БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

К МНОГОМЕРНОЙ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

С. Е. Карапетян

С каждой дифференциальной окрестностью текущего элемента многообразия связывается трилинейная форма. Излагается „схема" трилинейной формы, которая дает возможность руководствоваться только геометрическими соображениями.

Первые шесть параграфов относятся к геометрии многомерных поверхностей, где доказываются две основные теоремы этой теории. В седьмом параграфе излагается теория касательных алгебраических многообразий. В восьмом параграфе схема трилинейной формы распространяется на подмногообразия грассмановых многообразий, что приводит к дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. Эта схема дает возможность классификации изучаемых многообразий.

Настоящая статья является продолжением работ [1]—[6] автора, где рассматривались дифференциальные окрестности I, II, а в некоторых случаях и III порядков.

§ 1. СПОСОБ ОТБРАСЫВАНИЯ НУЛЕВЫХ ИНДЕКСОВ

Рассматривается проективное n-мерное пространство над полем комплексных чисел K. Поверхность в этом пространстве задается функциями

$$Kt^{\alpha}, \quad \alpha=0, 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

от параметров $u^1, \ldots, u^a$, где K — произвольное, отличное от нуля, число из основного поля K, т. е. коэффициент нормирования точки M поверхности.

Обозначим через

$$t^{\alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \quad i=1, 2, \ldots, a, \tag{1.2}$$

частные производные порядка k от функций t^{α} по параметрам $u^{i_1}, \ldots, u^{i_k}$. Введем понятие „способа отбрасывания нулевых индексов", которое заключается в следующем. Обозначим через $j_1, \ldots, j_k$ нижние индексы выражений (1.2), которые меняются не от единицы до a, а от нуля до a, и каждый раз, отбрасывая нулевой индекс, функции t^{α} и их частные производные порядка k можно записать так:

(1.3) $$t^a_{j_1\dots j_k},\quad j=0,1,\dots,a.$$

Таким образом, если всем индексам j будем задавать нулевые значения и отбрасывать эти нули, то из (1.3) получим функции t^a. Если всем индексам, кроме одного, зададим нулевые значения и отбросим их, то получим t^a_j, $j=0, 1, \dots, a$, которые при $j=0$ дадут t^a, а при остальных значениях j — все частные производные первого порядка и т. д. В этой работе индексы j везде будут обладать этим свойством. С помощью способа отбрасывания нулевых индексов формулы представляются в очень компактном виде. Например, тангенциальные уравнения k-касательной плоскости (соприкасающейся плоскости порядка $k-1$) запишутся в виде

(1.4) $$t^a_{j_1\dots j_k}T_a=0,$$

где T_a — координаты гиперплоскости пространства. Таким образом, если все индексы j равны нулю, то (1.4) дает уравнение точки поверхности. Если $k=1$, то (1.4) дает систему уравнений касательной плоскости поверхности, а при $k=2$ получается система уравнений соприкасающейся (2-касательной) плоскости и т. д.

Из системы (1.4) непосредственно вытекает, что

(1.5) $$R(t^{\underline{a}}_{j_1\dots j_k}),$$

(где $R(\ )$ означает ранг прямоугольной матрицы $(\ )$, а подчеркнутый индекс a является индексом столбцов (или строк) этой матрицы) является проективно-дифференциальным инвариантом поверхности. Ранг (1.5) определяет размерность k-касательной плоскости поверхности:

(1.6) $$\text{размерность } k\text{-кас. плоскости} = R(t^{\underline{a}}_{j_1\dots j_k})-1.$$

Непосредственный подсчет числа строк и столбцов этой матрицы показывает, что размерность k-касательной плоскости наиболее общей поверхности равна числу

(1.7) $$\min(C^k_{a+k}-1,\ n).$$

Если размерность k-касательной плоскости на число s меньше числа (1.7), то такая поверхность обозначается через $W^{(k)}_s$. Очевидно, что любая поверхность обладает таким порядком $k\geq 1$, для которого k-касательная плоскость имеет максимальную размерность.

§ 2. СОПРЯЖЕННАЯ ТРОЙКА ОБЪЕКТОВ ОКРЕСТНОСТИ ПОРЯДКА $k+1$

Пусть поверхность не является поверхностью $W^{(k)}_s$, т. е. ее k-касательная плоскость

(2.1) $$t^a_{j_1\dots j_k}T_a=0$$

имеет максимальную размерность $C^k_{a+k}-1$. Тогда она является линейной оболочкой C^k_{a+k} точек

(2.2) $$Kt^a_{j_1\dots j_k}.$$

Произвольная точка F на этой плоскости линейно выражается через эти точки единственным способом. Если обозначим через $x^{j_1 \dots j_k}$ координаты этой точки относительно точек (2.2), то F будет иметь координаты

$$(2.3) \qquad K x^{j_1 \dots j_k} t^{\alpha}_{j_1 \dots j_k},$$

где суммирование ведется не по каждому из этих индексов j отдельно, а по всем различным их сочетаниям.

Рассмотрим некоторую линию l на поверхности, огибаемую направлением du^i. k-касательная плоскость вдоль этой линии образует однопараметрическое семейство C^k_{a+k}—1-мерных плоскостей. Но это семейство одновременно является C^k_{a+k}-мерной поверхностью, если его рассматривать как геометрическое место точек. Мы эту поверхность обозначим через $M_k(du)$. Так как эта поверхность описывается k-касательными плоскостями, то последние являются образующими подпространствами для поверхности $M_k(du)$. Найдем касательную плоскость к этой поверхности в точке (2.3). Эта плоскость является линейной оболочкой всех точек (2.2) и дифференциала точки (2.3). Дифференциал этой точки имеет вид

$$(2.4) \qquad \Omega^{j_1 \dots j_k} t^{\alpha}_{j_1 \dots j_k} + K x^{j_1 \dots j_k} t^{\alpha}_{j_1 \dots j_k i} du^i, \quad i = 1, \dots, a,$$

где Ω — некоторые формы, которые в данном случае нас не интересуют. Следовательно, касательная плоскость поверхности $M_k(du)$ определяется системой (2.1) и еще одним уравнением

$$(2.5) \qquad t^{\alpha}_{j_1 \dots j_k i} x^{j_1 \dots j_k} du^i T_\alpha = 0.$$

Определение. Точка x, гиперплоскость T (оба инцидентных k-касательной плоскости) и направление du образуют сопряженную тройку объектов, если они удовлетворяют уравнению (2.5). Тройка объектов обозначается символом $(xTdu)$. Геометрический смысл сопряженной тройки объектов непосредственно вытекает из вышеизложенного.

В работе [4] для сопряженной тройки объектов доказана следующая теорема, которая здесь только формулируется: три обекта $(xTdu)$ (удовлетворяющие условию определения) образуют сопряженную тройку тогда и только тогда, когда точка x лежит на характеристике (фокальном подпространстве) гиперплоскости T, когда последняя двигается по направлению du.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. Если точка x принадлежит k — 1-касательной плоскости поверхности (M), то касательная плоскость (2.1), (2.5) поверхности $M_k(du)$ неопределенна. Если точка x не принадлежит k — 1-касательной плоскости поверхности (M), то касательная плоскость (2.1), (2.5) остается неизменной, когда точка касания x двигается по прямой, пересекающей эту k — 1-касательную плоскость.

