БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADEMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

ЕДНО ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДИНАМИЧНОТО ПРОГРАМИРАНЕ ЗА НАЙ-ДОБРО РАВНОМЕРНО ПРИБЛИЖЕНИЕ

Тодор Р. Гичев

В статията се разглеждат въпроси, свързани с апроксимацията на непрекъснатите функции с полигони и на непрекъснати периодични функции с периодични полигони. Доказват се три апроксимационни теореми и се дава един алгоритъм на динамичното програмиране. Привеждат се и резултати от числено експериментиране на алгоритъма с помощта на машината „Минск-2" при апроксимирането на изпъкнали функции с полигони. Накрая се прави едно приложение за апроксимиране на непрекъсната затворена звездна крива с обобщен спирален многоъгълник.

Тази работа се появи в резултат на численото решаване на задачата за апроксимиране на изпъкнали функции с полигони, поставена от Бл. Сендов на семинара по Теория на апроксимацията.

§ 1

Нека $f(x)$ е една непрекъсната функция в интервала $[c, d]$.

Дефиниция 1. Полигон от ред N в интервала $[c, d]$ се нарича всяко множество от $N+1$ точки $\{(P_0, P_1, \ldots P_N); P_i(x_i, y_i); c=x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N = d\}$ и съединителните отсечки на всеки две съседни точки. Точките P_i се наричат върхове на полигона, а съединителните отсечки — страни.

Дефиниция 2. Полигонът $\varphi(x)$ се нарича вписан за функцията $f(x)$ в интервала $[c, d]$, ако върховете му $P_i(x_i, y_i)$ имат следното свойство: $y_i = f(x_i)$.

С $H_N(f; c, d)$ да означим множеството на полигоните от ред N, които са вписани за функцията $f(x)$ в интервала $[c, d]$.

Ако $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са две непрекъснати функции в интервала $[c, d]$, полагаме

$$\varrho(f_1, f_2) = \max_{c \leq x \leq d} |f_1(x) - f_2(x)|$$

Дефиниция 3. Най-добро равномерно отклонение на функцията $f(x)$ в интервала $[c, d]$ от $H_N(f; c, d)$ се нарича

$$E(f, H_N) = \inf_{\varphi_N \in H_N(f; c, d)} \varrho(f, \varphi_N). \tag{1}$$

Да разделим интервала $[c, d]$ с помощта на множеството

$$X^n=\{(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n): \quad x_i^n \in [c, d], \quad c=x_0^n<x_1^n<\cdots<x_n^n=d\}$$

на n подинтервала $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ с дължина Δ_n^i. Нека $\Delta_n=\max\limits_i \Delta_n^i$.

С $H_N^n(f; c, d)$ да означим множество на тези полигони от $N_N(f; c, d)$, чиито върхове са точки с абсциси, принадлежащи на X^n.

Тогава

$$E^n(f, H_N^n)=\inf_{\varphi_N \in H_N^n(f;\, c,\, d)} \varrho(f, \varphi_N). \tag{2}$$

Дефиниция 4. Редицата $X=\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича апроксимираща за интервала $[c, d]$, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n=0$.

Лема 1. Ако $X=\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ е една апроксимираща за интервала $[c, d]$ редица и $\varphi_N \in H_N(f; c, d)$, съществува редица $\{\varphi_N^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_N^n \in H_N^n(f; c, d)$, за която $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\varphi_N, \varphi_N^n)=0$.

Доказателство. Нека $\varphi_N \in H_N(f; c, d)$ има за върхове точките $\{(A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \ldots, A_q(x_q, y_q)\}$, където $y_i=f(x_i)$, q N и $c=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_q=d$.

Ако n е цяло положително число, конструираме полигон $\varphi_N^n \in H_N^n(f; c, d)$ с върхове $A_i^n(z_i^n, y_i^n)$, където:

за $i=0$ $A_0^n(z_0^n, y_0^n)=A_0(x_0, y_0)$;

за $i=q$ $A_q^n(z_q^n, y_q^n)=A_q(x_q, y_q)$;

за $0<i<q$ z_i^n е най-малкото $x \in X^n$, за което $x_i \leq x$, а $y_i^n=f(x)$.

