БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ИДЕМПОТЕНТЫ СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

А. А. Бовди и С. В. Миховски

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G — произвольная группа, а K — ассоциативное кольцо с единицей. Предположим, что заданы однозначное отображение σ группы G в группу автоморфизмов кольца K и семейство обратимых элементов $\varrho=\{\varrho_{g,h}\in K\,|\,g, h\in G\}$, причем удовлетворяются соотношения

1) $$\varrho_{g_1,g_2g_3}\cdot\varrho_{g_2,g_3}=\varrho_{g_1g_2,g_3}\cdot\varrho_{g_1,g_2}^{g_3\sigma},$$

2) $$\alpha^{g_1\sigma\cdot g_2\sigma}=\varrho_{g_1,g_2}^{-1}\cdot\alpha^{(g_1g_2)\sigma}\cdot\varrho_{g_1,g_2}$$

для всех $\alpha\in K$ и g_1, g_2, $g_3\in G$. Семейство ϱ называется *системой факторов*.

Поставим в соответствие каждому элементу $g\in G$ символ t_g и рассмотрим множество W всевозможных сумм вида

$$\sum_{g\in G}t_g\alpha_g,\quad \alpha_g\in K,$$

в котором лишь конечное число коэффициентов α_g отлично от нуля. Равенство

$$\sum_{g\in G}t_g\,\alpha_g=\sum_{g\in G}t_g\beta_g$$

возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_g=\beta_g$ для всех $g\in G$. Множество W превращается в ассоциативное кольцо, если операции сложения и умножения определены следующим образом:

1) $$\sum_{g\in G}t_g\alpha_g+\sum_{g\in G}t_g\beta_g=\sum_{g\in G}t_g(\alpha_g+\beta_g),$$

2) $$t_gt_h=t_{gh}\,\varrho_{g,h},$$

3) $$\alpha t_g=t_g\alpha^{g\sigma},\quad \alpha\in K,$$

а для произвольных элементов произведение определяется на основании закона дистрибутивности. Это кольцо называется *скрещенным произведением* группы G и кольца K при системе факторов ϱ и отображении σ и обозначается через (G, K, ϱ, σ). Ряд свойств этого кольца можно найти в работах [2], [3], [4].

Если σ отображает группу G на единичный автоморфизм кольца K, то скрещенное произведение $(G, K, \varrho, 1)$ называется скрещенным групповым кольцом и его будем обозначать через (G, K, ϱ). Кроме того, если система факторов единичная, т. е. $\varrho_{g,h} = 1$ для всех $g, h \in G$, то скрещенное произведение является групповым кольцом и будем обозначать через KG.

Пусть $A(K)$ — группа автоморфизмов, а $B(K)$ — группа внутренних автоморфизмов кольца K. Ядром отображения σ называется ядро сквозного отображения

$$G \to A(K) \to A(K)/B(A).$$

Если

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_{g_i} a_i, \quad 0 \neq a_i \in K,$$

произвольный элемент кольца (G, K, ϱ, σ), то подгруппа $L(x)$ группы G, порожденная элементами $g_1, g_2, \ldots, g_n$, называется опорной подгруппой элемента x.

В статье исследуется строение опорных подгрупп идемпотентов скрещенного произведения (G, K, ϱ, σ).

В § 2 доказывается предположение о конечности опорной подгруппы центрального идемпотента произвольного скрещенного произведения, выдвинутое для групповых колец в работе Рудина и Шнайдера [14]. Им была установлена справедливость этого предположения для групповых алгебр над полем комплексных чисел.

Конечность опорных подгрупп центральных идемпотентов в дальнейшем существенно используется при изучении групповых колец.

В § 3 описываются бирегулярные групповые кольца KG. Однако, остается открытым вопрос, имеет ли место следствие 3.4 для некоммутативных K, неудовлетворяющих условию максимальности для двусторонних идеалов. Далее, в § 4 изучается, когда групповое кольцо KG разлагается в прямую сумму неразложимых двустронних идеалов и в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов. Неизвестно также, можно ли отказаться от предположения бирегулярности кольца K в следствии 4.2.

В последней части работы изучается строение скрещенных произведений, в которых все идемпотенты имеют конечные опорные подгруппы. Следствие 5.8 обобщает теорему 3.4, а теоремы 5.1 и 5.2 в некотором смысле являются обратными к теореме 4.3 Рудина и Шнайдера [14[.