Действительно, если точка x принадлежит k — 1-касательной плоскости (эта плоскость определяется точками $t^{\alpha}_{j_2 \dots j_k}$), то число индексов у x по меньшей мере на единицу меньше числа k, точнее, точку x можно представить, например, в виде

$$(2.5') \qquad x^{j_1 \dots j_k} = \delta^{j_1}_0 x^{j_2 \dots j_k}.$$

Для этой точки уравнение (2.5) в силу системы (2.1) тождественно обращается в нуль. Первая часть теоремы доказана. Пусть теперь точка x k-касательной плоскости двигается по прямой $x+\lambda y$, где y принадлежит $k-1$-касательной плоскости. Уравнение (2.5) для точки $x+\lambda y$, в силу первой части теоремы, ничем не отличается от уравнения (2.5), написанного для точки x. Теорема полностью доказана.

Замечание. Поверхности $M_k(du)$ являются многомерными обобщениями развертывающихся поверхностей (торсов) трехмерного пространства. Точки $k-1$-касательной плоскости на этой поверхности являются особыми точками (точками „ребра возврата"). Ребро возврата (геометрическое место $k-1$-касательных плоскостей) этой поверхности имеет в каждой своей точке касательную плоскость, совпадающую с k-касательной плоскостью. Последняя плоскость является одновременно образующей плоскостью поверхности $M_k(du)$.

Введем еще два понятия, связанные с семейством k-касательных плоскостей поверхности (M).

а) Касательное подпространство однопараметрического семейства k-касательных плоскостей (см. [2]--[4]) — это линейная оболочка k-касательной плоскости и ее бесконечно близкой плоскости по некоторому направлению. Из геометрического смысла ясно, что система уравнений этого подпространства получится, если (2.5) превратится в тождество относительно x. Итак, уравнения касательного подпространства однопараметрического семейства k-касательных плоскостей запишутся в виде

$$t^a_{j_1\ldots j_k} T_a=0, \quad t^a_{j_1\ldots j_k i}\, du^i T_a=0. \tag{2.6}$$

б) линейная оболочка касательных в точке x плоскостей всех поверхностей $M_k(du)$. Это подпространство определяется системой

$$t^a_{j_1\ldots i_k} T_a=0, \quad t^a_{j_1\ldots j_k i}\, x^{j_1\cdots j_k}\, T_a=0 \tag{2.7}$$

и получается из (2.1) и (2.5), если в (2.5) мы обращаем в нуль все коэффициенты при du. Более наглядно подпространство (2.7) можно представить так: когда точка M описывает поверхность (M), то с ней связанная k-касательная плоскость описывает другую поверхность, которая имеет размерность $C^k_{a+k}+a-1$. Подпространство (2.7) является касательной плоскостью к этой поверхности в точке x. В дальнейшем эта поверхность обозначается через M_k.

Размерности подпространств (2.6) и (2.7) всегда различны. Исключение составляет только случай, когда k 1, который приводит к рассмотрению окрестности второго порядка. В работе [4] автора по схеме трилинейной формы изучаются все геометрические образования дифференциальной окрестности второго порядка поверхности.

Мы можем получить систему уравнений $k+1$-касательной плоскости поверхности из системы (2.7) путем приравнивания нулю коэффициентов при du^i:

$$t^a_{j_1\ldots j_{k+1}} T_a=0 \tag{2.8}$$

Таким образом, $k+1$-касательная плоскость поверхности есть линейная оболочка касательных подпространств всех однопараметрических подсемейств семейства k-касательных плоскостей.

Точно таким же образом систему (2.8) можно получить и (2.7), если потребовать, чтобы последнее было тождеством относительно x. Аналогичный геометрический вывод можно делать и в этом случае.

§ 3. ТРИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ОКРЕСТНОСТИ

Мы в этом параграфе даем схему трилинейной формы. Как уже сказано, сопряженная тройка объектов определяется системой

$$t^{a}_{j_1\ldots j_k} T_a=0, \quad t^{a}_{j_1\ldots j_k i} x^{j_1\cdots j_k} du^i T_a=0, \tag{3.1}$$

где первая группа уравнений утверждает, что гиперплоскость T принадлежит k-касательной плоскости.

Предположим, что k-касательная плоскость имеет максимальную размерность, т. е.

$$R(t^{a}_{j_1\ldots j_k})=C^{k}_{a+k}. \tag{3.2}$$

Тогда эту группу уравнений можно решить относительно ровно стольких же переменных:

$$T_a=l^{p}_{a}T_p;\ q,\ p=C^{k}_{a+k},\ldots,n, \tag{3.3}$$

где l^{p}_{a} однозначно определяются из системы

$$l^{q}_{p}=\delta^{q}_{p}, \quad t^{a}_{j_1\ldots j_k}l^{p}_{a}=0. \tag{3.4}$$

Внося значения (3.3) во второе уравнение системы (3.1) и обозначая через

$$A^{p}_{j_1\ldots j_k i}\equiv t^{a}_{j_1\ldots j_k i}l^{p}_{a}, \tag{3.5}$$

получим

$$\Phi_{k+1}\equiv A^{p}_{j_1\ldots j_k i}X^{j_1\cdots j_k}du^i T_p=0. \tag{3.6}$$

Левая часть этого уравнения называется **трилинейной формой окрестности порядка** $k+1$. Следовательно, точка x k-касательной плоскости, гиперплоскость T, проходящая через эту плоскость, и перемещение du образуют сопряженную тройку объектов тогда и только тогда, когда они обращают в нуль форму Φ_{k+1}. Из (3.4) и (3.5) непосредственно следует, что величины A симметричны относительно всех нижних индексов.

Здесь справедлива следующая

Лемма. $A^{p}_{j_1\ldots j_k i}x^{j_1\cdots j_k}\equiv 0$ для всех точек x k—1-касательной плоскости.

Действительно, в § 2 было доказано, что для этих точек (т. е. точек вида (2.5)) уравнение (2.5) является следствием системы (2.1). Тогда в силу известной из высшей алгебры теоремы для этих точек будем иметь

$$A^{p}_{j_1\ldots j_k i}x^{j_1\cdots j_k}du^i\equiv 0.$$

Но так как последние соотношения соблюдаются для любых направлений du^i (см. теорему (2.1)), то лемма доказана. Так как $A^p_{j_1 \dots j_k i} x^{j_1 \dots j_k} \equiv 0$ для всех точек x $k-1$-касательной плоскости, то фактически здесь доказано, что величины $A^p_{j_1 \dots j_k i}$ обращаются в нуль, если у них имеется по меньшей мере один нулевой индекс.

Замечание. Из геометрического смысла формы Φ_{k+1} следует, что величины $A^p_{j_1 \dots j_k i}$ $(j=0, \dots, a;\ i=1, \dots, a;\ p=C^k_{a+k}, \dots, n;\ k=0, 1, \dots)$ образуют тензор дифференциальной окрестности порядка $k+1$. Но этим свойством не будем пользоваться в дальнейшем, ибо мы руководствуемся геометрическими соображениями.

