БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ    ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

# ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ НА ЕДНА КВАЗИЛИНЕЙНА АВТОНОМНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ПРИ КРИТИЧЕН СЛУЧАЙ

**Георги Брадистилов и Георги Бояджиев**

Дадена е системата диференциални уравнения

$$\ddot{x}_i+\omega_i^2 x_i=\varepsilon f_i(x,\dot{x},\varepsilon),\quad i=1,\ldots,m,$$

$$(1)\qquad \ddot{x}_j+2a_j\dot{x}_j+\omega_j^2 x_j=\varepsilon f_j(x,\dot{x}\,\varepsilon),\quad j=m+1,\ldots,n,$$

$$\dot{x}_k+b_k x_k=\varepsilon f_k(x,\dot{x},\varepsilon),\quad k=n+1,\ldots,N,$$

където $x=(x_1,\ldots,x_N)$ е вектор. Векторът $f=(f_1\ldots,f_N)$ е аналитична функция на $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и на малкия положителен параметър $\varepsilon$ в област $G$ на пространството $(x,\dot{x},\varepsilon)$, в което се съдържа $(x^0,\dot{x}^0,0)$. Тук $x^0(t)$ е решение на пораждащата система, която се получава от (1) при $\varepsilon=0$. Освен това имаме $a_j\neq 0$, $a_k\neq 0$, $\omega_j^2-a_j^2>0$.

Разглеждаме критичния случай на кратни честоти

$$(2)\qquad \omega_r=k_r\omega_1,\quad r=2,\ldots,p;\quad p<m;\quad k_r \text{ — цели числа},$$

и доказваме съществуването на периодични решения на (1) с период $T=\frac{2\pi}{\omega_1}+o(\varepsilon)$, които съответстват на $\omega_1$.

Системата (1) при критичен случай, т. е. когато (2) не е в сила, е разгледана от Чезари [1]. В частност системата (1) без второто и третото уравнение при критичен случай $\omega_2=k\omega_1$ е изучена в [2].

Разглеждаме частния интеграл на пораждащата система

$$x_r^0(t)=N_r\cos\omega_r t+M_r\sin\omega_r t,\quad \dot{x}_i^0(t)=-\omega_r N_r\sin\omega_r t+\omega_r M_r\cos\omega_r t,$$

$$(3)\qquad x_s^0(t)=0,\quad \dot{x}_q^0(t)=0,$$

$$r=1,\ldots,p;\quad s=p+1,\ldots,N;\quad q=p+1,\ldots,n;\quad M_1=0,$$

с период $T_0=2\pi/\omega_1$ и начални стойности

$$x_r^0(0)=N_r,\quad \dot{x}_r^0(0)=\omega_r M_r,\quad r=1,\ldots,p;$$

$$x_s^0(0)=0,\quad \dot{x}_q^0(0)=0,\quad s=p+1,\ldots,N;\ q=p+1,\ldots,n.$$

Както ще покажем, константите $N_r$, $r=1,\dots,p$; $M_r$, $r=2,\dots,p$, могат да се определят така, че системата (1) да има периодично решение, което при $\varepsilon=0$ се обръща в (3).

Съгласно Поанкаре интегралът на (1) с видоизменени начални условия

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &x_r(0)=N_r+\alpha_r(\varepsilon), \quad \dot{x}_r(0)=\omega_r M_r+\beta_r(\varepsilon), \quad r=1,\dots,p;\ \beta_1=0;\\ &x_s(0)=\alpha_s(\varepsilon), \quad \dot{x}_q(0)=\beta_q(\varepsilon), \quad s=p+1,\dots,N;\ q=p+1,\dots,n, \end{aligned}$$

за достатъчно малки стойности на $\varepsilon$, $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, $\beta_2,\dots,\beta_n$ може да се представи с редове от вида