Нека ε е произволно избрано положително число и n е толкова голямо, че $x_i+\Delta_n<x_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots, (q-1)$. Това е възможно, тъй като редицата X е апроксимираща за интервала $[c, d]$.

Но

$$\varrho(\varphi_N, \varphi_N^n)=\max_{1 \cdot q} \varrho_i(\varphi_N, \varphi_N^n),$$

където

$$\varrho_i(\varphi_N, \varphi_N^n)=\max_{x_{i-1} \leq x} \varphi_N(x)-\varphi_N^n(x)$$

Ако $u_j \in [x_{i-1}, z_{i-1}^n]$ и $v_j \in [x_i, z_i^n]$, $j=1, 2$, да прекараме двете прави, определени с уравненията

$$\eta_j(\xi_j)=\frac{f(u_j)-f(v_j)}{u_j-v_j}(\xi_j-u_j)+f(u_j), \qquad j=1, 2.$$

Но тогава

$$\varrho_i(\varphi_N, \varphi_N^n)\leq \max_{\substack{u_j \in [x_{i-1},\, z_{i-1}^n] \\ v_j \in [x_i,\, z_i^n]}} \max\{\eta_1(x_{i-1})-\eta_2(x_{i-1}) \qquad \eta_1(z_i^n)-\eta_2(z_i^n)\}$$

$$\leq \max_{\substack{u_j\in[x_{i-1},\, x_{i-1}+\Delta_n]\\ v_j\in[x_i,\, x_i+\Delta_n]}} \max\{|\eta_1(x_{i-1})-\eta_2(x_{i-1})|, \quad |\eta_1(z_i^n)-\eta_2(z_i^n)|\};$$

$$|\eta_1(x_{i-1})-\eta_2(x_{i-1})| = \left|\frac{f(u_1)-f(v_1)}{u_1-v_1}(x_{i-1}-u_1)+f(u_1)-\frac{f(u_2)-f(v_2)}{u_2-v_2}(x_{i-1}-u_2)\right.$$

$$\left.-f(u_2)\right|\leq(d-c)\left|\frac{f(u_1)-f(v_1)}{u_1-v_1}-\frac{f(u_2)-f(v_2)}{u_2-v_2}\right|+|f(u_1)-f(u_2)|$$

Аналогично

$$|\eta_1(z_i^n)-\eta_2(z_i^n)|\leq(d-c)\left|\frac{f(u_1)-f(v_1)}{u_1-v_1}-\frac{f(u_2)-f(v_2)}{u_2-v_2}\right|+|f(u_1)-f(u_2)|$$

Но $F(\varphi, \psi)=\frac{f(\varphi)-f(\psi)}{\varphi-\psi}$ е непрекъсната функция за $\varphi\in[x_{i-1}, x_{i-1}+\Delta_n]$ и $\psi\in[x_i, x_i+\Delta_n]$. Следователно когато n е достатъчно голямо, тъй като X е апроксимираща и $\Delta_n\to 0$,

$$\left|\frac{f(u_1)-f(v_1)}{u_1-v_1}-\frac{f(u_2)-f(v_2)}{u_2-v_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

за всички $u_j\in[x_{i-1}, x_{i-1}+\Delta_n]$ и $v_j\in[x_i, x_i+\Delta_n]$ $j=1, 2$.

От непрекъснатостта на $f(x)$ следва, че за n евентуално още по-голямо за $u_j\in[x_{i-1}, x_{i-1}+\Delta_n]$

$$|f(u_1)-f(u_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следователно за всички достатъчно големи n

$$\varrho_i(\varphi_N, \varphi_N^n)<\varepsilon.$$

С това лемата е доказана.