С каждой дифференциальной окрестностью связывается и другой тензор — грассмановы координаты k-касательной плоскости, которые записываются в виде

$$t^{\alpha_0 \dots \alpha_N} = \delta^{\alpha_0 \dots \alpha_N}_{\beta_0 \dots \beta_N} t^{\beta_0} t^{\beta_1}_{1} \dots t^{\beta_N}_{\underbrace{a \dots a}_{k}},$$

где

$$N = C^k_{a+k} - 1.$$

Как мы видим, трилинейная форма содержит три серии переменных $x^{j_1 \dots j_k}$, du^i и T_p. Пространства этих переменных

$$P_{C^k_{a+k}-1}, \quad P_{a-1} \quad \text{и} \quad P_{n-C^k_{a+k}} \tag{3.7}$$

имеют соответственно размерности $C^k_{a+k}-1$, $a-1$ и $n-C^k_{a+k}$.

Мы теперь переходим к „схеме трилинейной формы“, смысл которой заключается в следующем. Когда форма $\Phi_{k+1}=0$, то выбранные из пространств (3.7) элементы вместе образуют сопряженную тройку объектов. Таким образом, $\Phi_{k+1}=0$ устанавливает некоторое соответствие точек пространств (3.7). Это соответствие в трехкратном проективном пространстве (см. [9], т. II, стр. 101—147) представляется гиперплоскостью $\Phi_{k+1}=0$, точки пересечения которой с многообразием Сегре представляют образы сопряженной тройки $(xduT)$ объектов из пространств (3.7).

Сразу видно, что две точки из любых двух пространств (3.7) (из каждого пространства по одной точке) можно задавать совершенно произвольно, тогда третья точка, которая с первой парой образует сопряженную тройку объектов, заполняет гиперплоскость в третьем пространстве. Исключение составляют лишь те пары (сопряженные пары), для которых Φ_{k+1} обращается в тождество относительно координат третьей точки. Следовательно, сопряженная пара образует сопряженную тройку объектов с любой точкой третьего пространства. Эти соображения приводят нас к трем системам билинейных соотношений

$$A^p_{j_1 \dots j_k i} x^{j_1 \dots j_k} T_p = 0, \tag{3.8}$$

$$A^p_{j_1 \dots j_k i} du^i T_p = 0, \tag{3.9}$$

$$A^p_{j_1 \dots j_k i} x^{j_1 \dots j_k} du^i = 0, \tag{3.10}$$

которые определяют три сопряженные пары дифференциальной окрестности порядка $k+1$. Эти пары обозначаются соответственно через (xT), (Tdu) и (xdu). Из геометрического смысла сопряженной тройки следует, что третья сопряженная пара (xdu) определяет фокусы и фокальные направления k-касательной плоскости (см. [1]—[6]) (а для случая $k=1$ — хорошо известные сопряженные направления поверхности). Нетрудно видеть, что система (3.8) определяет касательную в точке x плоскость поверхности M_k (см. § 2). Точно так же система (3.9) определяет касательное подпространство однопараметрического семейства k-касательных плоскостей вдоль линии du^i (см. § 2).

В следующих параграфах мы еще вернемся к геометрии трех сопряженных пар и увидим как она связывается с геометрией соответствий. А теперь приступаем к следующему этапу схемы трилинейной формы. Каждое из билинейных соответствий (3.8)—(3.10) устанавливает соответствие между точками двух пространств из (3.7). При этом каждой точке одного пространства соответствует некоторое подпространство другого пространства. Исключение составляют лишь те точки (особые объекты) первого пространства, для которых соответствующая билинейная система тождественно обращаются в нуль. Эти рассуждения сразу нас приводят к трем (именно к трем, а не шести) линейным системам с определенными геометрическими толкованиями (см. ниже)

$$A^p_{j_1 \dots j_k i} x^{j_1 \dots j_k} = 0, \tag{3.11}$$

$$A^p_{j_1 \dots j_k i} T_p = 0, \tag{3.12}$$

$$A^p_{j_1 \dots j_k i} du^i = 0. \tag{3.13}$$

Наконец, ранги матриц этих систем приводят к классификации поверхности.

В следующих параграфах мы подробно исследуем геометрию данной здесь схемы трилинейной формы. В случаях $k=1$, 2 она подробно изучена в работах [1]—[6] автора не только для поверхностей, но и для семейств многомерных плоскостей.

§ 4. ТЕОРИЯ СООТВЕТСТВИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Вторая дифференциальная форма поверхности трехмерного пространства имеет проективный характер. Ее полярная форма в наших обозначениях (формула (3.10) с учетом леммы) запишется в виде

$$A^3_{i_1 i} x^{i_1} y^i = 0, \quad i, i_1 = 1, 2, \tag{4.1}$$

где y^i является точкой пересечения направления du^i с некоторой прямой l, лежащей на касательной плоскости и не проходящей через точку касания (т. е. в формуле (3.10) вместо du^i подставлены пропорциональные им величины y^i). Формула (4.1) фактически является проективным соответствием между двумя рядами точек x и y с общим носителем l. Две точки x и y соответствуют друг другу тогда и только тогда, когда их соответствующие направления на поверхности сопряжены друг с другом. Этот давно известный факт является хорошим примером глубокой связи теории соответствия с дифференциальной геометрией. Результаты предыдущего параграфа показывают, что в многомерном случае мы сталкиваемся с аналогичными задачами. Но полученные в этом случае соответствия (трилинейные или билинейные) уже не являются корреляциями или коллинеациями. Более того, эти соответствия (например каждое из соответствий (3.8)—(3.10)) устанавливают соответствие между элементами из разных пространств с различными размерностями.

В алгебраической геометрии ([9], т. II, стр. 101—147) рассматривается общая теория алгебраических соответствий. С помощью этой теории автор изложил ряд результатов билинейного соответствия между двумя различными пространствами [7]. Некоторые элементарные факты из этой работы нашли широкое применение в теории семейств многомерных плоскостей [1]—[3]. Перечислим некоторые основные результаты из работы [7].

Пусть имеется билинейное соответствие между двумя пространствами P_n и P_m

(4.2) $$a^{\nu}_{\xi\eta} x^{\xi} y^{\eta} = 0, \quad \xi = 0, \dots, n; \quad \eta = 0, \dots, m; \quad \nu = 1, \dots, b,$$

где

(4.3) $$R(a^{\nu}_{\underline{\xi}\eta}) = b$$

(здесь подчеркнутый индекс показывает число строк (столбцов), а всевозможная комбинация остальных индексов дает число столбцов (строк) матрицы). Многообразие — образ и прообраз этого соответствия определяются соответственно уравнениями

(4.4) $$R(a^{\nu}_{\underline{\xi}\eta} x^{\xi}) = m, \quad R(a^{\nu}_{\xi\underline{\eta}} y^{\eta}) = n.$$

В общем случае соответствие (4.2) является неприводимым многообразием в двухкратном пространстве переменных

(4.5) $$z^{\xi\eta} = x^{\xi} y^{\eta}$$

т. е. пересечение плоскости (4.2) с многообразием Сегре

(4.6) $$R(z^{\xi\eta}) = 1$$

неприводимо. Следовательно, оба многообразия (4.4) (они называются **матричными многообразиями**) также неприводимы. Оба многообразия (4.4) имеют одинаковую размерность, равную