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} x_\nu(t)&=x_\nu^0(t)+\sum_{\mu=1}^{N}P_{\nu\mu}(t)\alpha_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}Q_{\nu\mu}(t)\beta_\mu\\ &+\varepsilon\left\{F_\nu(t)+\sum_{\mu=1}^{N}G_{\nu\mu}(t)\alpha_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}H_{\nu\mu}(t)\beta_\mu+\cdots\right\}, \quad \nu=1,\dots,N. \end{aligned}$$

Тук $P_{\nu\mu}(t)$, $Q_{\nu\mu}(t)$, $F_\nu(t)$, $G_{\nu\mu}(t)$, $H_{\nu\mu}(t)$ и т. н. са непознати функции на $t$, които въз основа на (5) добиват следните начални стойности:

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} &P_{\nu\nu}(0)=1,\ \nu=1,\dots,N;\ \dot{P}_{\nu\nu}(0)=Q_{\nu\nu}(0)=0,\ \dot{Q}_{\nu\nu}(0)=1, \quad \nu=1,\dots,n;\\ &P_{\nu\mu}(0)=\dot{P}_{\nu\mu}(0)=Q_{\nu\mu}(0)=\dot{Q}_{\nu\mu}(0)=0, \quad \nu\neq\mu,\\ &F_\nu(0)=\dot{F}_\nu(0)=G_{\nu\mu}(0)=\dot{G}_{\nu\mu}(0)=H_{\nu\mu}(0)=\dot{H}_{\nu\mu}(0)=0. \end{aligned}$$

Тогава лесно намираме, че

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} &P_{ii}(t)=\cos\omega_i t,\ Q_{ii}(t)=\frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i t, \quad i=1,\dots,m,\\ &P_{jj}(t)=e^{-a_j t}\left(\cos\eta_j t+\frac{a_j}{\eta_j}\sin\eta_j t\right), \quad \eta_j=\sqrt{\omega_j^2-a_j^2},\\ &Q_{jj}(t)=e^{-a_j t}\frac{1}{\eta_j}\sin\eta_j t, \quad j=m+1,\dots,n,\\ &P_{kk}(t)=e^{-b_k t},\ k=n+1,\dots,N;\ P_{\nu\mu}(t)=Q_{\nu\mu}(t)=0, \quad \nu\neq\mu, \end{aligned}$$

след което интегралът (6) добива вида

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} x_i(t)&=x_i^0(t)+\cos\omega_i t\,.\,\alpha_i+\frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i t\,.\,\beta_i\\ &+\varepsilon\left\{F_i(t)+\sum_{\mu=1}^{N}G_{i\mu}(t)\alpha_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}H_{i\mu}(t)\beta_\mu+\cdots\right\}, \quad i=1,\dots,m,\\ x_j(t)&=e^{-a_j t}\left(\cos\eta_j t+\frac{a_j}{\eta_j}\sin\eta_j t\right)\alpha_j+\frac{1}{\eta_j}e^{-a_j t}\sin\eta_j t\,.\,\beta_j\\ &+\varepsilon\left\{F_j(t)+\sum_{\mu=1}^{N}G_{j\mu}(t)\alpha_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}H_{j\mu}(t)\beta_\mu+\cdots\right\}, \quad j=m+1,\dots,n, \end{aligned}$$

$$x_k(t)=e^{-b_k t}a_k+\varepsilon\left\{F_k(t)+\sum_{\mu=1}^{N}G_{k\mu}(t)\,a_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}H_{k\mu}(t)\,\beta_\mu+\cdots\right\},$$
$$k=n+1,\ldots,N.$$

