БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ОБОБЩЕНА МАТРИЦА НА ОТРАЖЕНИЕ

Милко Петков

Известно е, че матрицата на отражение се дефинира по следния начин. Нека μ е равнина в n-мерното евклидово пространство R_n, а w — единичен вектор-стълб, перпендикулярен на μ. Матрицата

$$U=E-2ww' \tag{1}$$

се нарича матрица на отражение. Тук E означава единичната матрица от ред n, а w' е транспонираната матрица-ред на матрицата-стълб w.

Ще припомним някои свойства на матрицата на отражение [1].

1. $U'=U$, т. е. U е симетрична.

2. $U'U=UU'=E$ и $U=U^{-1}$.

3. Нека z е произволен вектор от R_n. Тогава представянето $z=x+y$ е единствено при $x=aw$ $(a=\text{const})$, $(y, w)=0$ и $Uz=y-x$. В частните случаи $y=0$ или $x=0$ се получава съответно $Uz=Ux=-x$ и $Uz=Uy=y$.

4. Ако p и s са произволни вектори от R_n, за които $|p|=1$ и $s\pm|s|p|0$, съществува единичен вектор $w\in R_n$ такъв, че матрицата (1) преобразува s във вектор, колинеарен на p, т. е. $Us=ap$, където $a=\pm|s|$.

5. Матрицата (1) притежава една собствена стойност, равна на -1, и $n-1$ собствени стойности, равни на 1, и следователно $|u|=-1$.

Изброените свойства на матрицата на отражение се използват при метода на отражение за решаване на системи линейни алгебрични уравнения.

В настоящата работа ще въведем и изучим съответните свойства на матрицата от вида

$$U=E-2WW'; \tag{2}$$

където на мястото на вектора w в (1) тук стои матрица W от ред $n\times m$ $n\geqq m$, за която $W'W=E_m$ (E_m — единичната матрица от ред m).

Матрицата (2) ще наричаме обобщена матрица на отражение. За нея свойствата 1. и 2. са очевидни.

Третото свойство се модифицира така. За произволна матрица Z от ред $n\times m$ съществува единственото разлагане $Z=X+Y$ на сума от две матрици от ред $n\times m$, за които $X=WL$ (L—квадратна матрица от ред m) и $Y'W$ $W'Y=0_m$ (0_m— нулева квадратна матрица от ред m).

Нека $Z=WL+Y$. След умножаване отляво на W' намираме $L=W'Z$ или $X=WW'Z$, $Y=Z-WW'Z$. Очевидно за така намерените X и Y ще имаме $Z=X+Y$ Следователно разлагането е единствено и винаги съществуващо.

Да проверим как U, определено чрез (2), преобразува Z. Имаме

$$UZ=(E-2WW')(X+Y)=(E-2WW')(WL+Y)=WL$$
$$+Y-2WL=Y-WL=Y-X.$$

Преди да изкажем и установим верността на твърдението, съответно на 4., ще разгледаме въпроса за нормиране на матрица.

Нека W е произволна матрица от ред $n\times m$, $n\geq m$, за която $|W'W|\neq 0$. Търсим такава квадратна матрица L от ред m, че $(WL)'(WL)=E_m$. Оттук получаваме последователно

$$L'W'WL=E_m,$$
$$L'^{-1}L^{-1}=W'W,$$
$$(LL')^{-1}=W'W,$$
$$LL'=(W'W)^{-1}.$$

Поставената задача е изобщо неопределена. L може да се намери във вид на лява триъгълна матрица по метода на квадратния корен или при $L'=L$, $L=\sqrt{(W'W)^{-1}}$.

За $m>1$ матрицата (2) изобщо не удовлетворява 4. Наистина нека S и P са две матрици от ред $n\times m$, $n\geq m$, за които $|S'S|\neq 0$ и $P'P=E_m$. Да нормираме S. Търсим такава квадратна матрица L, че $(SL^{-1})'(SL^{-1})=E_m$. Получаваме $L'L=S'S$. След като определи L, намираме нормиращ множител Q на $S-PL'$, която предполагаме с ранг m. Така достигаме до $QQ'=[(S-PL)'(S-PL)]^{-1}$.

Полагаме $W=(S-PL)Q$ и си образуваме

$$U=E-2WW'. \tag{3}$$

В сила е следната

Теорема. Необходимото и достатъчно условие матрицата (3) да удовлетворява условието $US=PL$ е матрицата $M=S'PL$ да е симетрична.