(4.7) $$n + m - b.$$

Точка x называется особой точкой ранга $m - s$ первого многообразия

(4.8) $$R(a^{\nu}_{\underline{\xi}\eta} x^{\xi}) = m,$$

если для этой точки

(4.9) $$R(a^{\nu}_{\underline{\xi}\eta} x^{\xi}) = m - s.$$

Размерность многообразия этих точек равна

(4.10) $$n - (s + 1)(b + s - m).$$

Многообразие (4.9) имеет две серии образующих подпространств. Эти подпространства имеют соответственно размерности

(4.11) $$n - b(s + 1), \quad n - (b - m + s)(m + 1).$$

Каждое из многообразий (4.4), кроме этих подпространств, может обладать еще и другими (специальными) образующими подпространствами, которые соответствуют особым точкам другого многообразия (4.4). В работе [7] найдены размерности этих подпространств. Для поверхности третьего порядка трехмерного пространства специальные подпространства (прямые) образуют двойной шестисторонник Шлефли (см Гильберт, Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, стр. 165—177).

Теперь мы приступаем к приложению этих результатов в дифференциальной окрестности порядка $k+1$ многомерной поверхности. Сначала доказывается

Теорема 4.1. Для семейства k-касательных плоскостей поверхности $k-1$-касательная плоскость является фокусом.

Другими словами, $k-1$-касательная плоскость лежит на характеристических подпространствах k-касательной плоскости при движении последней по любому направлению. Действительно, для точек $k-1$-касательной плоскости система билинейных соотношений (3.10) сопряженной пары (xdu) в силу леммы превращается в тождество относительно du^i.

Приложение леммы к системе (3.8) приводит к теореме 2.1. После получения этих двух теорем удобно теперь отбрасывать те коэффициенты трилинейной формы, которые в силу леммы тождественно обращаются в нуль.

Три билинейные системы теперь запишутся в виде

$$A^p_{i_1 \dots i_k i} x^{i_1 \dots i_k} T_p = 0, \tag{4.12}$$

$$A^p_{i_1 \dots i_k i} T_p du^i = 0, \quad i = 1 \dots a, \tag{4.13}$$

$$A^p_{i_1 \dots i_k i} x^{i_1 \dots i_k} du^i = 0. \tag{4.14}$$

Геометрически это означает, что из рассмотрения семейства k-касательных плоскостей мы переходим к рассмотрению семейства C^k_{a+k-1}—1-мерных плоскостей, являющихся пересечениями k-касательных плоскостей с некоторым (не пересекающимся с $k-1$-касательной плоскостью) фиксированным подпространством размерности $n - C^{k-1}_{a+k-1}$. При таком переходе геометрия меняется согласно вышеуказанным двух теоремам.

Заметим, что такой переход впервые был осуществлен (для случая $k=1$) В. Бляшке в работе [10]. Он там геометрию двухмерной поверхности четырехмерного пространства свел к геометрии конгруэнции прямых трехмерного пространства, при этом два фокуса луча этой конгруэнции соответствовали двум сопряженным направлениям поверхности.

Таким образом, дифференциальная геометрия семейства k-касательных плоскостей, ввиду его фокального свойства, сводится к геометрии семейств C^k_{a+k-1}—1-мерных плоскостей пространства размерности $n - C^{k-1}_{a+k-1}$. Оба эти семейства, вообще говоря, являются a-параметрическими семействами.

Для изложения основной теоремы нам необходимо познакомиться со следующим „принципом дифференциальной окрестности". Когда мы рассматриваем дифференциальную окрестность порядка $k+1$, нет необходимости размерность пространства n взять больше размерности

$k-1$-касательной плоскости (числа $C^{k+1}_{a+k+1}-1$), ибо геометрия этой окрестности для всех $n>C^{k+1}_{a+k+1}-1$ одна и та же. Например, геометрическая структура окрестности второго порядка двухмерной поверхности в пространстве размерности 5 ничем не отличается от геометрической структуры этой же окрестности в пространстве размерности больше пяти. Итак, в дальнейшем мы предположим

$$n\leq C^{k+1}_{a+k+1}-1. \tag{4.15}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать п е р в у ю о с н о в н у ю т е о р е м у поверхности, образованную из шести пунктов. Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из трех систем (4.12)—(4.14) и из формул (4.2)—(4.11) (или из работ [1]—[3]). Так как при выводе трилинейной формы Φ_{k+1} мы исключили из рассмотрения $W^{(k)}$ поверхности, то эта теорема справедлива только для не $W^{(k)}$ поверхностей.

§ 5. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(I) Точки x сопряженной пары (xT) на k-касательной плоскости поверхности образуют алгебраическое многообразие

$$R\left(A^p_{i_1\ldots i_k i}x^{i_1\ldots i_k}\right)=n-C^k_{a+k}. \tag{5.1}$$

Если $a\leq n-C^k_{a+k}$, то каждая точка x k-касательной плоскости является точкой пары (xT). Если $a>n-C^k_{a+k}$, то система (5.1) образует некоторый конус размерности $n-a-1$, плоская вершина которой совпадает с $k-1$-касательной плоскостью.

(II) Гиперплоскости T сопряженной пары (xT) определяются системой

$$R\left(A^p_{i_1\ldots i_k i}T_p\right)=C^k_{a+k-1}-1. \tag{5.2}$$

Если $a<C^k_{a+k-1}-1$, то каждая гиперплоскость (инцидентная k-касательной плоскости) принадлежит паре (xT). Если $a>C^k_{a+k-1}\quad 1$, то гиперплоскости (5.2) огибают некоторый конус, плоская вершина которого совпадает с k-касательной плоскостью.

(III) Направления du^i сопряженной пары (Tdu) определяются системой

$$R\left(A^p_{i_1\ldots i_k i}du^i\right)\quad n-C^k_{a+k}. \tag{5.3}$$

Если $C^k_{a+k-1}\quad n-C^k_{a+k}$, то каждое направление du^i принадлежит паре (Tdu). Если $C^k_{a+k-1}>n-C^k_{a+k}$, то в 1-касательной плоскости эти направления образуют некоторый конус размерности $n+a-C^k_{a+k}-C^k_{a+k-1}$. Вершина этого конуса совпадает с рассматриваемой точкой поверхности.

(IV) Гиперплоскости сопряженной пары (Tdu) определяются системой

$$R\left(A^p_{i_1\ldots i_k i}T_p\right)=a\quad 1. \tag{5.4}$$

Если $C^k_{a+k-1}\quad a-1$, то каждая гиперплоскость принадлежит паре (Tdu). Если $C^k_{a+k-1}>a-1$, то эти гиперплоскости огибают некоторый конус, плоская вершина которого совпадает с k-касательной плоскостью.

(V) Точки (фокальные) сопряженной пары (xdu) в k-касательной плоскости описывают многообразие

$$R\left(A^p_{i_1\ldots i_k i}\, x^{i_1\ldots i_k}\right) = a-1. \tag{5.5}$$

Если $n - C^k_{a+k} \leq a-2$, то каждая точка является фокальной точкой. Если $n - C^k_{a+k} > a-2$, то фокальные точки образуют некоторый конус размерности $2C^k_{a+k} + a - n - 3$. Вершина этого конуса совпадает с k — 1-касательной плоскостью.

