БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

LA DERIVATION ABSTRAITE*

René de Possel

I. Commençons par un bref historique de la question. Dans un espace mesuré, ou un ensemble muni d'une mesure (dénombrablement additive, l'espace étant réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure finie), toute fonction d'ensemble réelle $\vartheta(A)$ dénombrablement additive et nulle sur tout ensemble de mesure nulle s'écrit

$$\vartheta(A) = \int_A f(x)\, dm,$$

$f(x)$ étant la pseudo-dérivée, ou intégrand de Radon — Nicodym.

En 1935, j'ai introduit la notion de „système de voisinages en mesure" ou „système dérivant", permettant d'obtenir $f(x)$ comme limite du rapport des valeurs de ϑ et de m pour des ensembles du système „tendant" vers x, en un sens à préciser. Il s'agit d'une extension des travaux de Vitali, qui suivirent de peu l'apparition de l'intégrale de Lebesgue.

Les ensembles du système S associés à chaque point étaient, soit indexés sur les entiers, soit plus généralement munis d'une structure d'espace L de Fréchet avec un seul élément limité.

Je donnais plusieurs conditions équivalentes pour qu'un système S dérive les fonctions d'ensemble Lipschitziennes, ou, plus généralement, toutes celles qui s'annulent sur un ensemble de mesure nulle.

En 1947, à la suite d'une correspondance avec mon collègue Pauc, je reprenais cette étude en effectuant des généralisations dans plusieurs directions:

1°) Je remplaçais les ensembles associés à chaque point par des fonctions $\psi(x)$ réelles non négatives, la mesure $m(A) = \int_A \varphi_A(x)\ dm$ étant remplacée par $\int_A \psi(x)\, dm$ ($\varphi_A(x)$ désigne ici la fonction caractéristique de l'ensemble A).

2°) La notion d'espace L attaché à chaque point était remplacée par celle d'un filtre F_x sur l'ensemble des parties mesurables de E, ou bien sur l'ensemble U des fonctions ψ si on considère la généralisation du 1).

* Conférence faite au 2e Congrès des mathématiciens bulgares, Drujba, septembre 1967

3) La fonction d'ensemble ϑ pouvait prendre ses valeurs dans un espace de Banach. L'existence de l'integrand de Radon-Nikodym devait être supposée. Mon collègue Metivier a montré depuis que cette existence n'a pas toujours lieu, contrairement à ce qui se passe pour les valeurs réelles.

4) La fonction d'ensemble ϑ n'était pas forcément nulle sur les ensembles de mesure m nulle (autrement dit, n'était pas nécessairement absolument continue par rapport à m), mais elle restait à variation bornée sur tout ensemble de mesure finie.

Dans ces conditions, on a une décomposition de Radon-Nikodym de la forme

$$\vartheta(A)=\int_A f(x)\,dm+\vartheta_1(A),$$

ou $\vartheta_1(A)$ est nul pour tout ensemble mesurable m sans point commun avec un certain ensemble de mesure nulle X, sur lequel sont concentrées les valeurs de ϑ_1, qui est appelé la „partie singulière" de ϑ, alors que $\int_A f(x)\,dm$ en est la partie absolument continue.

La dérivée de ϑ obtenue avec le système S était presque partout égale à $f(x)$, à condition que S verifie une condition supplémentaire.

Ce dernier résultat était une très forte extension du théorème de Lebesgue sur la dérivation des fonctions à variation bornée.

Ces differentes généralisations étaient publiées dans deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris en 1947 [1], [2]. Le temps me manquerait pour en rédiger les démonstrations, et je pensais d'ailleurs qu'on les retrouverait facilement. Mais il n'en fut pas ainsi; mon collègue C. Pauc me les demandait souvent et en avait confié la recherche à plusieurs de ses élèves. D'autre part, la découverte par Métivier de cas où l'integrand n'existe pas jetait un doute sur la validité des résultats. En 1965, avec mon collègue et ancien élève Brunel (dont j'ai eu l'occasion de parler l'an dernier à Sofia à propos de ses résultats sur la théorie ergodique) nous reprenions mes anciens brouillons et n'y découvrions pas de faute.

Mais, voici un an, deux élèves de Pauc eurent besoin de mes anciens résultats. Je leur communiquais mes brouillons et ils rédigeaient entièrement les démonstrations qui paraitront sous peu, probablement au Journal de Mathématiques ou au Bulletin de la Société mathématique de France.

Je vais tenter, dans ce bref exposé, de vous indiquer les principaux résultats, tour d'abord de mes premiers travaux de 1935, puis des extensions de 1947.

