БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

КОНГРУЕНЦИИ ПРАВИ В ТРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО С АБСОЛЮТ ДВЕ РЕАЛНИ РАВНИНИ И ДВЕ РЕАЛНИ ТОЧКИ ВЪРХУ ТЯХНАТА ПРЕСЕЧНИЦА

Адриян В. Борисов

Настоящата работа е посветена на диференциалната геометрия на конгруенциите прави в тримерното пространство A_2^2 с абсолют две реални равнини ε_3, ε_4 и две реални точки E_3, E_4 върху тяхната пресечница. В § 1 построяваме каноничен репер, еднозначно свързан с всяка права от дадената конгруенция прави. В § 2 третираме въпроса за налагане на две конгруенции.

§ 1. КАНОНИЧЕН РЕПЕР НА КОНГРУЕНЦИИ ПРАВИ

Ще използваме подвижни репери $A_1A_2A_3A_4$, притежаващи свойствата: върховете A_3 и A_4 съвпадат с абсолютните точки E_3, E_4, а A_2 се намира в полярната равнина Π на A_1 относно изродената повърхнина от втора степен $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ [2]. Спрямо така избраните репери абсолютните равнини имат уравнения $\varepsilon_3: \ x_1-x_2=0, \varepsilon_4: \ x_1+x_2=0$, а абсолютната права $l: \ x_1=x_2=0$. Произволна колинеация, запазваща абсолюта на пространството A_2^2, има вида

$$\begin{aligned}
\varrho x_1&=a_1^1x_1+a_1^2x_2,\\
\varrho x_2&=a_1^2x_1+a_1^1x_2,\\
\varrho x_3&=a_3^1x_1+a_3^2x_2+a_3^3x_3,\\
\varrho x_4&=a_4^1x_1+a_4^2x_2+a_4^4x_4.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Групата G_2^2 на посочения тип колинеации в A_2^2 е седемпараметрична. Инфинитезималните преобразувания на върховете на репера са

$$dA_i=\omega_i^jA_j, \quad i=1,2,3,4.\tag{1.2}$$

От равенствата

$$dA_3\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ A_3), \quad dA_4\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ A_4),$$

$$d\varepsilon_3\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varepsilon_3), \quad d\varepsilon_4\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varepsilon_4),$$

осигуряващи инвариантността на абсолюта на пространството A_2^2, получаваме

$$
(1.2') \qquad \begin{aligned} &\omega_3^1=\omega_3^2=\omega_3^4=0, \quad \omega_4^1=\omega_4^2=\omega_4^3=0,\\ &\omega_1^1-\omega_2^2=0, \qquad\quad \omega_1^2-\omega_2^1=0. \end{aligned}
$$

Като диференцираме външно (1.2) и заместим (1.2'), получаваме структурните уравнения на пространството A_2^2:

$$
(1.3) \qquad \begin{aligned} &D\omega_1^1=0, \quad D\omega_1^2=0, \quad D\omega_3^3=0, \quad D\omega_4^4=0,\\ &D\omega_1^3=[\omega_1^1-\omega_3^3, \omega_1^3]+[\omega_1^2\omega_2^3],\\ &D\omega_1^4=[\omega_1^1-\omega_4^4, \omega_1^4]+[\omega_1^2\omega_2^4],\\ &D\omega_2^3=[\omega_1^1-\omega_3^3, \omega_2^3]+[\omega_1^2\omega_1^3],\\ &D\omega_2^4=[\omega_1^1-\omega_4^4, \omega_2^4]+[\omega_1^2\omega_1^4]. \end{aligned}
$$

Да означим с $M_2=M_2(u,v)$ произволна конгруенция в A_2^2. От реперите, описани по-горе, ще разгледаме онези, за които върховете A_1, A_2 са точки от произволна права $p\in M_2$ [3]. Такива репери ще наричаме репери от нулев ред. Диференцираме аналитичната права $p=(A_1A_2)$, съответствуваща на геометричната права $p=A_1A_2$. Получаваме

$$
(1.4) \qquad d(A_1A_2)=2\omega_1^1(A_1A_2)+\omega_2^3(A_1A_3)+\omega_2^4(A_1A_4)-\omega_1^3(A_2A_3)-\omega_1^4(A_2A_4).
$$