Теорема 1. Ако $f(x)$ е непрекъсната за $x\in[c, d]$ и $X=\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ е една апроксимираща за $[c, d]$ редица,

(3) $$\lim_{n\to\infty} E^n(f, H_N^n)=E(f, H_N).$$

Доказателство. Тъй като $H_N(f;\ c,\ d)\supset H_N^n(f; c, d)$, то

(4) $$E^n(f, H_N^n)\geq E(f, H_N).$$

Избираме произволно $\varepsilon>0$ и

$$E(f, H_n)+\frac{\varepsilon}{2}>\inf_{\varphi_N\in H_N(f;\ c,\ d)} \varrho(f, \varphi_N)=E(f, H_N).$$

Следователно съществува $\varphi_N^\varepsilon\in H_N(f;\ c,\ d)$, така че

(5) $$E(f, H_N)\leq\varrho(f, \varphi_N^\varepsilon)<E(f, H_N)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Според лема 1 за $\varepsilon/2$ и $\varphi_N^\varepsilon\in H_N(f; c, d)$ съществуват n_0 и $\varphi_N^n\in H_N^n(f; c, d)$, така че когато $n>n_0$,

(6) $$\varrho(\varphi_N^\varepsilon, \varphi_N^n)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

От (5), (6) и неравенството на триъгълника получаваме

$$E(f, H_N) > \varrho(f, \varphi^{\varepsilon}_N) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \varrho(f, \varphi^{n}_N) - \varrho(\varphi^{\varepsilon}_N, \varphi^{n}_N) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \varrho(f, \varphi^{n}_N) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geq E^n(f, H^n_N) - \varepsilon.$$

От горната верига неравенства и от (4) получаваме при произволен избор на $\varepsilon > 0$ за $n > n_0$

$$E(f, H_N) \leq E^n(f, H^n_N) < E(f, H_N) + \varepsilon.$$

С това теоремата е доказана. От нея следва, че задачата за апроксимиране на една функция с полигон от ред N в даден интервал можем да заменим за произволно $\varepsilon > 0$ със задачата за апроксимиране на функцията с полигон също от ред N, но върховете на който да са с абсциси измежду краен брой точки от интервала, като при това грешката ще бъде по-малка от ε.

Ако $\varphi_1(x)$ е отсечката, свързваща точките $(s_1, f(s_1))$ и $(s_2, f(s_2))$, означаваме

$$\Delta(s_1, s_2) = \max_{x \in [s_1, s_2]} |f(x) - \varphi_1(x)| \tag{7}$$

§ 2

Нека $g(x)$ е една непрекъсната периодична функция с период T.

С $H_N(g; x_0)$ да означим множеството от вписаните за $g(x)$ в интервала $[x_0, x_0+T]$ полигони от ред N. Ако $g_1(x)$ и $g_2(x)$ са две непрекъснати функции в интервала $[x_0, x_0+T]$, то

$$\varrho(x_0; g_1, g_2) = \max_{x_0 \leq x \leq x_0+T} |g_1(x) - g_2(x)|$$

Дефиниция 5. Най-добро равномерно отклонение на $g(x)$ от множеството на всички непрекъснати периодични с период T, вписани за $g(x)$ полигони от ред N, се нарича

$$G(g, N) = \inf_{0 \leq x_0 \leq T} E(g, H_N(g; x_0)) = \inf_{0 \leq x_0 \leq T} \; \inf_{\varphi_N \in H_N(g; x_0)} \varrho(x_0; g, \varphi_N). \tag{9}$$

Нека $\Theta^m = \{0 = x^m_0 < x^m_1 < \cdots < x^m_m = T\}$ е едно подмножество на интервала $[0, T]$. Означаваме

$$G_m(g, N) = \min_{x^m_i \in \Theta^m} E(g, H_N(g; x^m_i)).$$

Лема 2. Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[x, x^*+T]$, $x < x^*$ и $\varphi_N \in H_N(f; x^*)$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че ако $x^* - x < \delta$, може да се намери $\bar{\varphi}_N \in H_N(f; x)$, за което да бъде изпълнено неравенството

$$\varrho(x; f, \bar{\varphi}_N) \leq \varrho(x^*; f, \varphi_N) + \varepsilon.$$

Доказателство. Нека върховете на φ_N^* са с абсциси

$$x^* = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = x^* + T, \quad k \leq N.$$

Първото условие, на което подчиняваме избора на $\delta > 0$, е да бъде толкова малко, щото в интервала $(\bar{x}+T,\ x^*+T)$ да няма абсциса на връх на полигона φ_N^* и $\delta < |x_1 - x^*|$.

