БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д. Манжерон и А. Ф. Шестопал

В связи со своей докторской диссертацией академик Л. Чакалов указывает на некоторые общие свойства дифференциальных уравнений [5]

Авторы, имея в виду некоторые новые общие направления в области дифференциальных уравнений с частными производными, развившиеся в последние годы, исходя из нового класса граничных задач для уравнений неэллиптического типа, прототипом которых служит система

$$(*)\qquad \begin{gathered} [A(x)u'+\lambda B(x)u]'+\lambda[B(x)u'+C(x)u]=0, \\ x=(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ u|_{FrR}=0, \\ R=\{x_i^*\leq x_i\leq x_i^{**}\},\quad i=1, 2, \ldots, m, \end{gathered}$$

где символом $'$ обозначена полная производная в смысле М. Пиконе [20]

$$(**)\qquad u'\equiv Du\equiv\frac{\partial^m u}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_m}.$$

впервые поставленных и частично решенных первым из авторов [2]—[4] и заинтересовавших затем многих других ученых [5]—[8], исследовали или же углубили различные задачи, связанные с функциями Грина для дифференциальных операторов различного типа. Так например, в связи с решением класса граничных задач, относящихся к так называемым приводимым дифференциальным уравнениям с частными производными [9], были введены функции Грина высших порядков, были использованы функции Грина в рамках нового приближенного метода решения граничных задач, названного методом интегральных уравнений [10], в то время как второй из авторов исследовал метод отражений и его применение к задачам математической физики и нашел разложение функций Грина в области прямоугольника по системе фундаментальных решений эллиптических операторов [11]—[12]. Эта последняя задача с некоторыми ее применениями и обобщениями была исследована авторами в случае, если эффект границы не зависит от сопряженной точки [13]. Однако для многих граничных задач независимость эффекта от сопряженной точки не имеет места и в этих случаях вышеупомянутые разложения не применимы. Типичным примером является задача Дирихле для бигармонического уравнения, в которой задаются на границе значения функции и ее нормальной производной.

В первой части настоящей статьи авторы обобщают найденные ими разложения и на такие случаи. К сожалению, такое обобщение удалось провести лишь в случае прямоугольной области. Кроме того, здесь будут рассмотрены не только эллиптические дифференциальные операторы.

В остальной части статьи мы рассмотрим вопрос об определении собственных функций эллиптического оператора на случай треугольной основной области.

Чтобы не нарушить целостности изложения, мы повторим основные определения, на которых основаны разложения функций Грина по фундаментальным решениям.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве линейный дифференциальный оператор L в частных производных эллиптического типа $2r$-го порядка с аналитическими коэффициентами. У такого дифференциального оператора существует фундаментальное решение, которое мы обозначим через $\Gamma(P, Q)$, где $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — текущая точка, а $Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — точка, где помещен источник.

Пусть функция $u(P, Q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L[u]=\delta(P-Q) \tag{1.1}$$

и сверх того подчинена некоторым краевым условиям на гиперплоскости $H_{n-1}(\vec{x}, \vec{k})=C$. В (1.1) $\delta(P-Q)$ обозначает сингулярную функцию Дирака.

Предположим, что операторы L_m граничных условий

$$L_m[u(P, Q)]\,|_{H_{n-1}}=0, \quad m=1, 2, \dots, r, \tag{1.2}$$

линейные, однородные, порядок каждого из них меньше $2r$, и система граничных операторов накрывает [2], [3] оператор L.

Определение 1. Граничные условия (1.2) на H_{n-1} допускают отражение, если для любой точки Q

$$u(P, Q)=\Gamma(P, Q)+A\Gamma(P, Q^*), \tag{1.3}$$

где A есть некоторый линейный оператор, перестановочный с операторами L, L_m, а Q^* — точка, сопряженная точке Q относительно H_{n-1}.

Мы будем предполагать, что оператор A зависит от P и Q^*. Оператор A называется эффектом граничных условий.

Пусть H^1_{n-1} и H^2_{n-1} — гиперплоскости в пространстве E_n, на которых должны удовлетворяться граничные условия

$$\begin{aligned} &L^1_m[u(P, Q)]\,\big|_{H^1_{n-1}}=0, \\ &L^2_m[u(P, Q)]\,\big|_{H^2_{n-1}}=0, \quad m=1, 2, \dots, r. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Предположим, что граничные условия на H^1_{n-1} допускают отражение с эффектом A_1, а на H^2_{n-1} — с эффектом A_2.