Основные результаты работы без доказательств приведены в [5].

§ 2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ξ-ЭЛЕМЕНТЫ

Определение. Элемент a кольца R назовем ξ-элементом, если существует такое натуральное число $m = m(a) > 1$, что $a^m = a$.

ξ-элементом является любой идемпотентный элемент или обратимый элемент конечного порядка кольца R.

В дальнейшем через $\operatorname{rad} R$ будем обозначать первичный радикал кольца R [11].

Лемма 2.1. Для каждого центрального ξ-элемента a произвольного скрещенного произведения (G, K, ϱ, σ) группы G и кольца K существует такой центральный элемент a_1 кольца (G, K, ϱ, σ) с конечной опорной подгруппой, что

$$a-a_1 \in \operatorname{rad}(G, K, \varrho, \sigma), \quad a_1^{m(a)}-a_1 \in \operatorname{rad}(G, K, \varrho, \sigma).$$

Доказательство. Предположим, что опорная подгруппа N центрального ξ-элемента a бесконечна. Из условия $t_g a = a t_g$, $g \in G$, следует, что N является нормальной FC-подгруппой группы G, а совокупность $H=P(N)$ всех элементов конечного порядка будет конечной нормальной подгруппой группы G [12]. Запишем a в виде

$$a=\sum_{i=1}^{n} v_i t_{g_i}, \tag{2.1}$$

где $0 \neq v_i \in (H, K, \varrho, \sigma)$, $g_i \in \coprod(N/H)$ — полная система представителей смежных классов группы N по подгруппе H. Группа N/H может быть линейно упорядочена, как абелева группа без кручения, и из бесконечности группы N следует $n>1$. Далее, $v_i t_{g_i}$, $i=1, 2, \ldots, n$, принадлежат центру кольца (N, K, ϱ, σ), так как a — элемент центра (G, K, ϱ, σ) и N/H абелева группа.

Пусть среди элементов $v_1 t_{g_1}, v_2 t_{g_2}, \ldots, v_n t_{g_n}$ элементы $v_{i_1} t_{g_{i_1}}$, $v_{i_2} t_{g_{i_2}}, \ldots, v_{i_r} t_{g_{i_r}}$ не принадлежат первичному радикалу $\operatorname{rad}(G, K, \varrho, \sigma)$ кольца (G, K, ϱ, σ) и

$$Hg_{i_1} < Hg_{i_2} < \cdots < Hg_{i_r}. \tag{2.2}$$

Тогда, если $r>1$ и

$$u=\sum_{j=1}^{r} v_{i_j} t_{g_{i_j}},$$

то $v=(a^m-u^m)-(a-u)=u-u^m$ — нильпотентный элемент, принадлежащий радикалу $\operatorname{rad}(G, K, \varrho, \sigma)$. Докажем, что $v_{i_1} t_{g_{i_1}} \in \operatorname{rad}(G, K, \varrho, \sigma)$, если $g_{i_1} \overline{\in} H$.

Действительно, из (2.2) имеем

$$Hg_{i_1}^m < Hg_{i_{j_1}} g_{i_{j_2}} \ldots g_{i_{j_m}} < Hg_{i_r}^m,$$

если $(j_1, j_2, \ldots, j_m) \neq (1, 1, \ldots, 1), (m, m, \ldots, m)$, на основании которого заключаем, что Hg_{i_1} или $Hg_{i_1}^m$ меньше любого H_g, где g участвует в записи элемента v. Отсюда, ввиду нильпотентности элемента v и линейной упорядоченности группы N/H, вытекает нильпотентность элемента $v_{i_1} t_{g_{i_1}}$.

Далее, $J = v_{i_1} t_{g_{i_1}} (G, K, \varrho, \sigma)$ — ненулевой нильпотентный идеал кольца (G, K, ϱ, σ). В самом деле, множество $\{v_1 t_{g_1}, \ldots, v_n t_{g_n}\}$ инвариантно относительно всех внутренних автоморфизмов кольца (G, K, ϱ, σ), индуцированных элементами t_g, $g \in G$, его элементы попарно перестановочные между собой и элементами кольца K. Если $M_1=\{v_{l_1} t_{g_{l_1}}, \ldots, v_{l_s} t_{g_{l_s}}\}$ — множество всех сопряженных к элементу $v_{i_1}t_{g_{i_1}}$ при помощи t_g, $g\in G$, то $(v_{i_j}t_{g_{i_j}})^t=0$, $j=1, 2, \dots, s$, $t>1$ и произведение любых $d=t(s+1)$ элементов из M_1 будет нуль. Произвольный элемент $x\in J^d$ допускает представление

$$x=\sum(v_{i_1}t_{g_{i_1}}t_{h_1})(v_{i_1}t_{g_{i_1}}t_{h_2})\cdots(v_{i_1}t_{g_{i_1}}t_{h_d})\alpha$$

$$=\sum(v_{r_1}t_{g_{r_1}})(v_{r_2}t_{g_{r_2}})\cdots(v_{r_d}t_{g_{r_d}})t_h\beta=0,$$

