разглеждат се кубатурни формули за сингулярни интеграли от вида (1.1).

Като се замести плътността $x(s, \varphi)$ в (1.1) с тригонометрични полиноми на променливите s, φ, които апроксимират $x(s, \varphi)$, се получават кубатурните формули (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.12), (1.17).

В теоремите 1, 2, 3, 4 се дават оценки ((2.22, (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18)) за остатъчните членове и техните квадратични и равномерни норми.

Изследва се сходимостта на интерполационните процеси.

CUBATURE FORMULAE FOR MULTIDIMENSIONAL SINGULAR INTEGRALS. I

B. G. Gabdulhaev

(Summary)

The paper treats cubature formulae for singular integrals of the type (1.1).
Substituting the density $x(s, \varphi)$ in (1.1) by trigonometric polynomials approximating $x(s, \varphi)$ the cubature formulae (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.12), (1.17) are obtained.
The theorems 1, 2, 3, 4 contain estimates ((2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) (3.17), (3.18)) for the remainders and their quadratic and uniform norms.
The convergence of the interpolating processes has been examined.