Определение 2. Граничные условия на гиперплоскостях H^1_{n-1} и H^2_{n-2} называются несвязными, если операторы A_1 и A_2 перестановочны, оператор A_1 перестановочный с системой граничных операторов L^2_m, а оператор A_2 перестановочный с системой граничных операторов L^1_m.

2. Смешанная задача. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \tag{1.5}$$

порядка m по переменному t. Предположим, что дифференциальный оператор B таков, что двумерная задача Коши

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \omega_n \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1.6}$$

корректно поставлена. Тогда для уравнения (1.5) существует [16] фундаментальное решение задачи Коши, т. е. существует функция $E(P, Q, t)$, которая удовлетворяет уравнению (1.5) и начальным условиям:

$$E|_{t=0}=0; \quad \left.\frac{\partial^\nu E}{\partial t^\nu}\right|_{t=0}=\begin{cases}0, \text{ если } \nu=1, 2, \ldots, m-2,\\ \delta(P-Q), \text{ если } \nu=m-1.\end{cases} \tag{1.7}$$

Совершенно аналогичные определения вводятся теперь для этого случая.

3. Граничная задача для неэллиптических дифференциальных операторов.

Если под фундаментальным решением оператора C понимать функцию $G(P, Q)$ такую, что для любой достаточно регулярной финитной функции $f(P)$ имеет место формула

$$C\left[\int\limits_{E_n} G(P, Q)f(Q)\,dQ\right]=f(P), \tag{1.8}$$

оно может существовать не только для эллиптического дифференциального оператора, и формулы разложения будут применимы и для этого случая.

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ В ОБЛАСТИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Пусть граничная задача для эллиптического дифференциального оператора

$$L[F(P, Q)]=\delta(P-Q), \tag{2.1}$$

$$C^i_m[F(P, Q)]|_{x_i=0}=0, \quad D^i_m[F(P, Q)]|_{x_i=a_i}=0, \tag{2.2}$$

$$i=1, 2, \ldots, n; \quad m=1, 2, \ldots, r$$

в области прямоугольника $\Pi\{0\le x_1\le a_1, \ldots, 0\le x_n\le a_n\}$ разрешима единственным образом, а граничные условия на гиперплоскостях $x_j=0, a_j$ допускают отражение с эффектами A_j и B_j соответственно. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Если граничные условия на всех гиперплоскостях несвязны и ряд

$$F(P, Q)-\Gamma(P, Q)=\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_n=-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} A^j_{s_j} B^j_{s_j} \Gamma(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}) \tag{2.3}$$

сходится равномерно в области Π вместе со своими производными до $2r$-го порядка включительно, то $F(P, Q)$, определяемая равенством (2.3), есть функция Грина для прямоугольника Π. В (2.3) $A^j_{s_j}$ и $B^j_{s_j}$ операторы, которые определяются через эффекты граничных условий по формуле

$$A^j_{s_j}=\prod_{k=1}^{a_{s_j}} A_j\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}, 1-2k-\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j} \operatorname{sign} s_j], s_{j+1}, \ldots, s_n}\right), \tag{2.4}$$

$$B^j_{s_j}=\prod_{k=1}^{b_{s_j}} B_j\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}, 2k-\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j} \operatorname{sign} s_j], s_{j+1}, \ldots, s_n}\right),$$

причем

$$a_{s_j}=\frac{1}{2}\left\{|s_j|-\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j}] \operatorname{sign} s_j\right\},$$

$$b_{s_j}=\frac{1}{2}\left\{|s_j|+\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j}] \operatorname{sign} s_j\right\}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{sign} s_j=\frac{|s_j|}{s_j}, \quad \operatorname{sign} 0=1,$$

$Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ есть система сопряженных точек с координатами

$$\xi^*_j=s_j a_j+\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j}] \xi_j. \tag{2.6}$$

Доказательство. По условиям теоремы функция $F(P, Q)$ удовлетворяет уравнению и имеет в точке $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ требуемую характеристическую особенность. Других особенностей в области Π нет, так как все сопряженные точки лежат вне области Π, если s_j одновременно не исчезают. Таким образом, необходимо лишь доказать, что $F(P, Q)$ удовлетворяет граничным условиям. Прежде всего непосредственной проверкой устанавливаются зависимости

$$a_{-s_j}=b_{s_j}, \quad a_{s_j+1}=b_{s_j}, \quad b_{s_j+1}=a_{s_j}+1. \tag{2.7}$$