(VI) Направления (фокальные) сопряженной пары (xdu) определяются системой

$$R\left(A^p_{i_1\ldots i_k i}\, du^i\right) = C^k_{a+k-1} - 1. \tag{5.6}$$

Если $n - C^k_{a+k} \leq C^k_{a+k-1} - 2$, то каждое направление является фокальным. Если $n - C^k_{a+k} > C^k_{a+k-1} - 2$, то фокальные направления в 1-касательной плоскости образуют некоторый конус размерности $a - 2 - n + C^k_{a+k} + C^k_{a+k-1}$. Вершина этого конуса совпадает с точкой поверхности.

Как видно из этой теоремы, с каждой дифференциальной окрестностью порядка $k+1$ текущей точки поверхности связываются шесть алгебраических многообразий (5.1) — (5.6), что естественно приводит к связи между алгебраической и дифференциальной геометриями. Эта связь подробно рассмотрена в [1] — [3].

§ 6. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Следующий этап схемы трилинейной формы приводит ко второй основной теореме теории поверхностей. Сначала даем

Определение. (I) Точка k-касательной плоскости называется особой, если она является фокусом этой плоскости для любого направления du^i. (II) Гиперплоскость является особой, если она проходит через касательные подпространства всех однопараметрических подсемейств семейства k-касательных плоскостей (т. е. если она проходит через $k+1$-касательную плоскость). (III) Направление является особым, если вдоль этого направления k-касательная плоскость неподвижна.

Из этого определения непосредственно видно, что особые точки, гиперплоскости и направления определяются соответственно из систем

$$A^p_{i_1\ldots i_k i}\, x^{i_1\ldots i_k} = 0, \tag{6.1}$$

$$A^p_{i_1\ldots i_k i}\, T_p = 0, \tag{6.2}$$

$$A^p_{i_1\ldots i_k i}\, du^i = 0, \tag{6.3}$$

откуда и непосредственно вытекает

Вторая основная теорема. (I) Подпространство особых точек k-касательной плоскости имеет размерность $C^k_{a+k} - 1 - R\left(A^p_{\underline{i}_1\ldots \underline{i}_k i}\right)$.

(II) Подмногообразие особых направлений имеет размерность

$$a \quad R\left(A^p_{i_1 \quad i_k i}\right).$$

(III) Размерность $k+1$-касательной плоскости равна

$$C^k_{a+k} + R\left(A^p_{i_1 \ldots i_k i}\right) - 1.$$

Таким образом, с каждой дифференциальной окрестностью связываются три прямоугольные матрицы

$$(6.4) \qquad \left(A^p_{i_1 \quad i_k i}\right), \left(A^p_{i_1 \ldots i_k i}\right), \left(A^p_{i_1 \ldots i_k i}\right)$$

ранги которых классифицируют поверхность.

Если

$$(6.5) \qquad R\left(A^p_{i_1 \ldots i_k i}\right) = a - s,$$

то такие поверхности называются торсами типа $T^{(k)}_s$. k-касательная плоскость этой поверхности зависит от $a-s$ параметров. Торсы типа $T^{(1)}_s$ называются также тангенциально-вырожденными поверхностями.

Если

$$(6.6) \qquad R\left(A^p_{i_1 \quad i_k i}\right) = C^k_{a+k-1} - s,$$

то k-касательная плоскость имеет фокус размерности $C^k_{a+k-1} - s - 1$. Поверхности, обладающие этим свойством, называются поверхностями типа $F^{(k)}_s$.

Аналогичные рассуждения для третьей матрицы приводят к поверхностям $W^{(k)}_s$ (см. § 1).

§ 7. k-КАСАТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В теории плоских и пространственных кривых, а также в теории поверхностей трехмерного пространства хорошо известны простые алгебраические многообразия (прямая, окружность, сфера, плоскость, квадрика и т. д.), которые имеют тот или иной порядок касания с изучаемым многообразием. В этом параграфе ставится и решается аналогичная задача в наиболее общем предположении, т. е. не накладываются ограничения (кроме естественных) на числа n, a, r, k, где n — размерность пространства, a размерность поверхности, r — порядок алгебраического многообразия, k — порядок касания. С этой целью познакомимся с одним обобщением проективного пространства.

1. Пространство $P_{n(r)}$. Пусть t^α, $\alpha = 0, \ldots, n$, являются однородными проективными координатами нашего пространства. Числа

$$(7.1) \qquad t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = t^{\alpha_1} \cdots$$

(симметричные по всем индексам) являются координатами нового пространства, которое обозначаем через $P_{n(r)}$. Нетрудно заметить, что размерность этого пространства

$$(7.2) \qquad n(r) = C^r_{a+r} - 1, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Каждой точке t^a первоначального пространства в силу (7.1) соответствует единственная точка в $P_{n(r)}$. Обратное утверждение неверно, ибо не всегда система (7.1) имеет решение при произвольно заданных левых частях. Следовательно, точки P_n представляются некоторым многообразием в $P_{n(r)}$. Это многообразие мы называем многообразием Сегре. Такое название оправдывается следующим образом. Из r проективных пространств размерностей $n_1, \ldots, n_r$ Сегре образовал новое пространство, которое называется r-кратным проективным пространством (см. [9], т. II, стр. 101—153). С помощью перенесения (перенесения Сегре) r-кратное проективное пространство представляется многообразием Сегре некоторого однократного проективного пространства размерности $(n_1+1)\ldots(n_r+1)-1$ (см. там же). Пространство $P_{n(r)}$ фактически является частным случаем этого пространства (когда все пространства и точки в этих пространствах совпадают). Учитывая симметричность величин t, размерность нашего пространства доводится до $n(r)$, а размерность многообразия Сегре — до n. Уравнение многообразия Сегре (см. там же) в наших обозначениях запишется в простом виде

$$(7.3) \qquad R(t^{a_1 \ldots a_r}) = 1,$$

где эта матрица имеет размерность r (т. е. пространственная матрица). Так как в системе (7.3) каждое уравнение имеет вторую степень, то линейная оболочка многообразия Сегре совпадает со всем пространством. Другим (более строгим) доказательством этого предложения является следующий простой прием: единичная квадратная матрица, образованная из всех точек базиса пространства $P_{n(r)}$, отлична от нуля. Но каждая точка базиса принадлежит многообразию (7.3), ибо если одна координата точки отлична от нуля, а все остальные координаты равны нулю, то система (7.3) для этой точки очевидно будет удовлетворена. Итак, все точки базиса лежат на многообразии Сегре, следовательно, линейная оболочка этого многообразия совпадает со всем пространством.

Из этого результата следует, что подмногообразия многообразия Сегре, вообще говоря, не принадлежат никаким линейным подпространствам пространства $P_{n(r)}$.

2. Поверхности (M_r). Поскольку уже установлено точечное взаимно однозначное соответствие между n-пространством и многообразием Сегре, то a-мерная поверхность (M) представляется некоторым a-мерным подмногообразием многообразия Сегре. Это подмногообразие обозначается через (M_r).