Je dois signaler que le professeur Denjoy, qui donne en ce moment son exposé dans une salle voisine, a lui aussi obtenu d'importants résultats sur la question, mais dans des voies un peu différentes.

II. Soit m la mesure supposée dénombrablement additive définie sur une tribu T de parties E, c'est-à-dire une famille contenant avec deux ensembles leur différence et avec une infinité dénombrable d'ensembles leur réunion, mesure prenant éventuellement des valeurs $+\infty$.

Nous associons, à chaque point x, une famille d'ensembles, ne contenant pas necessairement x, avec une notion de convergence vers x. Le cas le plus simple est celui de la suite $v_{x,n}$, convergeant par définition vers x

lorsque n augmente indéfiniment. On peut aussi supposer qu'à chaque v_x est attaché un paramètre réel r et que des v_x „tendent vers x" lorsque r tend vers zéro. On peut aussi, comme nous l'avons fait en 1947, introduire un filtre sur l'ensemble des ensembles mesurables pour chaque point x.

Bornons nous, pour simplifier, au cas où nous avons une suite d'ensembles $v_{x,n}$, mesurables m, attachés à chaque point x, constituant notre système S.

La densité d'un ensemble A au point x evaluée avec S est alors la limite, si elle existe, de

$$m(\bar{A} \cap v_{x,n})/m(v_{x,n}).$$

La dérivée d'une fonction d'ensemble ϑ définie sur les ensembles de mesure m finie est la limite, si elle existe, de

$$\vartheta(v_{x,n})/m(v_{x,n}).$$

Supposons ϑ dénombrablement additive, nulle sur tout ensemble de mesure m nulle et soit $f(x)$ telle que

$$\vartheta(A) = \int_A f(x)\, dm,$$

si la dérivée de ϑ par rapport à m évaluée avec un système S est égale presque partout au sens de m à $f(x)$, nous disons que S d e r i v e ϑ.

Si S dérive toute fonction ϑ Lipschitzienne, c'est-à-dire vérifiant toujours

$$|\vartheta(A)| \leq km(A),$$

nous disons que S est f a i b l e m e n t d é r i v a n t.

Si S dérive encore toute fonction ϑ répondant à la définition ci-dessus, nous disons que S est f o r t e m e n t d é r i v a n t.

Enfin, considérons une fonction d'ensemble ϑ toujours définie sur les ensembles mesurables m et de mesure finie, mais pas forcément nulle sur tout ensemble de mesure nulle. Supposons-la à variation bornée, c'est-à-dire telle que l'on ait toujours

$$\sum_i |\vartheta(e_i)| \leq P$$

pour tout recouvrement d'un ensemble de mesure finie A par des ensembles e_i mesurables -m.

Nous disons que le système S est c o m p l è t e m e n t d é r i v a n t si la dérivée de ϑ par rapport à m évaluée avec S existe toujours presque partout et est presque partout égale à la fonction $f(x)$ définie plus haut.

Par exemple, pour la mesure de Lebesgue du plan, considérons le système obtenu en associant à chaque point x les rectangles centrés sur ce point, en admetant qu'ils convergent vers x lorsque leurs dimensions tendent vers zéro.

Il résulte d'un exemple donné par O. Nikodym en 1927 que ce système n'est pas faiblement dérivant. Si on se limite aux rectangles dont les côtés sont parallèles à des directions fixes, le système est faiblement dérivant. Si on se limite aux carrés, le système devient fortement dérivant, et même complètement dérivant. Mais si on ajoute à chaque carré du système un ensemble fini, indépendant de x, de mesure nulle, le système cesse d'être complètement dérivant, mais reste fortement dérivant.

III. Dans nos deux premiers travaux sur la question, en 1935, nous avons donné des conditions necessaires et suffisantes pour qu'un système S soit faiblement dérivant. Les voici.

1. A étant un ensemble mesurable quelconque, la densité de A par rapport à m évaluée avec S existe et est égale à 1 en presque tout point de A et à 0 en presque tout point n'appartenant pas à A.

2. Etant donné un ensemble B mesurable ou non, de mesure extérieure non nulle, il existe toujours un point de B ou la densité de B existe et est égale à 1.