Докажем теперь, что подобные зависимости имеют место для операторов $A^j_{s_j}$ и $B^j_{s_j}$. В самом деле, при $s_i \geq 0$

$$B^i_{-s_i-1}=\prod_{k=1}^{b_{-s_i-1}} B_i\left(P, Q_{s_1, \ldots, s_{i-1}, 2k-\frac{1}{2}[1-(-1)^{-s_i-1} \operatorname{sign}(-s_i-1)], s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{b_{s_i}} B_i\left(P, Q_{s_1, \ldots, s_{i-1}, 2k-\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_i} \operatorname{sign} s_i], s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)=B^i_{s_i};$$

$$(2.8)\quad A_{-s_i-1}=\prod_{k=1}^{a_{-s_i-1}} A_i\left(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},\ 1-2k-\frac{1}{2}[1-(-1)^{-s_i-1}\operatorname{sign}(-s_i-1)],\ s_{i+1},\ldots,s_n}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{as_i+1} A_i\left(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},\ 1-2k-\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_i}\operatorname{sign} s_i],\ s_{i+1},\ldots,s_n}\right)$$

$$=A^i_{s_i}A_i\left(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i-1,s_{i+1},\ldots,s_n}\right);\ B^i_{-1}=A^i_0=I.$$

Аналогично устанавливаются еще зависимости

$$B^i_{s_i+1}=B^i_{-s_i}B_i(P, Q_{s_1,\ \ \ ,s_{i-1},\ \ 1,s_{i+1},\ldots,s_n}),\ s_i\geq 1;$$

$$(2.9)\qquad A^i_{s_i+1}=A^i_{-s_i},\ s_i\geq 1;$$

$$B^i_1=B_i(P, Q_{s_1,s_2,\ldots,1,\ldots,s_n});\ A^i_1=I,$$

где I — тождественный оператор.

Исходя из формул (2.8) и (2.9), представим $F(P, Q)$ следующим образом:

$$F(P, Q)=\sum_{s_m\neq s_i}^{\infty}\prod_{j\neq i=1}^{n}A^j_{s_j}B^i_{s_j}\sum_{s_i=0}^{\infty}B^i_{s_i}A^i_{s_i}[\Gamma(P, Q_{s_1,s_2,\ \ ,s_n})$$

$$(2.10)\quad +A_i(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i-1,s_{i+1},\ldots\ ,s_n})\Gamma(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i-1,s_{i\ \ 1},\ldots,s_n})];$$

$$F(P, Q)=\sum_{s_m\neq s_i}^{\infty}\prod_{j\neq i=1}^{n}A^j_{s_j}B^j_{s_j}\sum_{s_i=0}^{\infty}A^i_{-s_i}B^i_{-s_i}[\Gamma(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i,s_{i+1},\ldots,s_n});$$

$$+B_i(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},\ \ 1,s_{i+1},\ldots,s_n})\Gamma(P, Q_{s_1,\ldots,s_i+1,s_{i+1},\ldots,s_n}).$$

Поскольку точкам $Q_{s_1,\ldots,s_n}$ относительно гиперплоскости $x_i=0$ сопряжены точки $Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i-1,s_{i+1},\ldots,s_n}$, а точкам $Q_{s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},-s_i,s_{i+1},\ldots}$ относительно $x_i=a_i$ сопряжены точки $Q_{s_1,s_2,\ldots\ \ _1,s_i+1,s_{i+1},\ldots,s_n}$, то

$$(2.11)\quad C^i_m[\Gamma(P, Q_{s_1,s_2\ \ ,s_n})+A_i\Gamma(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i-1,s_{i\ \ 1},\ldots,s_n})]|_{x_i=0}=0,$$

$$D^i_m[\Gamma(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},-s_i,\ \ \ 1,\ldots,s_n})$$

$$+B_i\Gamma(P, Q_{s_1,\ldots,s_{i-1},s_i+1,s_{i+1},\ldots,s_n})]\ _{=a_i}=0.$$

Теперь наше утверждение вытекает из условий несвязности.