Нека правата p е неподвижна. Тогава $du=dv=0$ и диференциалът $d(A_1A_2)$ е пропорционален на (A_1A_2). Така от (1.4) получаваме

$$
(1.4') \qquad \omega_1^3=\omega_1^4=\omega_2^3=\omega_2^4=0.
$$

Обратно, ако са изпълнени (1.4'), $d(A_1A_2)=2\omega_1^1(A_1A_2)$ и следователно правата A_1A_2 е неподвижна, т. е. $du=dv=0$. От горните разсъждения заключаваме, че при подвижна права p формите

$$
(1.4'') \qquad \omega_1^3, \ \omega_1^4, \ \omega_2^3, \ \omega_2^4
$$

зависят само от диференциалите на параметрите u, v, които наричаме главни параметри. Формите (1.4'') наричаме главни диференциални форми от нулев ред. Тъй като базисът им се състои от двете независими форми du, dv, между тях съществуват две линейни съотношения, които написваме във вида

$$
(1.5) \qquad \omega_1^3=a\omega_1^4+b\omega_2^4, \quad \omega_2^3=b'\omega_1^4+c\omega_2^4,
$$

като a, b, b', c зависят от главните и вторичните параметри. Това означава, че за нов базис избираме формите ω_1^4, ω_2^4.

Нека u, v са функции на някакъв параметър t. Получаваме еднопараметрична съвкупност от прави $M_1=M_1(t)$, която наричаме рой прави M_1, принадлежащ на конгруенцията M_2. Произволна точка M от правата $p=(A_1A_2)$ има представянето

$$
M=\lambda A_1+\mu A_2.
$$

Когато параметърът t се мени, точката M описва крива линия c: $M=M(t)$. Ще разгледаме онези роеве $M_1 \in M_2$, за които във всяка точка M кривата c има за допирателна правата p. Такива роеве ще наричаме развиваеми. От определението на развиваем рой е ясно, че dM трябва да бъде линейна комбинация само на A_1, A_2. От

$$dM=(d\lambda+\lambda\omega_1^1+\mu\omega_1^2)A_1+(d\mu+\mu\omega_1^1+\lambda\omega_1^2)A_2+(\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3)A_3+(\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4)A_4$$

получаваме равенствата

$$\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3=0, \quad \lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4=0, \tag{1.6}$$

които съобразно с (1.5) приемат вида

$$\begin{aligned}(a\lambda+\mu b')\omega_1^4+(b\lambda+c\mu)\omega_2^4=0,\\ \lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4=0.\end{aligned} \tag{1.6'}$$

Интересуват ни нетривиалните решения на системата (1.6′) за ω_1^4, ω_2^4, за което е необходимо и достатъчно

$$-b\lambda^2+(a-c)\lambda\mu+b'\mu^2=0. \tag{1.7}$$

На всяко решение на (1.7) върху правата p съответствува точка M с исканото свойство, която ще наричаме фокус на правата. Когато u, v се менят, фокусът описва повърхнина, която ще наричаме фокална.

Нека върховете A_1 и A_2 на репера са фокуси. Тогава от (1.7) получаваме

$$b=b'=0. \tag{1.8}$$

Фокалните повърхнини, описани от фокусите A_1 и A_2, ще наричаме съответно първа и втора.

Уравнението

$$-b'(\omega_1^4)^2+(a-c)\omega_1^4\omega_2^4+b(\omega_2^4)^2=0 \tag{1.7'}$$

определя развиваемите роеве на конгруенцията. То ни позволява да направим една естествена класификация на конгруенциите в A_2^2.