Да си конструираме полигона $\bar{\varphi}_N$ по следния начин. В интервала $[x_1,\ x_{k-1}]$ приемаме $\bar{\varphi}_N(x) = \varphi_N^*(x)$; в интервала $[\bar{x},\ x_1]$ нека $\bar{\varphi}_N$ се състои от съединителната отсечка на точките $(\bar{x},\ f(\bar{x}))$ и $(x_1,\ f(x_1))$, а в интервала $[x_{k-1},\ \bar{x}+\mathrm{T}]$ — от съединителната отсечка на точките $(x_{k-1},\ f(x_{k-1}))$ и $(\bar{x}+T,\ f(\bar{x}+T))$.

Първоначално поставената задача вместваме в един клас от задачи — за $a \in X^n$, $1 \leq k \leq N$, да се намери

$$F_k(a) = \inf_{\varphi_k \in H_k^n(f;\ c,\ a)} \ \max_{x \in [c,\ a]} \ f(x) - \varphi_k(x)$$

Тук $H_k^n(f;\ c,\ a)$ е множеството от полигоните от ред K в интервала $[c,\ a]$, които имат за върхове точки с абсциси, принадлежащи на $[c,\ a] \cap X^n$ и са вписани за $f(x)$.

Прилагайки принципа за оптималност на Белман, достигаме до рекурентното съотношение

$$(8) \qquad \begin{aligned} F_k(a) &= \min_{x_k \in [c,\ a] \cap X^n} \max\{\Delta(x_k,\ a),\ F_{k-1}(x_k)\}, \\ F_1(a) &= \Delta(c,\ a). \end{aligned}$$

Основна трудност при използването на горното рекурентно съотношение е намирането на най-доброто равномерно отклонение на функцията от множеството на вписаните полигони от ред 1 в интервалите $[x_i^n,\ x_j^n]$ за $x_i^n,\ x_j^n \in X^n$.

Ето защо по-нататък ще разглеждаме само задачата за числено апроксимиране на изпъкнала функция.

Намирането на най-доброто равномерно отклонение от множеството на вписаните полигони от ред 1, когато $f(x)$ е изпъкнала два пъти диференцируема функция, е дадено например в [1].

Когато $f(x)$ е изпъкнала функция — полигон, например определен от точките $\{A_1,\ A_2 \ldots A_q\}$ с координати $\{(x_1,\ y_1), \ldots (x_q,\ y_q)\}$, тогава най-доброто равномерно отклонение от множеството на полигоните от ред 1, вписани за $f(x)$, се дава с $\max\limits_{1 < i < q} |y_i - \varphi(x_i)|$, където $\varphi(x)$ е съединителната отсечка на точките $(x_1,\ y_1)$ и $(x_q,\ y_q)$.

Както за всеки алгоритъм на динамичното програмиране, и тук основен се явява проблемът за ограничената памет на изчислителните машини. Там трябва да се съхранява информация за вписаните полигони от ред 1 в интервалите, определени от всеки две точки на X^n и за равномерното им отклонение от функцията в същите интервали.

По такъв начин за всяка двойка $\{(x_i^n,\ x_j^n);\ x_i^n,\ x_j^n \in X^n\}$ са необходими поне по три клетки, или общо $3n(n+1)/2$. Освен това, когато се пресмята $F_k(a)$, в оперативната памет трябва да се намират и стойностите $F_{k-1}(a)$.

Със специално изработена програма за машината „Минск-2“ бяха направени експерименти за апроксимиране на изпъкнали функции с полигони в интервала $[0, 1]$, използвайки рекурентното съотношение (8).