где $v_{r_i}t_{g_{r_i}}\in M_1$ $(i=1, 2, \dots, d)$, $h_1, \dots, h_d$, $h\in G$, $\alpha, \beta\in K$. В силу этого, $J^d=0$ и $v_{i_1}t_{g_{i_1}}\in \mathrm{rad}\,(G, K, \varrho, \sigma)$.

Если $g_{i_1}\in H$, то $g_{i_r}\in H$ и повторяя вышеприведенное рассуждение, получаем противоречие. Следовательно, $r=1$, $Hg_{i_1}=H$ и $a_1=v_{i_1}t_{g_{i_1}}$ удовлетворяет условию леммы.

Следствие 2.2. Если скрещенное произведение (G, K, ϱ, σ) полупервично, то каждый центральный ξ-элемент имеет конечную опорную подгруппу.

Следствие 2.3. Если a — центральный ξ-элемент скрещенного произведения (G, K, ϱ, σ) с бесконечной опорной подгруппой N, то $\mathrm{rad}\,(P(N), K, \varrho, \sigma)\neq 0$.

Доказательство. Представим элемент a в виде (2.1). Тогда $n>1$ и $v_it_{g_i}\in \mathrm{rad}\,(G, K, \varrho, \sigma)$, если $g_i\in P(N)$ (см. доказательство и обозначения леммы 2.1). Далее,

$$0\neq v_i\in \mathrm{rad}\,(G, K, \varrho, \sigma)\cap(P(N), K, \varrho, \sigma)\subseteq \mathrm{rad}\,(P(N), K, \varrho, \sigma).$$

Теорема 2.4. Каждый центральный идемпотент e произвольного скрещенного произведения (G, K, ϱ, σ) группы G и кольца K имеет конечную опорную подгруппу.

Доказательство. Каждый идемпотент является ξ-элементом и по лемме 2.1 существует такой центральный элемент u кольца (G, K, ϱ, σ) с конечной опорной подгруппой, что $e-u$ и u^2-u принадлежат радикалу $\mathrm{rad}\,(G, K, \varrho, \sigma)$. Если $z=u^2-u$, то

$$z_1=\frac{1}{2}[1-(1+4z)^{-1/2}]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\binom{2i}{i}z^i$$

является решением уравнения $(x^2-x)(1+4z)+z=0$ и, ввиду нильпотентности z, принадлежит кольцу (G, K, ϱ, σ). Далее, $e_1=u+z_1(1-2u)$ — центральный идемпотентный элемент, опорная подгруппа которого содержится в конечной опорной подгруппе элемента u. Кроме того,

$$f=e-e_1=(e-u)-z_1(1-2u)\in \mathrm{rad}\,(G, K, \varrho, \sigma).$$

Тогда $f^{2n+1}=(1-2e_1)^{2n}f=f$ и из нильпотентности f заключаем, что $e_1=e$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. Пусть (G, K, ϱ, σ) — произвольное скрещенное произведение группы G и кольца K характеристики нуль, где K — простое кольцо или коммутативная область целостности. Тогда опорная подгруппа N любого центрального ξ-элемента a конечна и принадлежит ядру H отображения σ.

Доказательство. Если H — ядро отображения σ и $h \in H$, то $a^{h\sigma} = \beta_h a \beta_h^{-1}$ для некоторого $\beta_h \in K$. Тогда, полагая $\bar{t}_h = \beta_h t_h$, имеем, что $a \bar{t}_h$ $\bar{t}_h a$ для любого $a \in K$, и новая система факторов $\bar{\varrho}_H$ принадлежит центру кольца K. Известно, что если K простое кольцо или коммутативная область целостности, то центр кольца (G, K, ϱ, σ) содержится в кольце $(H, Z(K), \bar{\varrho}_H, 1)$ [2], [3]. Если опорная подгруппа центрального ξ-элемента a бесконечна, то в силу следствия 2.3

$$\operatorname{rad}(P(N), Z(K), \bar{\varrho}_H, 1) \neq 0,$$

а это противоречие [7, стр. 161, теорема 48].