Ще продължим разглеждането само за двуфокусните конгруенции. За тях сигурно

$$a-c\neq 0. \tag{1.8'}$$

От (1.5) и (1.8) получаваме

$$\omega_1^3=a\omega_1^4, \quad \omega_2^3=c\omega_2^4. \tag{1.9}$$

Като диференцираме външно (1.9) и приложим известната лема на Картан, получаваме

$$\begin{aligned}da+a(\omega_3^3-\omega_4^4)=x_1\omega_1^4+x_2\omega_2^4,\\ (a-c)\omega_1^2=x_2\omega_1^4+x_3\omega_2^4,\\ dc+c(\omega_3^3-\omega_4^4)=-x_3\omega_1^4-x_4\omega_2^4.\end{aligned} \tag{1.10}$$

При изменение само на вторичните параметри, т. е. при фиксирана права p, ще използваме символа за диференциране δ, а съответните стойности на ω_i^j ще означаваме с π_i^j. От (1.10) при фиксирана права p получаваме

$$\delta a + a(\pi_3^3 - \pi_1^1) = 0,$$

$$(1.10') \qquad (a-c)\pi_1^2 = 0,$$

$$\delta c + c(\pi_3^3 - \pi_4^4) = 0.$$

Равенствата (1.10′) показват как се менят величините a, c при изменение само на вторичните параметри. От тях виждаме, че можем да изберем така тези параметри, че $a = 1$. От

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^4(aA_3 + A_4)$$

следва, че изборът $a = 1$ геометрически означава, че единичната точка $A_3 + A_4$ на проективната координатна система върху абсолютната права l се поставя в допирателната равнина в точката A_1 към първата фокална повърхнина. Сега всички точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_3 + A_4$ са инвариантно свързани с конгруенцията M_2. Репера, който се определя от тях, ще наричаме п о л у к а н о н и ч е н.

От (1.9), (1.10), (1.10′) и $a = 1$ получаваме

$$(1.11) \qquad \omega_1^3 = \omega_1^4, \quad \omega_2^3 = c\omega_2^4;$$

$$\omega_3^3 - \omega_4^4 = x_1\omega_1^4 + x_2\omega_2^4,$$

$$(1.11') \qquad (1-c)\omega_1^2 = x_2\omega_1^4 + x_3\omega_2^4,$$

$$dc + c(\omega_3^3 - \omega_4^4) = -x_3\omega_1^4 - x_4\omega_2^4;$$

$$(1.11'') \qquad \pi_3^3 - \pi_4^4 = 0, \quad \pi_1^2 = 0, \quad \delta c = 0.$$

Формите $\omega_3^3 - \omega_4^4$ и ω_1^2 стават също главни и ще ги наричаме главни форми от първи ред. Инвариантата c е единствена инварианта от първи ред и ще я наричаме к р и в и н а н а к о н г р у е н ц и я т а.

Като диференцираме външно (1.11′), използваме (1.10) и приложим лемата на Картан, получаваме

$$dx_1 + x_1(\omega_1^1 - \omega_4^4) + x_2\omega_1^2 = y_1\omega_1^4 + y_2\omega_2^4,$$

$$dx_2 + x_2(\omega_1^1 - \omega_4^4) + x_1\omega_1^2 = y_2\omega_1^4 + y_3\omega_2^4,$$

$$(1.12') \qquad dx_2 + x_2(\omega_1^1 - \omega_4^4) + (cx_1 + 2x_3)\omega_1^2 = z_1\omega_1^4 + z_2\omega_2^4,$$

$$dx_3 + x_3(\omega_1^1 - \omega_4^4) + ((c+1)x_2 + x_4)\omega_1^2 = z_2\omega_1^4 + z_3\omega_2^4,$$

$$dx_3 + x_3(\omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + x_4\omega_1^2 = u_1\omega_1^4 + u_2\omega_2^4,$$

$$dx_4 + x_4(\omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + x_3\omega_1^2 = u_2\omega_1^4 + u_3\omega_2^4.$$