Непосредственно видно (см. § 1), что k-касательная плоскость поверхности (M_r) в пространстве перенесения Сегре запишется в виде

$$(7.4) \qquad t^{a_1 \ldots a_r}_{j_1 \ldots j_k} T_{a_1 \ldots a_r} = 0,$$

где T — координаты гиперплоскости в этом пространстве, а $t^{\alpha_1}_{j_1 \cdots j_k}$ являются частными производными до порядка k включительно от t^{α_1}.
Здесь (как и раньше) отбрасываются нижние нулевые индексы при t.

3. k-касательные гиперповерхности. Пусть

$$T_{\alpha_1 \cdots \alpha_r} x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_r} = 0 \tag{7.5}$$

является уравнением алгебраической гиперповерхности порядка r в нашем пространстве P_n. Нетрудно доказать, что (7.4) как раз является условием k-касания гиперповерхности (7.5) с нашей поверхностью. Чтобы убедиться в этом, надо подставить координаты точки

$$t^{\alpha} = \left(K + dK + \frac{1}{2} d^2K + \cdots\right)\left(t^{\alpha} + dt^{\alpha} + \frac{1}{2} d^2t^{\alpha} + \cdots\right) \tag{7.6}$$

(следовательно, здесь поверхность предполагается аналитической) в уравнение (7.5), отбросить бесконечно малые члены порядка выше l ($l = 0, \ldots, k$) и потребовать, чтобы полученное соотношение было тождеством относительно du^i. В результате мы получим соотношения (7.4). Следовательно, плоскость (7.4) представляет пучок алгебраических гиперповерхностей порядка r, имеющих с поверхностью (M) k-касание.

Из (7.4) следует, что

$$R\left(t^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{j_1 \cdots j_k}\right) \tag{7.7}$$

является проективно-дифференциальным инвариантом поверхности. Число (7.7) в общем случае равно

$$\min\left(C^k_{n+r},\ C^k_{a+k}\right). \tag{7.8}$$

Только для частных классов поверхностей ранг (7.7) меньше последнего числа.

Пусть k — наибольшее число, для которого

$$C^r_{n+r} - C^k_{a+k} - 1 \equiv N > 0. \tag{7.9}$$

Такое k для произвольно заданных $n > 1$, a и r всегда существует. В этом случае система (7.4) определяет пучок алгебраических гиперповерхностей размерности N. Если $N = 0$, то существует единственная гиперповерхность порядка r, которая имеет с поверхностью k-касание.

Система уравнений пучка k-касательных гиперповерхностей пишется в виде

$$R\begin{pmatrix} x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_r} \\ t^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{j_1 \cdots j_k} \end{pmatrix} = C^k_{a+k}. \tag{7.10}$$

Следует иметь в виду, что не для каждого n и a уравнение $N = 0$ имеет решение. Например, для $n = 3$, $a = 2$, $r > 1$ оно не имеет решения. Это означает, что в трехмерном пространстве для поверхностей касательные алгебраические поверхности порядка r обычно определяются неоднозначно. В общем случае о решении уравнения $N = 0$ автору ничего не известно.

4. Поверхности $E(nar)$. Предположим, что k— наименьшее число, для которого

$$N<0. \tag{7.11}$$

Как и в случае (7.9), такое k всегда существует. В этом случае ранг (7.7) равен C^r_{n+r} и, следовательно, поверхность, вообще говоря, не обладает k-касательной алгебраической гиперповерхностью порядка r. Но можно требовать, чтобы ранг (7.7), при наличии условия (7.11), был равен $C^r_{n+r}-1$. Это требование приводит нас к интересным классам поверхностей, которые удобно обозначить через $E(nar)$. Таким образом, поверхности $E(nar)$ характеризуются тем свойством, что они обладают единственной (возможно выродженной) k-касательной алгебраической гиперповерхностью порядка r, тогда как обычно a-мерная поверхность в n-мерном пространстве не имеет такой касательной алгебраической гиперповерхностью.

k-касательная алгебраическая гиперповерхность поверхности $E(nar)$ определяется уравнением

$$R\begin{pmatrix} x^{\alpha_1}\dots x^{\alpha_r} \\ t^{\alpha_1}_{j_1\dots j_k} \end{pmatrix}=C^r_{n+r}-1. \tag{7.12}$$

Здесь когда обращается в нуль минор с первой строкой, то получается уравнение алгебраической гиперповерхности, а все обращенные в нуль миноры, в которых первая строка не участвует, характеризуют поверхность $E(nar)$. Таким образом система (7.12), с одной стороны, дает уравнение k-касательной алгебраической гиперповерхности, а с другой стороны, является характеризующим условием для поверхности $E(nar)$.

Для поверхностей $E(nar)$ возникает другая задача: теоремы существования таких поверхностей. Доказательство этих теорем, хотя и желательно, но не обязательно, ибо любые a-мерные подмногообразия алгебраической гиперповерхности (существование которых не вызывает никакого сомнения) являются частными случаями поверхностей $E(nar)$. Следовательно, существование поверхностей $E(nar)$ также не вызывает сомнения.

5. Введение и обобщение некоторых понятий. В пространствах перенесения Сегре (т. е. в $P_{n(r)}$) естественно возникает много задач для поверхностей (M_r), $r=1, 2, \dots$ Например, все те задачи, которые до сих пор были поставлены и решены для случая $r=1$ (т. е. для a-мерных поверхностей (M) в пространстве P_n), с таким же успехом найдут свои решения и для поверхностей (M_r), $r=2, 3, \dots$ Таким образом, для каждого $r>1$ получается столько результатов, сколько для $r=1$, и все эти результаты относятся к a-мерной поверхности n-мерного пространства. Например, касательные плоскости и их обобщения (k-касательные плоскости) для поверхностей (M_r) привели к k-касательным алгебраическим многообразиям поверхности (M). Точно так же асимптотическое подмногообразие поверхности (M_r) (если оно существует) является образом того подмногообразия поверхности (M), по которым касательные ($k=1$) гиперповерхности порядка r имеют касание второго порядка с поверхностью (M). Это понятие также легко обобщается для произвольного k. Подмногообразие поверхности (M), по которому k-касательное алгебраическое многообразие

имеет касание порядка $k+1$, здесь называется *r-асимптотическим многообразием порядка k*. При $k=r=1$ оно совпадает с обычным асимптотическим подмногообразием поверхности (M). r-асимптотические многообразия порядка k на поверхности (M) определяются дифференциальными уравнениями

$$(7.13) \qquad R\begin{pmatrix} t^{\alpha_1}_{j_1 \ldots j_k} & \\ t^{\alpha_1}_{i_1 \ldots i_{k+1}} du^{i_1} \ldots du^{i_{k+1}} \end{pmatrix} = \min(C^k_{n+k},\ C^r_{n+r}-1).$$

На поверхности (M_r) могут быть также обобщены понятия сопряженных направлений и вообще схемы трилинейной формы, на котором мы здесь останавливаться не будем.