Да разделим интервала $[0, 1]$ на n равни части и множеството от делящите точки да означим с X^n. Нека $\varphi_L(x)$ е изпъкнал полигон от ред L в интервала $[0, 1]$, а $H_N^n(\varphi_L;\ 0,\ 1)$ е множеството от полигоните от ред N, вписани за φ_L в интервала $[0,1]$, чиито върхове са с абсциси, принадлежащи на X^n.

Отклонението на полигона φ_5, определен от върховете

X	0,0	0,2	0,5	0,7	0,9	1,0
y	1,1	0,5	0,3	0,4	0,8	1,2

от $H_N^n(\varphi_5;\ 0,\ 1)$, за $n=20$ и $n=40$ е следното:

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$n=20$	0,85	0,28	0,13	0,09	0,00
$n=40$	0,85	0,28	0,13	0,086	0,00

Още един пример, когато върховете на φ_L са точки с абсциси, непринадлежащи на X^n:

X	0,00	0,064	0,21	0,51	0,73	0,81	0,91	1,00
y	1,1	0,7	0,5	0,3	0,4	0,5	0,8	1,28

При $n=40$ се получават следните стойности за отклонението:

$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
0,89	0,33	0,188	0,093	0,07	0,046

Времето за работа на машината заедно с отпечатването на матрицата за полигоните от ред 1 и отклонението им за всяка двойка $\{(x_i^n,\ x_j^n);\ x_i^n,\ x_j^n \in X^n\}$ и табулирането на $F_k(a)$, $k=1, 2, \ldots, 6$; $a=0{,}025,\ 0{,}05, \ldots, 1$ е 8 min.

Да оценим отгоре $\varrho(\bar{x};\ f,\ \bar{\varphi}_N)$, където $\bar{\varphi}_N$ е така конструираният полигон.

$$\varrho(\bar{x};\ f,\ \varphi_N) = \max_{\bar{x} \le x \le \bar{x}+T} |f(x)-\varphi_N(x)|$$

$$= \max\{\max_{x} |f(x)-\varphi_N(x)|,\ \max_{x \le x \le x_{k-1}} |f(x)-\varphi_N(x)|,\ \max_{x_{k-1} \le x \le \bar{x}+T} |f(x)-\varphi_N(x)|\}$$

$$= \max\{\max |f(x)-\varphi_N(x)|,\ \max_{x^* \le x \le x^*+T} |f(x)-\varphi_N(x)|,\ \max_{x_{k-1} \le x \le \bar{x}+T} |f(x)-\varphi_N(x)|\}.$$

Но

$$\max_{x \leqq x \geqq x_1} |f(x)-\varphi_N(x)| \geqq$$

$$\leq \max\{\max_{\bar{x}\leq x\leq x^*}|f(x)-\bar{\varphi}_N(x)|,\ \max_{x^*\leq x\leq x_1}|f(x)-\varphi_N(x)|+\max_{x^*\leq x\leq x_1}|\overset{*}{\varphi}_N(x)-\bar{\varphi}_N(x)|\}$$

$$\leq \max\{\max_{x^*\leq x\leq x^*+T}|\overset{*}{\varphi}_N(x)-f(x)|+\max_{x^*\leq x\leq x_1}|\Phi_1(x)-\Phi_2(x)|,\ \max_{\bar{x}\leq x\leq x^*}|\Phi_1(x)-\Phi_2(x)|\}$$

$$\leq \max_{x^*\leq x\leq x^*+T}|\varphi_N^*(x)-f(x)|+\max_{\bar{x}\leq x\leq x_1}|\Phi_1(x)-\Phi_2(x)|,$$

където $\Phi_l(x)$, $l=1$, 2, са прави през $(x_1,\ f(x_1))$ с ъглови коефициенти съответно

$$\gamma_1=\max_{\bar{x}\leq x\leq x^*}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right],\quad \gamma_2=\min_{\bar{x}\leq x\leq x^*}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right].$$