При неподвижна права p от (1.12) получаваме

$$
\begin{aligned}
&\delta x_1+x_1(\pi_1^1-\pi_4^4)=0,\\
(1.12')\qquad &\delta x_2+x_2(\pi_1^1-\pi_4^4)=0,\\
&\delta x_3+x_3(\pi_1^1-\pi_4^4)=0,\\
&\delta x_4+x_4(\pi_1^1-\pi_4^4)=0.
\end{aligned}
$$

Остават ни да направим още две нормировки. От (1.12') се вижда, че те могат да бъдат направени по различен начин. Избираме така вторичните параметри, че $x_4=1$. Тогава

$$(1.13)\qquad \omega_1^1+\omega_3^3-2\omega_4^4+x_3\omega_1^2=u_2\omega_1^4+u_3\omega_2^4,$$

$$(1.13')\qquad \pi_1^1-\pi_4^4=0.$$

Формата $\omega_1^1+\omega_3^3-2\omega_4^4+x_3\omega_1^2$ е нова главна форма от втори ред. Предполагаме още, че

$$(1.14)\qquad (A_1A_2A_3A_4)=1,$$

откъдето

$$(1.14')\qquad 2\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4=0$$

$$(1.14'')\qquad 2\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_4^4=0.$$

От (1.11''), (1.13') и (1.14'') получаваме

$$\pi_1^1=\pi_3^3=\pi_4^4=0.$$

Сега вече всички форми π_i^j станаха нули, откъдето $\delta A_i\neq 0$, $i=1,2,3,4$, и следователно каноничният репер е построен. От (1.12) извеждаме връзките

$$
\begin{aligned}
&y_2=z_1+x_1x_2-2\,\frac{x_2x_3}{1-c},\\
&y_3=z_2+x_1x_3-2\,\frac{x_3^2}{1-c},\\
(1.15)\qquad &z_2=u_1-x_1x_3+\frac{c+1}{1-c}\,x_2^2,\\
&z_3=u_2+\frac{2c}{1-c}\,x_2x_3.
\end{aligned}
$$

За получените инварианти въвеждаме означенията

$$x_1=\alpha,\quad x_2=\beta,\quad x_3=\gamma,\quad c=\lambda,\quad u_2=\mu,\quad u_3=\nu.$$

Всички форми ω_i^j се изразяват само чрез двете базисни форми ω_1^4, ω_2^4 и посочените инварианти. От (1.11), (1.11'), (1.13) и (1.14') получаваме

$$\omega_1^1=\frac{1}{4}\left(2\mu-3\alpha-2\,\frac{\beta\gamma}{1-\lambda}\right)\omega_1^4+\frac{1}{4}\left(2\nu-3\beta-2\,\frac{\gamma^2}{1-\lambda}\right)\omega_2^4,$$

$$
(1.16)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_1^2=\frac{\beta}{1-\lambda}\,\omega_1^4+\frac{\gamma}{1-\lambda}\omega_2^4,\quad \omega_1^3=\omega_1^4,\quad \omega_2^3=\lambda\omega_2^4,\\
&\omega_3^3\quad\frac{1}{4}\left(\quad 2\mu\quad 5\alpha\quad 2\,\frac{\beta\gamma}{1-\lambda}\right)\omega_1^4+\frac{1}{4}\left(-2\nu+5\beta+2\,\frac{\quad}{1-\lambda}\right)\omega_2^1,\\
&\omega_4^4=\frac{1}{4}\left(-2\mu+\alpha+2\,\frac{\beta\gamma}{1-\lambda}\right)\omega_1^4+\frac{1}{4}\left(-2\nu+\beta+2\,\frac{\gamma^2}{1-\lambda}\right)\omega_2^1.
\end{aligned}
$$

Въвеждаме инвариантните производни $\alpha_{,1}, \alpha_{,2}, \ldots, \nu_{,2}$, определени с равенствата

$$
(1.17)\qquad
\begin{aligned}
&d\alpha=\alpha_{,1}\omega_1^4+\alpha_{,2}\omega_2^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d\nu=\nu_{,1}\omega_1^4+\nu_{,2}\omega_2^4.
\end{aligned}
$$