6. *k-касательное алгебраическое многообразие.* Система уравнений (7.10) определяет некоторое алгебраическое многообразие, которое обозначается через $Q_r(na)$ и представляет пересечение алгебраических гиперповерхностей порядка r. При заданных n, a и r число k есть наибольшее число, удовлетворяющее условию (7.9). Поэтому многообразие $Q_r(na)$ имеет наибольшую размерность. Для различных порядков $r_1, r_2, \ldots, r_h$ получаются различные многообразия $Q_{r_1}(na) \ldots Q_{r_h}(na)$. Пересечение всех этих многообразий дает некоторое новое алгебраическое многообразие, которое обозначается через $Q_{r_1 \ldots r_h}(na)$. Например, $Q_1(32)$ представляет касательную плоскость, а $Q_{12}(32)$ — пару асимптотических касательных.

Многообразие $Q_{r_1 \ldots r_h}(na)$ изучается методами алгебраической геометрии и каждое его алгебро-геометрическое свойство влечет за собой дифференциально-геометрическое свойство самой поверхности (M), и наоборот. Например, в $Q_{12}(32)$ совпадение двух прямых приводит к развертывающимся поверхностям, а их ортогональность — к минимальным поверхностям.

7. *Дифференциально-геометрическая характеристика алгебраических многообразий.* Вообще говоря, линейная оболочка поверхности (M_r) совпадает со всем пространством $P_{n(r)}$. Но для некоторых классов поверхностей (M) эта оболочка может быть подпространством пространства $P_{n(r)}$. В первоначальном n-мерном пространстве этому факту соответствует такая поверхность (M), которая целиком принадлежит некоторому алгебраическому многообразию (прообразу подпространства $P_{n(r)}$). Неподвижность k-касательной плоскости поверхности (M_r) характеризуется условием

$$(7.14) \qquad R\left(t^{\alpha_1}_{j_1 \ldots j_{k+1}} \right) = C^k_{n+k},$$

которое и есть условие принадлежности поверхности (M) алгебраическому многообразию. Если размерность последнего многообразия совпадает с размерностью поверхности (M), то условие (7.14) является дифференциально-геометрической характеристикой этого алгебраического многообразия.

8. *Примеры.* Приведем некоторые примеры из трехмерного пространства. (1) Дифференциально-геометрическая характеристика кривой

второго порядка пишется в виде $R\left(t^{a_1a_2}_{j_1\ldots j_5}\right)=5;\ a=0,1,2;\ j=0,1$. (2). Пространственная кривая принадлежит поверхности второго порядка тогда и только тогда, когда $R\left(t^{a_1a_2}_{j_1\ldots j_9}\right)=9;\ a=0,1,2,3;\ j=0,1$. (3) Пространственная кривая является кривой четвертого порядка (пересечением двух квадрик) тогда и только тогда, когда $R\left(t^{a_1a_2}_{j_1\ldots j_8}\right)=8$. (4) Поверхность $E(322)$ характеризуется одним уравнением $R\left(t^{a_1a_2}_{j_1\ldots j_3}\right)=9$, а поверхность второго порядка — условием $R\left(t^{a_1a_2}_{j_1\ldots j_4}\right)=9$.

§ 8. К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ГРАССМАНОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Здесь рассматривается a-параметрическое семейство d-мерных плоскостей n-мерного пространства. Так как такое семейство представляется a-мерной поверхностью на грассмановом многообразии, то дифференциальная геометрия этого семейства сводится к дифференциальной геометрии поверхностей на грассмановом многообразии. Но тут возникает задача другого характера; k-касательные плоскости этой поверхности представляют k-касательные линейные многообразия d-мерных плоскостей, геометрия (аналитическая) которых, насколько мне известно, полностью не разработана, а без такой геометрии о полноценной дифференциальной геометрии семейства плоскостей не может быть и речи.

Линейные многообразия прямых (демиквадрика, линейная конгруэнция и линейный комплекс) трехмерного пространства хорошо исследованы. Работа [8] автора посвящена полному исследованию линейных многообразий прямых и плоскостей четырехмерного пространства (задача Ф. Клейна). В работах [5] — [6] автора эта теория нашла приложение в дифференциальной геометрии семейств прямых и плоскостей этого пространства. В настоящее время у автора появился ряд общих результатов по аналитической геометрии для любого d и n. В [2] дано небольшое приложение этой теории в дифференциальной геометрии.

В этом параграфе вкратце дадим схему трилинейной формы и аналитические и геометрические характеристики некоторых классов семейств плоскостей. Пусть

$$Kt^{a_0\ldots a_d}\quad (a=0\ldots n) \tag{8.1}$$

являются грассмановыми координатами d-мерной плоскости, т. е.

$$\delta^{\beta_0\ldots\beta_{d+1}}_{\gamma_0\ldots\gamma_{d+1}}\, t^{a_1\ldots a_d\gamma_0}\, t^{\gamma_1\ldots\gamma_{d+1}}=0,\quad a,\beta,\gamma=0,1,\ldots,n. \tag{8.2}$$

Система (8.2) представляет грассманово многообразие размерности

$$\varrho=(d+1)(n-d) \tag{8.3}$$

в пространстве размерности

$$N=C^{d+1}_{n+1}-1.$$

Порядок этого многообразия, как известно (см. [9]), равен

$$g=\frac{1!\,2!\dots d!\,\varrho!}{(n-d)!\dots n!}. \tag{8.4}$$

k-касательная плоскость a-мерной поверхности в тангенциальных координатах запишется в виде

$$t^{a_0\dots a_d}_{j_1\dots j_k}\,T_{a_0\dots a_d}=0. \tag{8.5}$$

В общем случае (т. е. для не W семейств) она имеет размерность

$$C^k_{a+k}-1. \tag{8.6}$$

Трилинейная форма дифференциальной окрестности порядка $k+1$ запишется в виде

$$\Phi_{k+1}\quad\frac{1}{(d+1)!k!}\,A^{r_0\dots r_d}_{j_1\dots j_k i}\,x^{i_1\dots i_k}\,T_{r_0\dots r_d}\,du^i, \tag{8.7}$$

где

$$A^{r_0\dots r_d}_{j_1\dots j_k i}=\frac{1}{(d+1)!}\,t^{a_0\dots a_d}_{j_1\dots j_k i}\,e^{r_0\dots r_d}_{a_0\dots a_d},\ i=1\dots a;\ j=0\dots a, \tag{8.8}$$

а величины e однозначно определяются из

$$e^{r_0\dots r_d}_{s_0\dots s_d}=\delta^{r_0\dots r_d}_{s_0\dots s_d};\quad t^{a_0\dots a_d}_{j_1\dots j_k}\,e^{r_0\dots r_d}_{a_0\dots a_d}=0. \tag{8.9}$$

В формулах (8.7) — (8.9) перестановки $(r_0\dots r_d)$ и $(s_0\dots s_d)$ по меньшей мере одним числом отличаются от первых C^k_{a+k} перестановок $(a_0\dots a_d)$, если последние перестановки имеют лексикографическое расположение.