Тогава

$$\max_{\bar{x}\leq x\leq x_1}|\Phi_1(x)-\Phi_2(x)|=\Phi_1(\bar{x})-\Phi_2(\bar{x})=|[\gamma_1\bar{x}+(f(x_1)-\gamma_1x_1)]-$$

$$-[\gamma_2\bar{x}+(f(x_1)-\gamma_2x_1)]|=|(\gamma_1-\gamma_2)\bar{x}-(\gamma_1-\gamma_2)x_1|=|\gamma_1-\gamma_2|(x_1-\bar{x})$$

$$=|\gamma_1-\gamma_2|[(x^*-\bar{x})+(x_1-x^*)]<2|\gamma_1-\gamma_2|(x_1-x^*).$$

Да подчиним $\delta>0$ на условието да бъде толкова малко, че осцилацията на непрекъснатата функция $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ в интервала $[\bar{x},x^*]$ да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{2(x_1-x^*)}$.

Тогава

$$|\gamma_1-\gamma_2|=\left|\max_{\bar{x}\leq x\leq x^*}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right]-\min_{\bar{x}\leq x\leq x^*}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right]\right|<\frac{\varepsilon}{2(x_1-x^*)}$$

и

$$|\Phi_1(\bar{x})-\Phi_2(\bar{x})|<\varepsilon.$$

И така получаваме

$$\max_{\bar{x}\leq x\leq x_1}|f(x)-\varphi_N(x)|\leq\varrho(x^*;\ f,\ \varphi_N)+\varepsilon.$$

Аналогично се оценява и $\max\limits_{x_{k-1}\leq x\leq\bar{x}+T}|f(x)-\varphi_N(x)|$, като подчиняваме δ и на условието да бъде толкова малко, че осцилацията на функцията $\frac{f(x)-f(x_{k-1})}{x-x_{k-1}}$ в интервала $[\bar{x}+T,\ x^*+T]$ да бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{x^*+T-x_{k-1}}$.

И така достигаме до

$$\varrho(\bar{x};\ f,\ \varphi_N)\leq\max\{\varrho(x^*;\ f,\ \overset{*}{\varphi}_N),\ \varrho(x^*;\ f,\ \overset{*}{\varphi}_N)+\varepsilon,\ \varrho(x^*;\ f,\ \overset{*}{\varphi}_N)+\varepsilon\}=$$

$$=\varrho(x^*;\ f,\ \varphi_N^*)+\varepsilon.$$

С това лемата е доказана.

Теорема 2. Ако редицата $\{\Theta^m\}_{m=1}^{\infty}$ е апроксимираща за интервала $[0, T]$, то $\lim\limits_{m\to\infty} G_m(g, N)=G(g, N)$.

Доказателство. Тъй като $\Theta^m \subset [0, T]$, за всяко m

$$G_m(g, N)\geqq G(g, N). \tag{10}$$

За произволно $\varepsilon>0$ съществува $x^* \in [0, T]$, така че

$$E(g;\ H_N(g;\ x^*))<G(g, N)+\frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Може да се намери $\varphi_N^* \in H_N(g;\ x^*)$, така че

$$E(g;\ H_N(g;\ x^*))+\frac{\varepsilon}{3}>\varrho(x^*;\ g,\ \varphi_N^*). \tag{12}$$

Избираме $\delta_0>0$, така че когато $0\leqq x^*-\bar{x}<\delta_0$, според лема 2 да съществува $\bar{\varphi}_N \in H_N(g;\ \bar{x})$ и

$$\varrho(\bar{x};\ g,\ \bar{\varphi}_N)\leqq\varrho(x^*;\ g,\ \varphi_N)+\frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Тъй като редицата $\{\Theta^m\}_{m=1}^{\infty}$ е апроксимираща за интервала $[0, T]$, за така избраното $\delta_0>0$ съществува m_0, така че когато $m>m_0$, $\Delta m<\delta_0$. Фиксираме едно такова m. Нека най-голямото $x_i^m \in \Theta^m$, за което $x_i^m \leqq x^*$ е $\bar{x}$. Но тогава

$$x^*-\bar{x}\leqq x_{i+1}^m-x_i^m=\Delta_m^i<\delta_0$$

и от специалния избор на δ_0 следва, че съществува $\bar{\varphi}_N \in H_N(g;\ \bar{x})$ и

$$\varrho(\bar{x};\ g,\ \bar{\varphi}_N)<\varrho(x^*;\ g,\ \varphi_N)+\frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