Если ξ-элемент e является центральным идемпотентом и K — коммутативная область целостности характеристики нуль, то можно утверждать, что некоторый простой делитель порядка опорной подгруппы H идемпотента e обратим в K. Действительно, $e \in (H, K, \varrho_H)$ и для ϱ_H выполняется $\varrho_{1,h} = \varrho_{h,1} = \varrho_{1,1}$, $h \in H$ [7], что дает возможность применить рассуждения Колемана [9].

Если же K кольцо характеристики простого числа p, то в силу теоремы Пассмана Осима [13] и теоремы 2.4, в записи каждого центрального идемпотента группового кольца KG участвуют только таки элементы, порядки которых не делятся на p.

§ 3. БИРЕГУЛЯРНЫЕ СКРЕЩЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определение. Пусть $F(G)$ обозначает множество всех таких элементов g группы G, что

$$((G, K, \varrho, \sigma)(t_1\varrho_{1,1}^{-1} - t_g)((G, K, \varrho, \sigma) \quad (G, K, \varrho, \sigma).$$

Тогда группа, порожденная множеством $F(G)$, называется фундаментальной подгруппой скрещенного произведения, а идеал, порожденный элементами $t_1\varrho_{1,1}^{-1} - t_g$, $g \in F(G)$ — фундаментальным идеалом.

Если уравнение $axa = a$ разрешимо в R для любого $a \in R$, то R называется регулярным кольцом. Кольцо R называется бирегулярным, если каждый его главный двусторонний идеал порождается центральным идемпотентом.

Теорема 3.1. Пусть $R = (G, K, \varrho, \sigma)$ является бирегулярным кольцом. Тогда

(i) фундаментальная подгруппа кольца (G, K, ϱ, σ) является локально нормальной подгруппой группы G;

(ii) если R групповое кольцо, то $F(G) = G$, кольцо K бирегулярно и порядок каждого элемента из G обратим в K.

Доказательство. Если $g \in F(G)$, то по определению $F(G)$,

$$R \neq R(t_1\varrho_{1,1}^{-1} - t_g)R = Re, \tag{3.1}$$

где e — центральный идемпотент кольца R с конечной опорной подгруппой H, и $t_1\varrho_{1,1}^{-1} - t_g = xe$, $x \in R$. Представим элемент x в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} v_i t_{g_i},$$

где $v_i \in (H, K, \varrho, \sigma)$, $g_i \in \prod(G/H)$, $g_1 = 1$. Тогда

$$t_1 \varrho_{1,1}^{-1} \quad t_g = \sum_{1}^{n} (v_i e) t_{g_i}$$

Если $g \in H$, то в силу линейной независимости элементов t_{g_i} по $\mathrm{mod}(H, K, \varrho, \sigma)$, получаем $t_1 \varrho_{1,1}^{-1} \quad (v_1 t_1) e$, а это противоречит условию (3.1). Следовательно, каждый элемент $g \in F(G)$ принадлежит некоторой конечной нормалной подгруппе группы G.

Далее, если $(G, K, \varrho, \sigma) = KG$, то K — бирегулярно как гомоморфный образ кольца KG и для произвольного элемента $g \in G$ имеем

$$KG \quad KG(1 \quad g) KG = KGe, \; e^2 = e \in Z(KG).$$

Отсюда получаем

$$e = \sum_{i=1}^{n} x_i (1-g) y_i, \; 1-g = ex, \quad x_i, y_i, x \in KG,$$

и, следовательно,

$$\sum_{i \; 1}^{n} x_i (1-g) y_i (1 \quad g) = e(1 \quad g) \quad ex \quad 1 \quad g.$$

Далее,

$$\left[1 - \sum_{i \; 1}^{n} x_i (1 \quad g) y_i \right] (1 \quad g) \quad 0$$

и по [10, предложение 6]

$$1 - \sum_{i=1}^{n} x_i (1-g) y_i = z(1 + g + g^2 + \quad + g^{m-1}),$$

где $z \in KG$, а m — порядок элемента g. Принимая во внимание, что отображение

$$\psi \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g$$

является гомоморфизмом, из предыдущего равенства получаем, что $1 = am$ где $a = \psi(z)$.