§ 3. РАЗЛОЖЕНИЕ В ДРУГИХ ОБЛАСТЯХ

Метод отражений приводит к однократному покрытию евклидовой плоскости лишь в случае прямоугольника, равнокатетного треугольника, правильного треугольника и треугольника, получающегося делением правильного пополам. В предыдущей нашей работе мы рассмотрели разложение функции Грина по фундаментальным решениям в случае равнокатетного треугольника [17], [16], [15]. Здесь будут построены такие разложения для правильного треугольника и треугольника, который получается делением правильного пополам. В качестве приложения мы рассматриваем колебания пластинок вышеупомянутой формы.

1. Разложение в случае правильного треугольника

Если основной областью служит правильный треугольник, то функцию Грина можно разложить по фундаментальным решениям в случае, когда эффекты не зависят от сопряженной точки и совпадают на всех сторонах.

Теорема 1. Если граничные условия на прямых $x_2=0$, $x_2=x_1\sqrt{3}$, $x_2+x_1\sqrt{3}=a\sqrt{3}$ допускают отражение с одним и тем же эффектом $A(P,Q)$ и если ряд

$$F(P,Q)=\sum_{s_1,s_2=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{5}A^{a^i_{s_1s_2}}\Gamma(P,Q^i_{s_1s_2}) \tag{3.1}$$

сходится равномерно вместе со своими производными до $2r$-го порядка включительно в основной области везде, за исключением точки Q, то $F(P,Q)$ есть функция Грина эллиптического оператора L. В (3.1)

$$a^i_{s_1s_2}=1-\frac{1}{2}\,[1+(-1)^i]\operatorname{sign}(s_1-s_2)(s_2+2s_1)(2s_2+s_1^{-1}),$$

$$Q^i_{s_1s_2}=\left\{\frac{3a}{2}(s_1+s_2)+\xi_i,\ \frac{a\sqrt{3}}{2}(s_2-s_1)+\eta_i\right\},\quad Q(\xi,\eta), \tag{3.2}$$

$$\xi_5=\xi_0=\xi,\ \xi_1=\xi_4=\frac{\eta\sqrt{3}-\xi}{2},\ \xi_2=\xi_3=-\frac{\xi+\eta\sqrt{3}}{2},$$

$$\eta_0=-\eta_5=\eta,\ \eta_1=-\eta_4=\frac{\xi\sqrt{3}+\eta}{2},\ \eta_2=-\eta_3=\frac{\xi\sqrt{3}-\eta}{2}.$$

Доказательство. Очевидно, $F(P,Q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Покажем, что $F(P,Q)$ удовлетворяет граничным условиям. Мы проведем доказательство лишь для прямой $x_2=0$. Для оставшихся прямых доказательство проходит совершенно аналогично, если повернуть систему координат на углы $\pi/3$ и $2\pi/3$ соответственно.

Прежде всего представим функцию $F(P,Q)$ в следующем виде:

$$F(P,Q)\quad\sum_{s_1,s_2=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{5}A^{a^i_{s_1s_2}}\Gamma(P,Q^i_{s_1s_2})+A^{a^i_{s_2s_1}}\Gamma(P,Q^i_{s_2s_1}) \tag{3.3}$$
$$+\sum_{s_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{2}A^{a^i_{s_1s_1}}\Gamma(P,Q^i_{s_1s_1}),$$

где суммирование в первой сумме распространяется на такие индексы, для которых $(s_1,s_2)\neq(s_2,s_1)$. Если последнюю сумму в (3.3) переписать в виде

$$(3.4)\qquad \sum_{s_1=-\infty} [\Gamma(P, Q^0_{s_1s_1})+A\Gamma(P, Q^5_{s_1s_1})]+[A\Gamma(P, Q^1_{s_1s_1})+\Gamma(P, Q^4_{s_1s_1})]$$
$$+[\Gamma(P, Q^2_{s_1s_1})+A\Gamma(P, Q^3_{s_1s_1})]$$

и заметить, что точкам $Q^i_{s_1s_1}$ сопряжены точки $Q^{5-i}_{s_1s_1}$, то отсюда сразу же следует, что последняя сумма удовлетворяет граничным условиям на прямой $x_2=0$.