Заместваме интегралите (9) в системата (1) и сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на $\varepsilon$, $\varepsilon a_\mu$, $\varepsilon\beta_\mu$. Така получаваме за непознатите функции $F_\nu(t)$, $G_{\nu\mu}(t)$, $H_{\nu\mu}(t)$ линейни системи диференциални уравнения, които решаваме при началните условия (7). Следват изразите само на тези функции, които по-нататък ще бъдат необходими:

$$F_i(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t f_i[x^0(u),\ \dot{x}^0(u),\ 0]\sin\omega_i(t-u)\,du,\quad i=1,\ldots,m, \tag{10}$$

$$G_{ir}(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_r^0}\frac{\partial x_r^0}{\partial N_r}+\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_r^0}\frac{\partial \dot{x}_r^0}{\partial N_r}\right)\sin\omega_i(t-u)\,du,\quad r=1,\ldots,p, \tag{11}$$

$$H_{ir}(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_r^0}\frac{\partial x_r^0}{\partial M_r}+\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_r^0}\frac{\partial \dot{x}_r^0}{\partial M_r}\right)\frac{1}{\omega_r}\sin\omega_i(t-u)\,du,\quad r=2,\ldots,p. \tag{12}$$

Тук сме взели пред вид, че съгласно (3) и (8) съществуват зависимостите

$$\frac{\partial x_r^0}{\partial N_r}=P_{rr},\quad \frac{\partial x_r^0}{\partial M_r}\frac{1}{\omega_r}=Q_{rr},\quad r=2,\ldots,p.$$

Тогава от (10), (11) и (12) имаме

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_r}=G_{ir},\quad r=1,\ldots,p;\qquad \frac{\partial F_i}{\partial M_r}\frac{1}{\omega_r}=H_{ir},\quad r=2,\ldots,p. \tag{13}$$

Интегралът (9) е периодична функция с видоизменен период $T=(2\pi+2\delta)/\omega_1$ на периода $2\pi/\omega_1$ на (3) за достатъчно малки стойности на $\varepsilon$, $a_\nu$, $\nu=1,\ldots,N$, $\beta_\nu$, $\nu=2,\ldots,n$, ако

$$(14)\quad \begin{aligned}&[x_\nu]=x_\nu\left(\frac{2\pi+2\delta}{\omega_1}\right)-x_\nu(0)=0,\quad \nu=1,\ldots,N,\\ &[\dot{x}_\nu]=\dot{x}_\nu\left(\frac{2\pi+2\delta}{\omega_1}\right)-\dot{x}_\nu(0)=0,\quad \nu=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Като използваме (9), системата (14) приема вида

$$-2N_1\delta^2+\varepsilon[F_1]+\varepsilon\left\{\sum_{\mu=1}^{N}[G_{1\mu}]a_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}[H_{1\mu}]\beta_\mu+\cdots\right\}+\cdots=0;$$

$$2k_rM_r\delta+\frac{2k_r}{\omega_r}\delta\beta_r+\varepsilon[F_r]+\varepsilon\left\{\sum_{\mu=1}^{N}[G_{r\mu}]a_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}[H_{r\mu}]\beta_\mu+\cdots\right\}+\cdots=0,\quad r=2,\ldots,p;$$

$$(\cos\Omega_s-1)\,a_s+\frac{1}{\omega_s}\sin\Omega_s\,.\,\beta_s+\varepsilon[F_s]+\varepsilon\{\cdots\}+\cdots=0,\quad s=p+1,\ldots,m,$$

$$(15)\quad \begin{aligned}&\left[e^{-a_jT_0}\left(\cos\xi_j+\frac{a_j}{\eta_j}\sin\xi_j\right)-1\right]a_j+\frac{1}{\eta_j}e^{-a_jT_0}\sin\xi_j\,.\,\beta_j+\varepsilon[F_j]\\ &\qquad+\varepsilon\{\cdots\}+\cdots=0,\quad j=m+1,\ldots,n;\end{aligned}$$

$$(e^{-b_k T_0}-1)a_k+\varepsilon[F_k]+\varepsilon\{\cdots\}+\cdots=0, \quad k=n+1,\dots,N;$$

$$-2k_r\omega_r N_r\delta-2k_r\omega_r\delta a_r+\varepsilon[\dot F_r]+\varepsilon\left\{\sum_{\mu=1}^{N}[\dot G_{r\mu}]\,a_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}[\dot H_{r\mu}]\,\beta_\mu+\cdots\right\}+\cdots=0,$$
$$r=1,\dots,p;$$