Теорема доказана.

Лемма 3.2. Пусть KG — групповое кольцо локально нормальной группы G и кольца K. Если для каждой нормальной подгруппы H группы G подкольцо KH бирегулярно, то бирегулярно и кольцо KG.

Доказательство. Пусть $y = a_1 g_1 + \cdots + a_s g_s \in KG$, а H нормальная подгруппа группы G, порожденная элементами $g_1, g_2, \ldots, g_{s-1}, g_s$. Тогда двусторонний идеал $I = KHyKH$ кольца KH порождается центральным идемпотентом e кольца KH. Все сопряженные идемпотенты $e \quad e_1, e_2, \ldots, e_m$ к идемпотенту e по отношению всех внутренних автоморфизмов, индуцированных элементами группы G, принадлежат центру кольца KH и

$$I_1 = KGyKG = KGe_1 + KGe_2 + \cdots + KGe_m.$$

Если $e_{12} = e_1 + e_2 - e_1e_2$, то e_{12} — идемпотентный элемент и $KGe_1 + KGe_2 = KGe_{12}$. Мы можем повторить то же построение и положить $e_{123} = e_{12} + e_3 - e_{12}e_3$. Тогда снова $e_{123}^2 = e_{123}$ и $KGe_1 + KGe_2 + KGe_3 = KGe_{123}$. Продолжая так дальше, мы получим идемпотентный элемент $e_{123 \ldots m}$, который принадлежит центру KG и $I_1 = KGe_{123 \ldots m}$.

Лемма доказана.

Теорема 3.3 Если коммутативное кольцо K является бирегулярным и порядок каждого элемента из локально нормальной группы G обратим в K, то групповое кольцо KG бирегулярно.

Доказательство. Согласно леммы 3.2, можно предположить, что G конечная группа. Кольцо K регулярно и по теореме Виллямайора — Коннела [10] KG регулярно, а его двусторонний главный идеал I, порожденный элементом y, является суммой таких левых идеалов:

$$KGyKG = KGy_1 + KGy_2 + \cdots + KGy_r,$$

где $y = y_1, y_2, \ldots, y_r$ — все сопряженные элементы к элементу y по отношению автоморфизмов, индуцированных элементами G. В регулярном кольце сумма конечного числа главных левых идеалов есть левый идеал, порожденный идемпотентом. Следовательно, $KGyKG = KGe$, $e^2 = e$ и KGe является правым идеалом, что влечет за собою центральность идемпотента e [8, предложение 13].

Теорема доказана.

Следствие 3.4. Если бирегулярное кольцо K удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов и порядок каждого элемента из локально нормальной группы G обратим в K, то групповое кольцо KG бирегулярно.

Доказательство. По теореме Андрунакевича [1] K — прямая сумма простых колец, и снова можно предполагать ввиду леммы 3.2, что G конечная группа. Тогда по теореме 4.3 KG есть прямая сумма простых колец, а такое кольцо бирегулярно.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ГРУППОВОГО КОЛЬЦА В ПРЯМУЮ СУММУ ДВУСТОРОННИХ ИДЕАЛОВ

Если G — произвольная группа, то известно, что совокупность всех элементов конечного порядка, обладающих конечным числом сопряженных в группе G, образует нормальную подгруппу группы G, которую обозначим через G^+.

В дальнейшем существенную роль будет играть следующее утверждение: если кольцо с единицей разлагается в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов, то такое разложение будет единственным [6].

Теорема 4.1. Пусть KG — групповое кольцо группы G над кольцом K, в котором порядок каждого элемента $g \in G^+$ обратим. Если кольцо KG разлагается в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов, то группа G^+ конечна, и кольцо K разлагается в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов.

Доказательство. Пусть

(4.1) $$KG=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$$

разложение в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов кольца KG. Тогда

$$1=e_1+e_2+\cdots+e_n,$$

где e_i — центральные, попарно ортогональные идемпотенты кольца KG с конечными опорными подгруппами.