3. Quel que soit le système S_1 obtenu en extrayant de chaque suite associée à x dans S une suite partielle, et quel que soit l'ensemble mesurable A et le nombre $\varepsilon>0$, il existe toujours un point x de A et un ensemble v_x de S_1 appartenant à la suite associée à x, telle que

$$m(A\cap v_x)>(1-\varepsilon)\, m(v_x).$$

4. Quel que soient S_1, A et ε comme ci-dessus, il existe des points x_i de A en nombre fini et des ensembles v_{x_i} de S_1 attachés à ces points tels que

$$m(A)<m(A\cap \bigcup v_{x_i})+\varepsilon,\quad \sum_i m(v_{x_i})<mA+\varepsilon;$$

cette condition peut s'écrire sous la forme d'une seule inégalité:

$$\int \left| \varphi_A(x)-\sum \varphi v_{x_i}(x)\right| dm<\varepsilon,$$

$\varphi_A(x)$ étant la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Telles sont les conditions équivalentes que nous avions données en 1935. Nous y avons ajouté la proposition suivante:

Pour que le système S soit fortement dérivant il suffit que la condition 4 soit vérifiée en supposant les v_{x_i} étrangers les uns aux autres.

Dans nos notes de 1947, donnant les extensions auxquelles nous avons fait allusion, l'intégrale pouvait être prise à différents points de vue, par exemple au sens de la convergence forte ou faible de l'espace de Banach des valeurs de la fonction d'ensemble. Ceci n'influait pas sur les résultats.

Les ensembles du système S étaient remplacés, avons-nous dit, par les fonctions $\psi_{x_0 n}(x)$ mesurables et non négatives attachées à chaque point x_0. La dérivée de ϑ était alors la limite de

$$\int \psi_{x_0 n}(x)\, d\vartheta / \int \psi_{x_0 n}(x)\, dm$$

au lieu de

$$\int \psi_{v_{x_0 n}}(x)\, d\vartheta / \int \psi_{v_{x_0 n}}(x)\, dm.$$

La condition 3 prenait la forme suivante:

Quels que soient S_1, A et ε, il existe un point x_0 de A et une fonction $\psi_{x_0 n}$ de S, tels que

$$\int_A \psi_{x_0 n}(x)\, dm > (1-\varepsilon)\int \psi_{x_0 n}(x)\, dm.$$

La condition 4 devenait:

Quels que soient S_1 et ε, il existe des points x_i de A, des fonctions $\psi_{x_i n}$ de S_1 et des λ_i réels positifs tels que

$$\int \left| \varphi_A(x) - \sum \lambda_i \psi_{x_i n_i}(x) \right| dm < \varepsilon.$$

Quant à la condition suffisante pour qu'un système soit fortement dérivant, elle se déduisait de la précédente en ajoutant l'hypothèse de l'existence d'un nombre P tel que

$$\sum \lambda_i \psi_{x_i n_i}(x) \leq P.$$

Il suffisait d'ailleurs qu'il existe un $A' \subset A$ pour lequel la condition étai vérifiée.

IV. Enfin nous donnions dans la deuxième note une condition suffisante pour qu'un système S soit complètement dérivant.

Soit J une base pour la mesure m, c'est-à-dire un ensemble de parties mesurables de E tel que tous les ensembles mesurables constituent la plus petite tribu contenant J.

Quels que soient S_1 extrait de S et A, il existe une base J, un A' mesurable de mesure positive contenu dans A, et un nombre $P>0$ tels que, quels que soient $I \in J$ et $\varepsilon>0$ il existe un nombre fini de points x_i appartenant à $A' \cap I = A''$, de fonctions $\psi_{x_i n}$ appartenant à S_1, et de nombres $\lambda_i > 0$, vérifiant d'une part l'inégalité

$$\int \left| \varphi_{A''}(x) = \sum_i \lambda_i \psi_{x_i n_i}(x) \right| dm < \varepsilon$$

et d'autre part, en tout point n'appartenant pas à A', l'inégalité

$$\sum \lambda_i \psi_{x_i n_i}(x) \leq P \varphi_I(x).$$

Dans le cas où les ψ sont des fonctions caractéristiques d'ensembles, cette condition devient une condition relative à la dérivation initiale avec un système d'ensembles qui s'énonce de même.

On voit donc que le théorème de Lebesgue, relatif à la dérivation des fonctions à variations bornées fait intervenir une condition plus restrictive que le théorème relatif aux fonctions absolument continues, à savoir l'existence de ces bases J.

LITTÉRATURE

1. de Possel, R. C. R., **224** (1947), 1137—1139.
2. de Possel, R. C. R., **224** (1947), 1197—1198.

Reçu le 20. X. 1967

АБСТРАКТНО ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

Рене де Посел

(Резюме)

Кратък обзор на резултатите на автора и на негови сътрудници по абстрактното диференциране, започнати в [1], [2].

АБСТРАКТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Рене де Поссель

(Резюме)

Краткий обзор результатов автора и его сотрудников по абстрактному дифференцированию, начатых работами [1], [2].