Первую сумму в (3.3) представим так:

$$(3.5)\qquad \sum_{s_1,\, s_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1s_2}}\, \Gamma(P,\ Q^i_{s_1s_2})+A^{a^{5-i}_{s_2s_1}}\, \Gamma(P, Q^{5-i}_{s_2s_1}).$$

Учитывая, что точкам $Q^i_{s_1s_2}$ относительно прямой $x_2=0$ сопряжены точки $Q^{5-i}_{s_2s_1}$, и равенство

$$|\, a^i_{s_1s_2}-a^{5-i}_{s_2s_1}\,|=1,$$

приходим к выводу, что и выражение (3.5) удовлетворяет граничным условиям. Этим теорема доказана.

Для практических приложений формуле (3.1) удобно придать вид

$$(3.6)\qquad F(P, Q)=\frac{1}{3} \sum_{s_1,\, s_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1s_2}} [\Gamma(P, Q^i_{s_1s_2})+\Gamma(P, R^i_{s_1s_2})$$
$$+\Gamma(P', S^i_{s_1s_2})+\Gamma(P', U^i_{s_1s_2})+\Gamma(P'', V^i_{s_1s_2})+\Gamma(P'', Z^i_{s_1s_2})],$$

где P, $Q^i_{s_1s_2}$, $R^i_{s_1s_2}$, P', $S^i_{s_1s_2}$ $U^i_{s_1s_2}$, P'', $V^i_{s_1s_2}$, $Z^i_{s_1s_2}$ — точки со следующими координатами:

$$P(x_1, x_2),\ P'\left(\frac{x_2\sqrt{3}-x_1}{2}, -\frac{x_1\sqrt{3}+x_2}{2}\right),\ P''\left(-\frac{x_1+x_2\sqrt{3}}{2}, \frac{x_1\sqrt{3}-x_2}{2}\right),$$

$$Q^i_{s_1s_2}(3as_1+\xi_i,\ a\sqrt{3}\,s_2+\eta_i),\ R^i_{s_1s_2}\left(3as_1+\frac{3a}{2}+\xi_i,\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\eta_i\right),$$

$$S^i_{s_1s_2}\left(3as_1+\frac{\eta_i\sqrt{3}-\xi_i}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right),$$

$$U^i_{s_1s_2}\left(3as_1+\frac{3a}{2}+\frac{\eta_i\sqrt{3}-\xi_i}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right),$$

$$V^i_{s_1s_2}\left(3as_1-\frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2+\frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right),$$

$$Z^i_{s_1s_2}\left(3as_1+\frac{3a}{2}-\frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2},\ a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right).$$

2. Собственные колебания треугольной пластинки

В качестве примера приложений формулы (3.6) мы рассмотрим колебания треугольной пластинки. Задача состоит в определении собственных чисел и собственных функций дифференциального уравнения

$$\nabla^2\nabla^2 w-\lambda^2 w=0, \tag{3.7}$$

если на границе правильного треугольника исчезает сама функция, и ее вторая производная по нормали. Мы построим сначала функцию Грина оператора (3.7), которая будет аналитической функцией параметра λ^2 везде, за исключением дискретного числа точек действительной оси. Эти точки и дают нам собственные значения, а собственные функции соответствующим образом определятся через вычеты в этих точках.

Предположим, что края пластинки шарнирно оперты. Легко показать, что эффект таких условий равен $-I$ (I — тождественный оператор), а фундаментальное решение имеет вид

$$\Gamma(P,\,Q)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{E_2}\frac{e^{i\omega_1(\xi-x_1)+i\omega_2(\eta-x_2)}}{\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2-\lambda^2}\,d\omega_1 d\omega_2. \tag{3.8}$$

Тогда формула (3.6) дает для функции Грина следующее выражение:

$$\begin{aligned}
F(P,\,Q,\lambda^2)=\frac{1}{12\pi^2}&\sum_{s_1s_2=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\iint\limits_{E_2}\Big[\exp\{i\omega_1(3as_1+\xi_j-x_1)\\
&+i\omega_2(a\sqrt{3}\,s_2+\eta_j-x_2)\}+\exp\Big\{i\omega_1\Big(3as_1+\frac{3a}{2}+\xi_j-x_1\Big)+i\omega_2\Big(a\sqrt{3}\,s_2\\
&-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\eta_j-x_2\Big)\Big\}+\exp\Big\{i\omega_1\Big(3as_1+\frac{\eta_j\sqrt{3}-\xi_j}{2}-\frac{x_2\sqrt{3}-x_1}{2}\Big)+i\omega_2\Big(a\sqrt{3}\,s_2\\
&-\frac{\xi_j\sqrt{3}+\eta_j}{2}+\frac{x_1\sqrt{3}+x_2}{2}\Big)\Big\}+\exp\Big\{i\omega_2\Big(3as_1+\frac{3a}{2}+\frac{\eta_j\sqrt{3}-\xi_j}{2}-\frac{x_2\sqrt{3}}{2}\Big)\\
&+i\omega_2\Big(a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{\xi_j\sqrt{3}+\eta_j}{2}+\frac{x_1\sqrt{3}+x_2}{2}\Big)\Big\}+\exp\Big\{i\omega_1\Big(3as_1-\frac{\xi_j+\eta_j\sqrt{3}}{2}\\
&+\frac{x_1+x_2\sqrt{3}}{2}\Big)+i\omega_2\Big(a\sqrt{3}s_2+\frac{\xi_j\sqrt{3}\quad\eta_j}{2}-\frac{x_1\sqrt{3}-x_2}{2}\Big)\Big\}\\
&+\exp\Big\{i\omega_1\Big(3as_1+\frac{3a}{2}-\frac{\xi_j+\eta_j\sqrt{3}}{2}+\frac{x_1+x_2\sqrt{3}}{2}\Big)+i\omega_2\Big(\sqrt{3}\,as_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}\\
&+\frac{\xi_j\sqrt{3}+\eta_j}{2}-\frac{x_1\sqrt{3}-x_2}{2}\Big)\Big\}\Big]\frac{d\omega_1 d\omega_2}{\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2-\lambda^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Непосредственно устанавливается, что все условия для применения формулы суммирования Пуассона [5] справедливы для выражения (3.8). Применяя эту формулу к (3.8) и делая элементарные, но довольно громоздкие выкладки, получим

$$(3.10)\qquad F(P, Q, \lambda^2)=\frac{4}{9\sqrt{3}a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+\cos k\pi}{\frac{16k^4\pi^4}{9a^4}-\lambda^2}\psi_k^0(x_1, x_2)\psi_k^0(\xi, \eta)$$

$$+\frac{8}{9\sqrt{3}a^2}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n-k)\pi}{\left(\frac{4n^2\pi^2}{9a^2}+\frac{4k^2\pi^2}{3a^2}\right)^2-\lambda^2}\left[\psi_{kn}^c(x_1, x_2)\psi_{kn}^c(\xi, \eta)+\psi_{kn}^s(x_1,x_2)\psi_{kn}^s(\xi, \eta)\right],$$

где

$$\psi_k^0(x_1, x_2)=\sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2-\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_2+x_1\sqrt{3})+\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2);$$

$$\psi_{kn}^c(x_1, x_2)=\cos\frac{2n\pi}{3a}x_1\sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2-\cos\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3}-x_1)\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}+x_2)$$

$$(3.11)\qquad +\cos\frac{n\pi}{3a}(x_1+x_2\sqrt{3})\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2);$$

$$\psi_{kn}^s(x_1, x_2)=\sin\frac{2n\pi}{3a}x_1\sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2-\sin\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3}-x_1)\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}+x_2)$$

$$\sin\frac{n\pi}{3a}(x_1+x_2\sqrt{3})\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2).$$

Функции $(1+\cos k\pi)\psi_k^0(x_1, x_2)$, $[1+\cos(n-k)\pi]\psi_k^c(x_1, x_2)$, $[1+\cos(n-k)\pi]\psi_k^s(x_1, x_2)$ удовлетворяют требуемым граничным условиям. Собственному значению

$$(3.12)\qquad \lambda_k^2=\frac{16k^4\pi^4}{9a^4}$$

соответствует функция $(1+\cos k\pi)\psi_k^0(x_1, x_2)$, а собственному значению

$$(3.13)\qquad \lambda_{kn}^2=\left(\frac{4n^2\pi^2}{9a^2}+\frac{4k^2\pi^2}{3a^2}\right)^2$$

отвечают собственные функции двух видов:

$$[1+\cos(n-k)\pi]\psi_{kn}^0(x_1, x_2) \text{ и } [1+\cos(n-k)\pi]\psi_{kn}^s(x_1, x_2).$$