Кольцо K также разлагается в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов, ибо в противном случае для любого натурального числа t существует разложение кольца K в прямую сумму t двусторонних идеалов

(4.2) $$K=K_1\oplus K_2\oplus\cdots\oplus K_t,$$

которому соответствует разложение

$$KG=K_1G\oplus K_2G\oplus\cdots\oplus K_tG,$$

что невозможно из-за однозначности разложения (4.1). Пусть (4.2) — разложение в прямую сумму неразложимых двустронних идеалов и

$$1=f_1+f_2+\cdots+f_t,\quad f_if_j=\delta_{ij}f_j.$$

Используя однозначности разложения (4.1) и (4.2), мы можем считать, что

$$K_1G=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_m,\quad m<n.$$

Подгруппа H, порожденная опорными подгруппами идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, является конечной нормальной подгруппой группы G. Докажем, что $G^+=H$. Если $g\in G^+\setminus H$, то конечная группа H и элемент g, по лемме Дицмана, порождают конечную нормальную подгруппу H_1 группы G и

$$f=\frac{f_1}{(H_1:1)}\sum_{h\in H_1}h$$

центральный идемпотент кольца K_1G.

Очевидно, что $fe_i=\lambda_if$ $(\lambda_i\in K,\ 1\leq i\leq m)$, $\lambda_i^2f=\lambda_if$ и λ_i принадлежит центру кольца K_1. Сравнивая базисные элементы в равенстве $(\lambda_i^2-\lambda_i)f=0$, заключаем, что λ_i — центральный идемпотент кольца K_1. В силу неразложимости кольца K_1, для некоторого $i=i_1$ имеем $\lambda_{i_1}=f_1$, а $\lambda_i=0$ для $i\neq i_1$. Идемпотент e_{i_1} допускает разложение в сумму центральных идемпотентов $e_{i_1}-f$ и f, что противоречит неразложимости идеала I_{i_1}.

Теорема доказана.

Следствие 4.2. Пусть KG — групповое кольцо произвольной группы G над любым бирегулярным кольцом K, в котором порядок каждого элемента $g\in G^+$ обратим. Кольцо KG разлагается в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда группа G^+ конечна и кольцо K удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов.

Доказательство. Если G^+ конечная группа, по теореме 4.3 KG^+ разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов

$$KG = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_k,$$
$$1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_k.$$

Под действием группы всех внутренних автоморфизмов кольца KG, индуцированных элементами группы G, множество идемпотентов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ распадается на n классов. Если e_i — сумма всех элементов i-го класса, то e_i — центральный идемпотент кольца KG. Тогда

$$KG = KGe_1 + KGe_2 + \cdots + KGe_n$$

— разложение кольца KG в прямую сумму неразложимых двусторонних идеалов. Действительно, если $KGe_i = I' \oplus I''$, то $e_i = u + v$, где u и v попарно ортогональные идемпотенты центра KG, которые по теореме 2.4 принадлежат центру KG^+. Однако это противоречит однозначности разложения KG^+.

Теорема 4.3. Групповое кольцо KG разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда

(i) группа G конечна и ее порядок обратим в K;

(ii) кольцо K разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов.

Доказательство. Если кольцо KG разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов, то KG бирегулярное кольцо, что влечет за собою бирегулярность кольца K. Каждый главный двусторонний идеал кольца K будет прямым слагаемым в K и в силу однозначности разложения KG, аналогично как в доказательстве теоремы 4.1, заключаем, что K является прямой суммой минимальных двусторонних идеалов.

Если G бесконечная группа, то по теореме 3.1 она локально нормальна и в ней существует бесконечно возрастающая последовательность нормальных подгрупп группы G

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots,$$

которой соответствует бесконечно возрастающая последовательность двусторонних идеалов кольца KG

$$0 = I(H_0) \subset I(H_1) \subset \cdots \subset I(H_n) \subset \cdots$$

где $I(H_i)$ — двусторонний идеал кольца KG, порожденный элементами $1-h$, $h \in H_i$. Однако, это невозможно и, следовательно, G конечная группа и ее порядок, по теореме 3.1, обратим в K.

Пусть $K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s$ — разложение кольца K в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов. Тогда

$$KG = K_1G \oplus K_2G \oplus \cdots \oplus K_sG.$$

Центр Z_i кольца K_i — поле, и, по теореме Коннела [10], групповое кольцо Z_iG разлагается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов

$$Z_iG = I_{i_1} \oplus I_{i_2} \oplus \cdots \oplus I_{i_n}$$
$$f_i = l_{i_1} + l_{i_2} + \cdots + l_{i_n},$$

где f_i единица кольца K_iG.

Докажем, что

$$K_iG = K_iG_{e_{i_1}} + \dots + K_iG_{e_{i_n}}$$

является разложением в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов кольца K_iG.