Структурните уравнения (1.3) на пространството A_2^2 налагат на инвариантите $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ връзките

$$
(1.18)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_{,2}-\beta_{,1}=0,\\
&\beta_{,2}-\gamma_{,1}=0,\\
&(1-\lambda)\lambda_{,1}-\lambda(1-\lambda)(\mu-2\alpha)+\gamma(\lambda\beta+1)=0,\\
&(1-\lambda)^2(\mu_{,2}+\nu_{,1})+(1-\lambda)(-\gamma\beta_{,2}+2\gamma\gamma_{,1}-\beta\gamma_{,2})+\gamma(\gamma\lambda_{,1}-\beta\lambda_{,2})=0.
\end{aligned}
$$

Да направим едно приложение на изведените формули. Формите ω_i^j посредством (1.16) се определят от шестте функции $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$. За тях обаче имаме четирите уравнения (1.18). Следователно две функции остават съвършено произволни. Тогава:

Произволна конгруенция в A_2^2 зависи от две произволни функции на два аргумента.

§ 2. НАЛАГАНЕ НА КОНГРУЕНЦИИ

Налагането на конгруенциите в A_2^2 се въвежда напълно аналогично на това в проективното [1] и в двуосното пространство [4].

Ще казваме, че конгруенцията $\bar{M}_2$ се налага върху конгруенцията M_2 в A_2^2 от ред n в смисъл на Картан, ако между техните прави е установено взаимно еднозначно съответствие и на всяка двойка съответни прави $p=(A_1A_2)$ и $\bar{p}=(\bar{A}_1\bar{A}_2)$ е присъединена колинеация (1.1), която преобразува конгруенцията $\bar{M}_2$ в конгруенция M_2^* така, че

1) правите $p^*=(A_1^*A_2^*)$ и $p=(A_1A_2)$ съвпадат;

2) всички прави, принадлежащи на техните диференциални околности от n-ти ред, също съвпадат.

Ние ще разгледаме налагане от първи и втори ред. За безкрайно малки от първи ред приемаме нарастванията на координатите на конгруенцията при прехода от правата A_1A_2 към правата A_1+dA_1, A_2+dA_2. Съгласно определението, за да имаме налагане от втори ред, трябва да бъде изпълнено където ϱ е скаларна функция на u, v, а ϱ_1 и ϱ_2 са съответно линейна и квадратна форма на du, dv.

От (2.1), като приравним безкрайно малките от един и същи ред, получаваме

$$(2.2_1) \qquad (A_1^* A_2^*) = \varrho (A_1 A_2),$$

$$(2.2_2) \qquad d(A_1^* A_2^*) = \varrho_1 (A_1 A_2) + \varrho d(A_1 A_2);$$

$$(2.2_3) \qquad d^2(A_1^* A_2^*) = \varrho_2 (A_1 A_2) + 2\varrho_1 d(A_1 A_2) + \varrho d^2(A_1 A_2).$$

С всяка права $p = (A_1 A_2)$ от конгруенцията M_2 свързваме полуканоничен репер $A_1 A_2 A_3 A_4$, а с всяка права $p = (\overline{A}_1 \overline{A}_2)$ от конгруенцията $\overline{M}_2$ — репер $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4$, който след преобразуването (1.1) съвпада с $A_1 A_2 A_3 A_4$. За репера $A_1 A_2 A_3 A_4$ са в сила формулите, изведени в § 1 за полуканоничен репер. Инфинитезималните преобразувания на двата репера определяме съответно с

$$(2.3) \qquad dA_i = \omega_i^j A_j, \quad d\overline{A}_i = \omega_i^j A_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Диференциалните форми ω_α^β не зависят от (1.1) и можем да считаме, че

$$dA_i^* = \omega_i^j A_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Да разгледаме най-напред първото равенство (2.2_1). От него лесно се съобразява, че $\varrho = 1$. Равенството (2.2_2) осигурява налагане от първи ред на двете конгруенции. От него следват

$$(2.4_1) \qquad 2\tilde{\omega}_1^1 = \varrho_1,$$

$$(2.4_2) \qquad \tilde{\omega}_1^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_1^4 = 0, \quad \tilde{\omega}_2^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_2^4 = 0,$$