$$-\omega_s \sin\Omega_s \,.\, a_s+(\cos\Omega_s-1)\,\beta_s+\varepsilon[\dot F_s]+\varepsilon\{\cdots\}+\cdots=0, \quad s=p+1,\dots,m;$$

$$-\frac{\omega_j^2}{\eta_j^2}\,e^{-a_jT_0}\sin\xi_j\,.\,a_j+\left[e^{-a_jT_0}\left(\cos\xi_j-\frac{a_j}{\eta_j}\sin\xi_j\right)-1\right]\beta_j+\varepsilon[\dot F_j]$$
$$+\varepsilon\{\cdots\}+\cdots=0, \quad j=m+1,\dots,n,$$

където $\Omega_s=2\pi\omega_s/\omega_1$, $\xi_j=2\pi\eta_j/\omega_1$.

От тази система временно изоставяме първите $p$ уравнения и от $N+2$-рото уравнение до $N+p$-тото включително. От останалите уравнения можем да определим $\delta$, $a_s$, $s=p+1,\dots,N$, $\beta_s$, $s=p+1,\dots,n$, като функции на $\varepsilon$, $a_r$, $r=1,\dots,p$, $\beta_r=0$, $r=2,\dots,p$, които се анулират при $\varepsilon=0$, $a_r=0$, $r=1, p$, $\beta_r=0$, $r=2,\dots,p$, тъй като функционалната им детерминанта е различна от нула. Така намерените стойности на $\delta, a_s$, $s=p+1,\dots,N$, $\beta_s$, $s=p+1,\dots,n$ заместваме в изоставените уравнения от системата (15), а именно от първото до $p$-тото включително и от $N+2$-рото до $N+p$-тото включително, съкращаваме на $\varepsilon$ и получаваме системата

$$\Psi_1\equiv F_1(T_0)+\sum_{h=1}^{p}G_{1h}(T_0)\,a_h+\sum_{h=2}^{p}H_{1h}(T_0)\,\beta_h+\cdots=0;$$

$$\Psi_r\equiv\frac{k_rM_r}{\omega_1N_1}\dot F_1(T_0)+F_r(T_0)+\sum_{h=1}^{p}\left\{\frac{k_rM_r}{\omega_1N_1}\left[\dot G_{1h}(T_0)-\lambda_k\frac{\dot F_1(T_0)}{N_1}\right]+G_{rk}(T_0)\right\}a_h$$

$$+\sum_{h=2}^{p}\left\{\frac{k_rM_r}{\omega_1N_1}\dot H_{1h}(T_0)+H_{rh}(T_0)+\lambda_{rh}\frac{k_r\dot F_1(T_0)}{\omega_r\omega_1N_1}\right\}\beta_h+\cdots+=0, \quad r=2,\dots,p$$

(16) $$\Phi_r\equiv-\frac{k_r\omega_rN_r}{\omega_1N_1}\dot F_1(T_0)+\dot F_r(T_0)+\sum_{h=1}^{p}\left\{-\frac{k_r\omega_rN_r}{\omega_1N_1}\left[\dot G_{1h}(T_0)-\lambda_k\frac{\dot F(T_0)}{N_1}\right]\right.$$

$$\left.+\dot G_{rh}(T_0)-\lambda_{rh}\frac{k_r\omega_r}{\omega_1N_1}\dot F_1(T_0)\right\}a_h+\sum_{h=2}^{p}\left\{-\frac{k_r\omega_rN_r}{\omega_1N_1}\dot H_{1h}(T_0)+\dot H_{rh}(T_0)\right\}\beta_h$$
$$+\cdots=0, \quad r=2,\dots,p;$$

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=\cdots=\lambda_p=0, \quad \lambda_{rh}=\begin{cases}1, & r=h,\\ 0, & r\neq h.\end{cases}$$