3. Разложение в области треугольника, получающегося делением правильного пополам

Предположим, что основной областью служит треугольник, ограниченный прямыми $x_2=0$, $x_2=x_1\sqrt{3}$ и $x_1=a/2$. Пусть граничные условия на прямых $x_2=0$ и $x_2=x_1\sqrt{3}$ допускают отражение с эффектом A, а граничные условия на прямой $x_1=a/2$ допускают отражение с эффектом C. Предполагается, что эффекты не зависят от сопряженной точки и коммутируют; выполняются все требования теоремы 1. При этих условиях имеет место следующая

Теорема 2. Функция Грина $G(P, Q)$ для треугольника, получающегося делением правильного пополам, имеет вид

$$(3.14)\qquad G(P, Q)=F(P, Q)+CF(P, Q^*),$$

где $F(P, Q)$ определяется формулой (3.1), а Q^* — точка, имеющая координаты $Q^*\{a-\xi, \eta\}$.

Доказательство этого утверждения элементарное и мы его не будем приводить.

4. Колебание пластинки в виде треугольника, получающегося делением правильного пополам

Изучим свободные колебания пластинки вышеупомянутой формы, шарнирно опертой по всем краям. Соответствующая функция Грина оператора $\nabla^2\nabla^2-\lambda^2$ определится по формуле

$$G(P, Q, \lambda^2)=F(P, Q, \lambda^2)-F(P, Q^*, \lambda^2). \tag{3.15}$$

Из этой формулы ясно, что всякий полюс функции $G(P, Q, \lambda^2)$ будет полюсом функции $F(P, Q, \lambda^2)$, но обратное утверждение не имеет места.

Иными словами, собственные частоты колебаний пластинки названной формы следует искать среди собственных частот колебаний пластинки в виде правильного треугольника. Более детальное исследование показывает, что собственные числа нашего уравнения будут

$$\nu_{kn}^2=\left(\frac{4n^2\pi^2}{9a^2}+\frac{4k^2\pi^2}{3a^2}\right)^2 \tag{3.16}$$

Им отвечают собственные функции двух видов

$$\begin{gathered}[1+\cos(n-k)\pi][\psi_{kn}^c(x_1, x_2)-\psi_{kn}^c(a-x_1, x_2)],\\ [1+\cos(n-k)\pi][\psi_{kn}^s(x_1, x_2)-\psi_{kn}^s(a-x_1, x_2)].\end{gathered} \tag{3.17}$$

Замечание. В следующей нашей работе мы рассмотрим те области, которые метод отражений приводит к неоднократному покрытию, в то время как в [17], после введения понятий функции Грина для полосы, трансформанты Фурье функции Грина для полосы и др., могущих быть построенными в случае любого числа измерений пространства, изучаются соответствующие рассмотренным здесь задачам математической физики задачи, относящиеся к гармоническому оператору и ему родственным, или же операторам $\nabla^2+\lambda$ и $\nabla^2\nabla^2$, причем в связи с фактом, что фундаментальное решение уравнения, относящееся к оператору $\nabla^2+\lambda$, есть функция Бесселя второго рода, используется работа Н. Обрешкова [18], светлой памяти которого посвящена работа [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Tschakaloff, L. Propriétés générales des équations différentielles. Atti della Accademia Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 6, 2, 1926, 4.
2. Mangeron, D. Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière. International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications. Stokholm, 1962, 95.
3. Mangeron, D. Tecnica di programmazione dinamica concernante una nuova classe di problemi al contorno. VII Cogresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana, Sunto delle Communicazioni, Genova, 30 settembre — 5 Ottobre 1963.
4. Mangeron, D. Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptique d'ordre supérieur. C. r. Acad. Sci., Paris, **255**, 1962, 2894—2896.