От (10), (11), (12), (13) получаваме за $m>m_0$

$$G(g, N)\leqq G_m(g, N)=\min_{x_i^m \in \Theta^m} E(g,\ H_N(g;\ x_i^m))\leqq\varrho(\bar{x};\ g,\ \bar{\varphi}_N)$$

$$\leqq\varrho(x^*;\ g,\ \varphi_N^*)+\frac{\varepsilon}{3}<E(g;\ H_N(g;\ x^*))+\frac{2\varepsilon}{3}<G(g, N)+\varepsilon.$$

Пред вид произволността на $\varepsilon>0$ от горната верига неравенства следва верността на теоремата.

Теорема 3. Ако $\{\Theta^m\}_{m=1}^{\infty}$, $\Theta^m=\{0=x_0^m<x_1^m<\cdots<x_m^m=T\}$, е една апроксимираща редица за интервала $[0, T]$, а $\{X_n^{mi}\}_{n=1}^{\infty}$, $i=0, 1, \ldots, m$, $X_n^{mi}=\{x_i^m=x'_{nmi}<\cdots<x^n_{nmi}=x_i^m+T\}$ са апроксимиращи редици за интервалите $[x_i^m,\ x_i^m+T]$, за достатъчно големи n и m

$$\left|G(g, N)-\min_{x_i^m \in \Theta^m}\ \inf_{\varphi_N \in H_N^n(g;\ x_i^m)} \varrho(x_i^m;\ g,\ \varphi_N)\right|<\varepsilon$$

за произволна непрекъсната периодична функция $g(x)$ с период T и произволно $\varepsilon>0$.

Доказателство. По теорема 2 за $\varepsilon/2>0$ съществува m_0, така че ако $m>m_0$, то

$$G(g, N)-\frac{\varepsilon}{2}<G_m(g, N)<G(g, N)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{14}$$

От друга страна, от теорема 1 за апроксимиращите редици $\{X_n^{mi}\}_{n=1}^{\infty}$ могат да се изберат индекси $n_i^0(m)$ (при фиксирано $i=0, 1,\ldots,m$) така, че когато $n(m)>\max\limits_{0\le i\le m} n_i^0(m)$,

$$E(g;\, H_N(g,\, x_i^m)-\frac{\varepsilon}{2}<E^n(g;\, H_N^n(g;\, x_i^m))<E(g;\, H_N(g;\, x_i^m))+\frac{\varepsilon}{2}$$

От горните неравенства получаваме

$$G_m(g, N)-\frac{\varepsilon}{2}\le \min_{x_i^m\in\theta^m}\ \inf_{\varphi_N\in H_N^n(g;\, x_i^m)} \varrho(x_i^m;\, g,\, \varphi_N)\le G_m(g, N)+\frac{\varepsilon}{2}$$

или заедно с (14)

$$G(g, N)-\varepsilon< \min_{x_i^m\in\theta^m}\ \inf_{\varphi_N\in H_N^n(g\ \ x_i^m)} \varrho(x_i^m;\, g,\, \varphi_N)<G(g, N)+\varepsilon.$$

С това теоремата е доказана.

Според теорема 3 най-доброто равномерно отклонение на $g(x)$ от множеството на непрекъснатите вписани периодични полигони от ред N с период T може да бъде приближено с произволна точност с минималното от отклоненията на функцията в краен брой интервали с дължина T, имащи за ляв край точки от интервала $(0, T)$, от множествата на полигоните от ред N, чиито върхове са абсциси, избрани измежду краен брой точки в горните интервали.

За решаването на приближената задача ще приложим принципа за оптималност на Белман аналогично както след теорема 1.

Означаваме с $\Delta(s_1,\, s_2)=\max\limits_{x\in[s_1,\, s_2]}|g(x)-\varphi_1(x)|$, където $\varphi_1(x)$ е отново отсечката, съединяваща точките $(s_1,\, g(s_1))$ и $(s_2,\, g(s_2))$.