Пусть I двусторонний идеал кольца K_iG, принадлежащий идеалу $K_iGe_{i_j}$ и $x=a_1g_1+\dots+a_rg_r\in I$. Так как $K_ia_1K_i=K_i$, то

$$f_i=\sum_{l=1}^{k}\beta_l a_1\gamma_l$$

и, кроме того,

$$\sum_{l=1}^{k}\beta_l a_1\gamma_l g_1+\dots+\sum_{l=1}^{k}\beta_l a_r\gamma_l g_r\in I.$$

Следовательно, среди элементов минимальной длины идеала I существует элемент вида

$$y=h_1+\delta_2h_2+\dots+\delta_th_t,\quad h_i\in G.$$

Тогда для любого $a\in K_i$, $ay-ya\in I$ и из минимальности длины элемента y заключаем, что $ay=ya$, т. е. все коэффициенты y принадлежат центру кольца K_i. Отсюда, $I\cap I_{i_j}=J_i$, что влечет за собою $I=K_iGe_{i_j}$.

Теорема доказана.

§ 5. СКРЕЩЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ВСЕ ИДЕМПОТЕНТЫ В КОТОРЫХ ИМЕЮТ КОНЕЧНЫЕ ОПОРНЫЕ ПОДГРУППЫ

Пусть (G, K, ϱ, σ) — произвольное скрещенное произведение группы G и кольца K, а $\{g\}$ — циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом $g\in G$. Тогда подкольцо $(\{g\}, K, \varrho, \sigma)$ кольца (G, K, ϱ, σ) будем называть циклическим.

Предположим, что g имеет конечный порядок n. Тогда элементы

$$t_g^0=t_1\varrho_{1,1}^{-1},\ t_g,\ \dots,\ t_g^{n-1}$$

тоже составляют K-базис кольца $(\{g\}, K, \varrho, \sigma)$.

Положим

$$t_g^n=t_1\varrho_{1,1}^{-1}\cdot\varrho_g,$$

где $\varrho_g\in K$. Отсюда $\varrho_g^{g^\sigma}=\varrho_g$.

Далее, если g — элемент бесконечного порядка, то в циклическом подкольце $(\{g\}, K, \varrho, \sigma)$ элементы $\dots, t_g^{-1}, t_g^0=t_1\varrho_{1,1}^{-1}, t_g, t_g^2, \dots$ являются K-базисом.

Отметим, что элемент $t_1\varrho_{1,1}^{-1}-t_g$ обратим в кольце (G, K, ϱ, σ) тогда и только тогда, когда g имеет конечный порядок и $1-\varrho_g$ обратим в K.

Обозначим через $M(G, K)$ совокупность всех таких элементов g конечного порядка группы G, что

1) порядок элемента g обратим в K;

2) Существует такой обратимый элемент $\varepsilon \in K$, что g и $t_g \varepsilon$ имеют одинаковые порядки.

Если g имеет порядок n, то $(t_g \varepsilon)^n = t_1 \varrho_{1,1}^{-1}$ тогда и только тогда, когда

$$\varrho_g^{-1} = \varepsilon^{(g\sigma)^{n-1}} \varepsilon^{(g\sigma)^{n-2}} \dots \varepsilon^{g\sigma} \varepsilon,$$

т. е. ϱ_g является нормой элемента из K в циклическом подкольце $(\{g\}, K, \varrho, \sigma)$.

Теорема 5.1. Пусть в кольце (G, K, ϱ, σ) все идемпотенты имеют конечные опорные подгруппы. Тогда множество $M(G, K)$ порождает локально конечную нормальную подгруппу группы G и если некоторая циклическая подгруппа, порожденная элементом $g \in M(G, K)$, не является нормальной подгруппой группы G, то G локально конечная группа.