Схема трилинейной формы для семейства ничем не отличается от схемы трилинейной формы поверхностей. Но здесь геометрия гораздо богаче, ибо каждый геометрический факт интерпретирует некоторую геометрическую конструкцию из первоначального пространства. В частности, здесь

$$R\left(A^{r_0\dots r_d}_{\underline{i}_1\dots \underline{i}_k i}\right)=C^k_{a+k-1}-s$$

характеризуют семейства $F^{(k)}_s$,

$$R\left(A^{r_0\dots r_d}_{i_1\dots i_k \underline{i}}\right)=a-s$$

характеризуют семейства $T^{(k)}_s$ и, наконец,

$$R\left(A^{\underline{r}_0\dots \underline{r}_d}_{i_1\dots i_k i}\right)=C^k_{a+k}-1-s$$

характеризуют семейства $W^{(k)}_s$.

Условием

$$R\left(t^{\underline{a}_0\dots \underline{a}_d}_{j_1\dots j_{k+1}}\right)=\min\left(N+1,\ C^k_{a+k}\right)-s$$

характеризуем семейство, которое целиком принадлежит линейным многообразиям d-мерных плоскостей. Такое семейство обозначается через $LW^{(k)}_s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян, С. Е. Доклады третьей сибирской конференции по математике и механике. ИТУ, Томск, 1964, 191—194.
2. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 3, 1963, 3—22.
3. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 5, 1964, 3—22.
4. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (III). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 1, 1964, 3—21.
5. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 2, 1962, 25—43.
6. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 3, 1962, 17—28.
7. Карапетян, С. Е. Матричные алгебраические многообразия. Известия (Сборник научных трудов Арм. ЗПИ), № 4, 1964, 147—158.
8. Карапетян, С. Е. Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного пространства. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 1, 1962, 53—72.
9. В. Ходж, Д. Пидо. Методы алгебраической геометрии, т. I. II, III, Москва, 1954.
10. Blaschke, W. Sulla geometria proiettivo differenziale delle Superficie S_2 nello spazio S_4. Ann. di Mat., Ser. IV, 28, 1949, 205—209.

Поступила 4. XII. 1967 г.

ВЪРХУ МНОГОМЕРНАТА ПРОЕКТИВНО-ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ

С. Е. Карапетян

(Резюме)

В комплексното проективно пространство P_n се разглежда a-мерна повърхнина. Нека

$$T_{(0)} \subset \cdots \subset T_{(k)} \subset \cdots \subset P_n$$

е верига на последователните допирателни пространства в разглежданата точка от повърхността. В общия случай

$$\dim(T_{(k)}) = \inf\left\{\binom{a+k}{k} - 1, n\right\}.$$

Нека по-нататък $x \in T_{(k-1)}$ е произволна точка. Съвкупността на всички външни произведения $dx \wedge T_{(k)}$ за всички x и за всички диференциали образува фактора-пространството $T_{(k+1)}/T_{(k)}$.

Доказва се, че ако $x \in T_{(k-1)}$, то $dx \wedge T_{(k)}$.

Съвкупността на всички диференциали образува ново $(a-1)$-мерно проективно пространство P_{a-1}. Произведението $dx \wedge T_{(k)}$ установява проективно съответствие между двете проективни пространства $T_{(k)}/T_{(k-1)} \otimes P_{a-1}$ и $T_{(k+1)}/T_{(k)}$.

Това съответствие се определя от уравнението (вж. (3.6))

$$\Phi_{k+1}(x\, du\, T) = 0$$

(където $T_k \subset$ хиперравнина T), т. е. от хиперравнина в пространството

$$T_{(k)}/T_{(k-1)} \otimes T_{(k+1)}/T_{(k)} \otimes P_{a-1}.$$

По-нататък се изучават особеностите на това съответствие. По такъв начин във всяко от тези три пространства се определят две инвариантни алгебрични многообразия (всичко шест такива многообразия).

Намерен е броят на измеренията на тези многообразия (вж. първата основна теорема, § 5). По-нататъшното изучаване на това съответствие води до проективно-диференциална класификация на разглежданите повърхнини (вж. втората основна теорема, § 6).

В § 7 тази схема се разпростира върху подмногообразията, които принадлежат на многообразието на Сегре. За такива подмногообразия тави схема води до алгебрични многообразия, допирането на които с нашата повърхнина е от ред k. Намерено е условието, при което нашата повърхнина има във всяка точка една единствена k-допирателна хиперповърхина от ред r. По-нататък е намерено условието, при което нашата повърхина принадлежи (локално) на някое алгебрично многообразие. Въз основа на това се дава по-нататъшната класификация на повърхнините.

В края на работата схемата на трилинейната форма се разпростира върху подмногообразия, които принадлежат на многообразието на Грасман $\Omega(d, n)$.

Тук всяка $T_{(k)}$ представлява (k-допирателно към a-семейство) линейно многообразие на d-мерни равнини.

По такъв начин схемата на трилинейната форма води до диференциално-геометрична класификация на a-параметричното семейство на d-мерните равнини.

ON THE MANY-DIMENSIONAL PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY

S. E. Karapetyan

(Summary)

In the complex projective space P_n an a-dimensional surface is considered. Let

$$T_{(0)} \subset \cdots \subset T_{(k)} \subset \cdots \subset P_n$$

be a chain of the consequent tangential spaces in the considered point of the surface In the general case

$$\dim(T_{(k)}) = \inf\left\{\binom{a+k}{k} - 1,\ n\right\}.$$

Let further $x \in T_{(k-1)}$ be an arbitrary point. The set of all exterior products $dx \wedge T_{(k)}$ for all x and for all differentials forms the factor space $T_{(k+1)}/T_{(k)}$.

It is proved that if $x \in T_{(k-1)}$, then $dx \wedge T_{(k)}$.

The set of all differentials forms a new $(a-1)$-dimensional projective space P_{a-1}. The product $xd \wedge T_{(k)}$ establishes a projective correspondence between the two projective spaces $T_{(k)}/T_{(k-1)} \otimes P_{a-1}$ and $T_{(k+1)}/T_{(k)}$.

This correspondence is determined by the equation (see (3.6))

$$\Phi_{k+1}(x\, du\; T)=0,$$

(where $T_k \subset$ hyperplane T), i. e. by a hyperplane in the space

$$T_{(k)}/P_{(k-1)} \otimes T_{(k+1)}/T_{(k)} \otimes T_{a-1}.$$

The singularities of this correspondence are studied further on. Thus, in each of these three spaces are determined 2 invariant algebraic manifolds (in all six such manifolds).

The dimensions of these manifolds are found (see the first basic theorem, § 5). Further study of this correspondence leads to a projective-differential classification of the considered surfaces (see the second basic theorem, § 6).

In § 7 this scheme is extended over the manifolds, which belong to Segre's manifold. For such submanifolds this scheme leads to algebraic manifolds, whose contact with our surface is of the order k. The condition is found under which our surface has in each point a unique k-tangential hypersurface of the order r. Further on is found the condition under which our surface belongs (locally) to some algebraic manifold. On that basis the further classification of the surfaces is given.

At the end of the paper the scheme of the three-linear form is extended over submanifolds, which belong to the Grassman's manifold $\Omega(d, n)$.

Here each $T_{(k)}$ represents a linear manifold of d-dimensional planes (k-tangential to an a-family).

Thus the scheme of the three-linear form leads to a differential-geometrical classification of the a-parametric family of the d-dimensional planes.