като сме положили

$$\tilde{\omega}_i^j = \overline{\omega}_i^j - \omega_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Равенството (2.4_1) определя линейната диференциална форма ϱ_1, а (2.4_2) — вида на съответствието между правите на конгруенциите M_2 и $\overline{M}_2$. За конгруенцията $\overline{M}_2$ са в сила формули, аналогични на (1.5):

$$(2.5) \qquad \overline{\omega}_1^3 = \overline{a}\, \overline{\omega}_1^4 + \overline{b}\, \overline{\omega}_2^4, \quad \overline{\omega}_2^3 = \overline{b}'\, \overline{\omega}_1^4 + \overline{c}\, \overline{\omega}_2^4.$$

Тогава от (1.11), (2.4_2) и (2.5) получаваме

$$(2.6) \qquad \overline{a} = 1, \quad \overline{b} = \overline{b}' = 0, \quad \overline{c} = c.$$

Последните равенства показват, че реперът $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4$ е от типа на репера $A_1 A_2 A_3 A_4$ — полуканоничен.

A_1 и A_2 са фосуси на правата $p=(A_1A_2)$, а $(\bar{A}_3+A_4)$ лежи в допирателната равнина към първата фокална повърхнина, описана от $\bar{A}_1$. Съответствуват си и развиваемите роеве на M_2 и $\bar{M}_2$. Следователно (2.4_2) не налагат нови ограничения на $\bar{M}_2$.

Да разгледаме сега налагане от втори ред. Трябва всички равенства (2.2) да бъдат изпълнени. От (2.2_1) и (2.2_2) получихме (2.4_1) и (2.4_2). Остава да разгледаме (2.2_3). От него по аналогичен начин получаваме

$$2(d\tilde{\omega}_1^1+(\tilde{\omega}_1^1)^2)=\varrho_2, \tag{2.7}$$

$$\tilde{\omega}_1^2\omega_1^3+(\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3)\omega_2^3=0, \tag{2.7_1}$$

$$\tilde{\omega}_1^2\omega_1^4+(\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4)\omega_2^4=0, \tag{2.7_2}$$

$$(\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3)\omega_1^3+\tilde{\omega}_1^2\omega_2^3=0, \tag{2.7_3}$$

$$(\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4)\omega_1^4+\tilde{\omega}_1^2\omega_2^4=0. \tag{2.7_4}$$

Като диференцираме външно (2.4_2), получаваме

$$[\tilde{\omega}_1^2\omega_1^3]+[\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3,\ \omega_2^3]=0, \tag{$2.7'_1$}$$

$$[\tilde{\omega}_1^2\omega_1^4]+[\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4,\ \omega_2^4]=0, \tag{$2.7'_2$}$$

$$[\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3,\ \omega_1^3]+[\tilde{\omega}_1^2\ \omega_2^3]=0, \tag{$2.7'_3$}$$

$$[\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4,\ \omega_1^4]+[\tilde{\omega}_1^2\ \omega_2^4]=0. \tag{$2.7'_4$}$$

Решаваме съвместно (2.7_i) и $(2.7'_i)$ и като вземем пред вид (1.11), получаваме

$$\tilde{\omega}_1^2=0,\qquad \tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3=0,\qquad \tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4=0. \tag{2.8}$$

За двата репера въвеждаме нормировките

$$(A_1A_2A_3A_4)=1,\qquad (\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=1, \tag{2.9}$$