За да има тази система решение за $a_r$ $(r=1,\dots,p)$, $\beta_r$ $(r=2,\dots,p)$, които при $\varepsilon\to0$ се обръщат в нула, необходимо е да са изпълнени условията

$$\Psi_1^0\equiv F_1(T_0)=0,$$

(17) $$\Psi_r^0\equiv\frac{k_rM_r}{\omega_1N_1}\dot F_1(T_0)+F_r(T_0)=0,$$

$$\Phi_r^0\equiv-\frac{k_r\omega_rN_r}{\omega_2N_1}\dot F_1(T_0)+\dot F_r(T_0)=0, \quad r=2,\dots,p.$$

Достатъчно условие, за да определим $\alpha_r$ $(r=1,\ldots,p)$, $\beta_r$ $(r=2,\ldots,p)$ от (16), е функционалната детерминанта на левите страни относно $\alpha_r$ и $\beta_r$ при $\alpha_r=\beta_r=0$ да бъде различна от нула, т. е.

$$(18)\quad \Delta=\frac{D(\Psi_1,\ldots,\Psi_p,\Phi_2,\ldots,\Phi_p)}{D(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_2,\ldots,\beta_p)}=\frac{1}{\omega_2\ldots\omega_p}\frac{D\left(\Psi_1^0,\ldots,\Psi_p^0,\Phi_2^0,\ldots,\Phi_p^0\right)}{D(N_1,\ldots,N_p,M_2,\ldots,M_p)}\neq 0.$$

Условията (17) представляват система от $2p-1$ уравнения с неизвестни $N_r$ $(r=1,\ldots,p)$, $M_r$ $(r=2,\ldots,p)$. Ако намерените реални решения на (7) изпълняват неравенството (18), на всяко решение на (17) съответствува периодично решение на (1) от вида (9) с приблизителен период $T_0=2\pi/\omega_1$, което при $\varepsilon=0$ се обръща в решението (3) на пораждащата система.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Cesari, L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin, 1959.
2. Брадистилов, Г. и Г. Бояджиев. Периодични решения и устойчивост на една квазилинейна автономна система диференциални уравнение при кратни корени на фундаменталното уравнение. Год. на ВТУЗ, 3, Математика, кн. 1, 1967, 5—19


*Постъпила на 8. V. 1969 г.*

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Георги Брадистилов и Георги Бояджиев

*(Резюме)*


В работе рассматривается система дифференциальных уравнений (1), где $\varepsilon$ является малым положительным параметром, $x=(x_1,\ldots,x_N)$ — вектором, а $f_\nu(x,\dot{x},\varepsilon)$, $\nu=1,\ldots,N$, аналитичными функциями $x$, $\dot{x}$, $\varepsilon$; при том $a_j\neq 0$, $b_k\neq 0$, $\omega_j^2-a_j^2>0$.

К системе (1) приводится ряд задач из техники и физики.

При известных условиях доказывается существование периодических решений системы (1) с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}+o(\varepsilon)$ при критическом случае кратных частот $\omega_r=k_r\omega_1$, $r=2,\ldots,p$, $p\leq m$, $k_r$ — целые числа.

# PERIODIC SOLUTIONS OF A WEAKLY NONLINEAR AUTONOMIC SYSTEM DIFERENTIAL EQUATIONS BY CRITICAL CASE

Georgi Bradistilov and Georgi Boyadžiev

*(Summary)*

In this paper it is considered the system of differential equations (1), where $x=(x_1, \ldots, x_N)$ is a vector; $f_\nu(x, \dot{x}, \varepsilon)$, $\nu=1, \ldots, N$, are analitic functions of $x$, $\dot{x}$ and of the small positive parameter $\varepsilon$; $a_j \neq 0$, $b_k \neq 0$, $\omega_j^2 - a_j^2 > 0$.

Many problems from physics and technics reduce to the system (1).

There are found the conditions about the existence of periodical solutions (1) with period $\frac{2\pi}{\omega_1} + o(\varepsilon)$ in the critical case of the multiple-frequences $\omega_r = k_r \omega_1$, $r=2, \ldots, p$, $p \leq m$, $k_r$ — integral number.