Ако $a_i\in X_n^{mi}$, получаваме следните подобни на (8) рекурентни съотношения:

$$D_k^i(a_i)=\min_{x\in\left[x_i^m,\ a_i\right]\cap X_n^{mi}} \max\{D_{k-1}^i(x),\ \Delta(x, a^i)\},$$

$$G^k=\min_{x_i^m\in\theta^m} D_k^i(x_i^m+T), \tag{15}$$

$$D_1^i(a_i)=\Delta\, x_i^m,\ a_i),\quad G^1=\min_{x_i^m\in\theta^m} D_1^i(x_i^m+T)\quad i=1,\, 2,\ldots,\, m;\quad k=2,\, 3,\ldots,N.$$

Като приложение на теорема 3 да разгледаме задачата за вписване на обобщен спирален многоъгълник в непрекъсната затворена звездна крива, допускаща представяне в полярни координати $\Gamma\colon r(\theta)$.

Под обобщен спирален многоъгълник ще разбираме непрекъсната затворена крива, която е съставена от части от спирали. Точките, общи за двете части от спирали, са върхове.

Един обобщен спирален многоъгълник ще наричаме вписан в една звездна затворена крива, ако върховете му лежат на кривата.

Функцията $r(\theta)$ е една непрекъсната периодична функция с период 2π и за нея можем да поставим задачата за намиране на равномерното ѝ отклонение от множеството на непрекъснатите периодични с период 2π полигони от ред N според дефиниция 5. Но периодичните полигони от ред N в равнината $Or\theta$ са обобщени спирални многоъгълници в равнината Oxy.

От горната забележка следва, че теорема 3 ни дава алгоритъм за намиране приближение до най-доброто равномерно отклонение на кривата Γ от множеството на вписаните в нея обобщени спирални многоъгълници. Сега могат да се приложат и следващите след теорема 3 рекурентни съотношения на динамичното програмиране.

Теоремите 1, 2 и 3 ще бъдат верни във всички метрични пространства, съдържащи като подмножества в себе си съответно непрекъснатите и непрекъснатите периодични функции, в които могат да се докажат лемите 1 и 2.

В заключение бих искал да благодаря на проф. д-р Бл. Сендов за личните беседи и ценните съвети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон, И. П. Конструктивная теория функции. Москва, 1949.
2. Беллман, Р., Р. Калаба. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Москва, 1968.
3. Беллман, Р. Динамическое программирование. Москва, 1960.

Постъпила на 25. IX. 1969 г.

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К НАИЛУЧШЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Тодор Р. Гичев

(Резюме)

В работе рассматриваются вопросы, связанные с приближением непрерывных функций полигонами и непрерывных периодических функций периодическими полигонами. Доказываются три аппроксимационные теоремы и дается один алгоритм динамического программирования. Приводятся и результаты численного экспериментирования алгоритма на машине

„Минск-2“ при приближении выпуклых функций полигонами. В конце дается приложение к приближению непрерывной замкнутой звездчатой кривой обобщенными спиральными многоугольниками.

EINE ANWENDUNG DER DYNAMISCHEN PROGRAMMIERUNG AUF DIE BESTE GLEICHMÄßIGE APPROXIMATION

Todor R. Gičev

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden Fragen betrachtet, die verbunden sind mit der Approximation der stetigen Funktionen mit Polygonen und der stetigen periodischen Funktionen mit periodischen Polygonen. Es werden drei Approximationssätze bewiesen, und es wird ein Algorithmus der dynamischen Programmierung angegeben. Es werden auch Ergebnisse vom nummerischen Experimentieren des Algorithmus mit Hilfe des Computers (der Anlage) „Minsk-2“ bei Approximierung der konvexen Funktionen mit Polygonen angegeben. Zum Schluß wird eine Anwendung auf die Approximierung einer stetigen geschlossenen Sternkurve mit einem verallgemeinerten spiralen Vieleck gemacht.