5. R u s c i o r, S t e f a n i a. Sul metodo integrale di risoluzione di una classe di problem al contorno. Accademia Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., e nat., s. 8, XXXV, 1963, 6.
6. R o s s i, S. Sul metodo di Mangeron in certi problemi al contorno non lineari. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n. IX (XIII), 3—4, 1963.
7. G i o i a, M. F. Alcuni tëoremi concernenti i problemi di Mangeron — Krivošein. Bul. politehn. Iasi, s. n. IX (XIII), 3—4, 1963.
8. К а р п и л о в с к а я, Э. Б. О сходимости метода коллокации. Доклады АН СССР, **151**, № 4, 1963, 766—769.
9. M a n g e r o n, D. Problèmes des spectres pour les systèmes différentiels réductibles. Bull. Inst. polytechn. Jassy, 4, 1949, 441—445.
10. М а н ж е р о н, Д. Метод интегральных уравнений в нелинейной механике. Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1. Аналитические методы. Киев, АН УССР, 1963, 347—350.
11. Ш е с т о п а л, А. Разложение функций Грина линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа по их фундаментальным решениям в некоторых многоугольных областях. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n. X(XIV).
12. M a n g e r o n, D., F. A. S e s t o p a l. Application des méthodes de la réflection et du développement des fonctions de Green en séries de solutions fondamentales à l'étude de certains problèmes de la Mécanique des vibrations. Bul. Inst. politehn., 6, 1963.
13. M a n g e r o n, D., A. F. S e s t o p a l. Sul problema di analisi spetrale delle piastre trangolari. Atti della Accademia Naz. dei Licencei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, XXXVI, 1, 6.
14. S c h e c h t e r, M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Comm. Pure a. Appl. Math., **12**, 1959, 3, 457—486.
15. Д ж о н, Ф. Плоские волны и сферические средние. Москва, 1958.
16. Г е л ь ф а н д, И. М., Г. Е. Ш и л о в. Обобщенные функции. Москва, 1958.
17. Ш е с т о п а л, А. Ф. Метод отражений и его применение к задачам математической физики. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n. X(XIV), 3—4.
18. O b r e s c h k o f f, N. Nullstellen der Besselschen Funktionen. Jber. Dtsch. Math. Ver., **38**, 1929, 5.
19. M a n g e r o n D. New classes of functions related to the equations with "total derivatives". Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n. IV (VIII), 3—4, 1958, 73—74.
20. P i c o n e, M. Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica. Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, Première Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, 1940, 183—232.
21. М а н ж е р о н, Д., Л. Е. К р и в о ш е и н. Решение смешанной задачи для одного класса интегро-дифференциальных уравнений параболического типа. Известия на Матем. институт при БАН (в печати)

Поступила 17. III. 1964 г.

РАЗВИВАНЕ НА ФУНКЦИИТЕ НА ГРИН НА ЛИНЕЙНИТЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОПЕРАТОРИ С ЧАСТНИ ПРОИЗВОДНИ В РЕД ОТ ФУНДАМЕНТАЛНИ РЕШЕНИЯ И НЯКОИ НЕГОВИ ПРИЛОЖЕНИЯ КЪМ ПРОБЛЕМИТЕ НА СПЕКТРАЛНИЯ АНАЛИЗ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА

Д. Манжерон и А. Ф. Шестопал

(Резюме)

Авторите изхождат от редица свои предишни работи относно един нов клас гранични проблеми, чийто прототип е даден с (*) [2]—[4], където със символа ′ е отбелязана тоталната производна на М. Пиконе (**) [20], и с които по-късно са се занимавали редица други автори [5]—[8].

Използвайки метода на огледалното изображение и на развитието на функциите на Грин в редове от фундаментални решения (по отношение на проблемата на „правоъгълните" *n*-мерни области (вж. [12] и [17]), авторите тук изследват развитието на функциите на Грин за известен клас елиптични и неелиптични оператори и прилагат след това получените резултати в изграждането на спектри и на собствените функции, съответни на триъгълни плоскости.

Накрая се споменават някои други приложения, които ще бъдат предмет на следващи работи.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE GREEN DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN SÉRIES DE SOLUTIONS FONDAMENTALES ET QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS AUX PROBLÈMES D'ANALYSE SPECTRALE DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

D. Mangeron et A. F. Šestopal

(Résumé)

Les auteurs prennent le point de départ d'une série de travaux propres antérieurs relatifs à une nouvelle classe de problèmes à la frontière dont le prototype est donée par (*) [2]—[4], où par le symbole ′ a été notée la dérivée totale de M. Picone (**) [20], et dont se sont occupé ensuite nombre d'autres chercheurs [5]—[8].

Tout en utilisant la méthode des réflexions et celle du développement des fonctions de Green en séries de solutions fondamentales, cristallisées dans [12] [17] en ce que regarde le problème des domaines „rectangulaires" à *n*-dimensions, ils étudient ici les développements des fonctions de Green pour certaines classes d'opérateurs elliptiques et non elliptiques; ensuite les résultats acquis sont appliqués à l'établissement des spectres et des fonctions propres correspondantes relatifs aux plaques triangulaires.

On indique enfin quelques autres extensions qui feront objet de travaux prochains.