Доказателство. Нека първо допустнем, че $US=PL$. Оттук следват равенствата

$$[E-2(S-PL)QQ'(S-PL)']S=PL,$$
$$S-2(S-PL)QQ'(S-PL)'S=PL,$$
$$S-PL-2(S-PL)QQ'(S-PL)'S=0,$$
$$(S-PL)(E_m-2QQ'(S-PL)'S)=0,$$
$$E_m-2QQ'(S-PL)'S=0,$$
$$(QQ')^{-1}=2(S-PL)'S.$$

От друга страна,

$$(QQ')^{-1}=(S-PL)'(S-PL).$$

Следователно

$$(S-PL)'(S-PL)=2(S-PL)'S,$$
$$(S-PL)'(S+PL)=0,$$
$$(S'-L'P')(S+PL)=0,$$
$$S'S+S'PL-L'P'S-L'L=0,$$
$$S'PL=L'P'S,$$
$$S'PL=(S'PL)'.$$

Достатъчността се доказва по обратния път.

Този резултат ни дава право да твърдим, че методът на отражение за решаване на линейни алгебрични системи няма клетъчно обобщение.

За да пресметнем детерминантата на матрицата $U=E-2WW'$ от (2), ще разсъждаваме индуктивно. Нека $m=1$, т. е. $W=(a_1, \ldots, a_n)'$ и $|W|=1$. Тогава имаме

$$|U|=\begin{vmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1a_2 \ldots & 2a_1a_n \\ & & \cdot \\ -2a_na_1 & -2a_na_2 \ldots & 1-2a_n^2 \end{vmatrix}.$$

Над горната детерминанта извършваме следните последователни преобразования (при предположението, че всички a_i са различни от нула):

а) умножаваме i-тия ред и разделяме i-тия стълб на a_i, $i=1, 2, \ldots, n$;

б) прибавяме към първия ред всички останали и вземеме пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n} a_2^1 = |W|^2 = 1;$$

в) от i-тия стълб изваждаме първия и пишем за i-ти стълб, $i=2, \ldots, n$. Така получаваме равенствата

$$|U|=\begin{vmatrix} -1 & 0 \ldots 0 \\ -2a_2^2 & 1 \ldots 0 \\ -2a_n^2 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix}=-1.$$

За $m>1$ имаме

$$|U|=|E-2WW'|=\left|\prod_{i=1}^{m}(E-2\gamma_i\gamma_i')\right|=\prod_{i=1}^{m}|(E-2\gamma_i\gamma_i')|=(-1)^m,$$

където γ_i означава i-тия вектор-стълб на W.

Ако W е произволна матрица от ред $n\times m$, за която $|W'W|\neq 0$, то лесно се съобразява и равенството $|E-2W(W'W)^{-1}W'|=(-1)^m$.

Разсъжденията за намиране на всички собствени стойности на разглежданата матрица (2) са аналогични на тези за случая $m=1$ [1]. Тъй като матрицата WW' е нормална, то квадратът на сферичната ѝ норма е равен на сумата от квадратите на всичките ѝ собствени стойности, т. е.

$N^2(WW')=\sum_{1}^{n}\lambda_i^2$. Същевременно

$$N^2(WW')=S_p[(WW')'(WW')]=S_p(WW')=m^*.$$

Очевидно е и равенството $(WW')W=1\,.\,W$. От това и по-горните равенства за $N^2(WW')$ стигаме до извода, че W има m-кратна собствена стойност, равна на 1, и $(n-m)$-кратна, равна на 0. Що се отнася до (2), тя ще има собствени стойности $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=-1$ и $\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_n=1$, а за детерминантата й отново се получава $(-1)^m$.

Матриците на отражение са частен случай на матрици от вида $E-WVW'$ (W е матрица от ред $n\times m$, $n>m$, и V е квадратна матрица от ред m). За такива матрици са валидни равенствата

$$|E-WVW'|=|E_m-V|,\quad U^{-1}=E-W(V-E_m)^{-1}VW',$$

при второто от които се предполага, че $V-E_m$ е неособена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин, В. В. Численные методы алгебры. (Теория и алгорифмы). Москва, 1966.
2. Фадеев, Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, 1963.

Постъпила на 15. II. 1969 г.

ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ОТРАЖЕНИЯ

Милко Петков

(Резюме)

Пусть E_n — единичная матрица порядка n, а W — матрица порядка $n\ m$, $n\ m$, для которой $W'W=E_m$. В работе рассматривается матрица вида $U=E_n-2WW'$, которая является обобщением матрицы отражения. Для введенной таким образом матрицы изучаются некоторые свойства, являющиеся модификацией свойств матрицы отражения.

A GENERALIZED REFLECTION MATRIX

Milko Petkov

(Summary)

Let E_n be a unitary matrix of order n and W be a matrix of order $n\ m$, $n\cdot m$, for which $W'W-E_m$. The author considers a matrix of the type $U=E_n-2WW'$ which is a generalization of the reflection matrix. Some properties of the matrix thus introduced are examined. They are modifications of the properties of the reflection matrix.

* Ако $A(a_{ij})$ е матрица от ред n, то $S_pA=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$.