от които веднага следва

$$2\tilde{\omega}_1^1+\tilde{\omega}_3^3+\tilde{\omega}_4^4=0. \tag{2.9'}$$

От (2.8) и (2.9') лесно се установява, че $\tilde{\omega}_i^i=0$, $i=1, 2, 3, 4$, и следователно вече всички форми $\tilde{\omega}_i^j$ са нули. Получихме, че $\bar{\omega}_i^j=\omega_i^j$ за i, $j=1, 2, 3, 4$, което означава, че конгруенциите M_2 и $\bar{M}_2$ са еквивалентни. Така доказахме следната

Теорема 1. Ако две конгруенции в A_2^3 са наложими от втори ред, то те са еквивалентни, т. е. след подходяща колинеация (1.1) съвпадат,

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана. Москва, 1948.
2. Станилов, Г. Геометрия одного пространства с фундаментальной семипараметрической группой. Доклады БАН, **20**, № 4, 1967, с. 261—264.
3. Станилов, Г. Геометрия линейчатых многообразий биаксиального пространства. Диссертация. Киев, 1965.
4. Станилов, Г. Двуосно налагане на конгруенции и комплекси прави. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **58**, 1965, с. 95—106.

Постъпила на 11. III. 1969 г.

КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТОМ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ И ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК НА ЛИНИИ ИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Адриян В. Борисов

(*Резюме*)

Пространство A_2^2 определяется двумя действительными плоскостями ε_3, ε_4 и двумя действительными точками E_3, E_4 на линии их пересечения. Используем реперы, введенные Г. Станиловым [2].

Произвольная конгруэнция прямых в A_2^2 обозначаем через $M_2 = M_2(u,v)$. Рассматриваем те реперы нулевого порядка, для которых вершины A_1 и A_2 — точки прямой $p \in M_2$. Развертывающиеся однопараметрические системы прямых конгруэнции M_2 определяются квадратичной формой (1.7′), а фокусы — (1.7). Полуканоническим репером является тот, у которого как точки A_1, A_2 выбраны фокусы конгруэнции, а точка $A_3 + A_4$ лежит на касательной плоскости к первой фокальной поверхности. При помощи специальных нормирований приходим к каноническому реперу.

Наложение двух конгруэнций M_2 и $\bar{M}_2$ определяется (2.2). Если две конгруэнции имеют наложение второго порядка, то они эквивалентны.

GERADENKONGRUENZEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUM, DESSEN ABSOLUTES GEBILDE AUS ZWEI REELLEN EBENEN UND ZWEI REELLEN PUNKTEN AUF DEREN SCHNITTLINIE BESTEHT

Adrian V. Borisov

(Zusammenfassung)

Der Raum A_2^2 wird durch zwei reelle Ebenen ε_3, ε_4 und durch zwei reelle Punkten E_3, E_4 auf ihrer Schnittlinie l bestimmt. Wir benutzen die Reper, welche von G. Stanilow [2] eingeführt worden sind.

Eine beliebige Geradenkongruenz in A_2^2 bezeichnen wir mit $M_2 = M_2(u,v)$. Wir betrachten diejenigen Reper von der nullten Ordnung, deren Koordinateneckpunkte A_1 und A_2 auf der Gerade $p \in M_2$ liegen. Die Torsen der Kongruenz M_2 werden durch die quadratische Form (1.7′), die Brennpunkte durch (1.7) bestimmt. Halbkanonisch ist der Reper, dessen Eckpunkte A_1 und A_2 Brennpunkte der Kongruenz sind und der Punkt $A_3 + A_4$ in der Tangentialebene zur ersten Brennebene liegt. Durch entsprechende Normierungen gelangt man zum kanonischen Reper. Die Grundformeln sind (1.16)

Die Abwicklung zweier Kongruenzen M_2 und $\bar{M}_2$ definiert man durch (2.2). Je zwei Kongruenzen sind abwickelbar von der ersten Ordnung wenn zwei Kongruenzen von der zweiten Ordnung abwickelbar sind, so sind sie äquivalent.