Доказательство. Пусть $g \in M(G, K)$ и $g_1^{-1} g g_1 \bar{\in} \{g\}$. Если G не локально конечная группа, то G содержит такую бесконечную конечно порожденную подгруппу H, что $g, g_1 \in H$. Среди всех конечных систем образующих элементов группы H, содержащих g и g_1, выбираем систему с минимальным числом элементов. Если $g, g_1, g_2, \dots, g_r$ одна из этих систем, а n — порядок элемента g, то

$$(5.1)\qquad [(t_g\varepsilon)+\cdots (t_g\varepsilon)^{n-1}](t_{g_1}+\cdots+t_{g_r}) \neq (t_{g_1}+\cdots+t_{g_r})[(t_g\varepsilon)+\cdots+(t_g\varepsilon)^{n-1}].$$

Действительно, если имеет место равенство, то либо среди слагаемых левой части (5.1) встречается базисный элемент t_{gg_1}, хотя бы дважды, либо правая часть (5.1) содержит базисный элемент t_{gg_1}, а это влечет за собой равенство вида $gg_1 = g^\alpha g_i$, или $gg_1 = g_i g^\beta$. Ввиду выбора элемента g_1, $i > 1$, а это дает возможность исключить элемент g_i из выбранной системы образующих элементов группы H, что ведет к противоречию.

Далее,

$$e = \frac{1}{n} [t_1 \varrho_{1,1}^{-1} + (t_g\varepsilon)+\cdots+(t_g\varepsilon)^{n-1}]$$

является идемпотентом кольца (G, K, ϱ, σ) и в силу (5.1)

$$e(t_{g_1}+\cdots+t_{g_r}) \neq (t_{g_1}+\cdots+t_{g_r})e.$$

Отсюда

$$a_1 = e(t_{g_1}+\cdots+t_{g_r})e - e(t_{g_1}+\cdots+t_{g_r}) \neq 0$$

или

$$a_2 = e(t_{g_1}+\cdots+t_{g_r})\,e - (t_{g_1}+\cdots+t_{g_r})\,e \neq 0.$$

Если $a_i \neq 0$, то $f = e + a_i$ является идемпотентом кольца (G, K, ϱ, σ), опорная подгруппа которого совпадает с H, что доказывается вышеприведенным рассуждением, а это противоречит условию теоремы.

Пусть L — подгруппа группы G, порожденная множеством $M(G, K)$. Если $g \in M(G, K)$, а $h \in G$, то

$$t_h^{-1}(t_g\varepsilon)t_h = t_{h^{-1}gh}\,\beta,$$

где β — обратимый элемент кольца K, и порядок этого элемента совпадает с порядком g. Следовательно, $h^{-1}gh \in M(G, K)$. Далее, если некоторое конечное подмножество множества $M(G, K)$ порождает бесконечную подгруппу, то ввиду леммы Дицмана, в ней существует циклическая подгруппа, которая не является нормальной подгруппой, а это противоречит вышедоказанному утверждению. Таким образом, L — локально конечная нормальная подгруппа группы G.

Теорема 5.2. Пусть G не локально конечная группа и групповое кольцо KG имеет идемпотенты только с конечными опорными подгруппами, а L — подгруппа, порожденная множеством $M(G, K)$. Тогда

(i) каждая подгруппа группы L нормальна в G;

(ii) если для каждого n, являющегося порядком некоторого элемента из L, существует в кольце K обратимый элемент порядка n, то L принадлежит центру группы G;

(iii) если K — поле и L — гамильтонова группа, то алгебра KL не содержит нетривиальных нильпотентных элементов.

Доказательство. Очевидно, что $M(G, K) = L$ и по теореме 5.1 каждая циклическая подгруппа группы L нормальна в G;

Далее, если $g \in L$ не принадлежит центру G и имеет порядок n, то по предположению существует элемент $\varepsilon \in K$ порядка n и такой элемент $g_1 \in G$, что $g_1 g \neq g g_1$. Тогда существуют такие $g_2, g_3, \ldots, g_m$, что g, $g_1, \ldots, g_m$ порождают бесконечную подгруппу H и обладают таким же свойством, как в теореме 5.1. В силу конечности каждой опорной подгруппы заключаем, что (см. доказательство теоремы 5.1)

$$[(g\varepsilon)+\cdots+(g\varepsilon)^{n-1}](g_1+\cdots+g_m)$$
$$=(g_1+\cdots+g_m)[(g\varepsilon)+\cdots+(g\varepsilon)^{n-1}].$$

Используя свойства выбранной системы образующих, отсюда вытекает, что $gg_1\varepsilon = g_1(g\varepsilon)^l$ и $\varepsilon^{l-1} = 1$, $1 \leq l \leq n-1$, а это возможно, когда $l = 1$. Следовательно, g принадлежит центру группы G.

Пусть алгебра KL содержит нетривиальный нильпотентный элемент $x = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_s g_s$ и H — его опорная подгруппа. Ввиду того, что характеристика поля K не делит порядок группы H, то первичный радикал алгебры KH ноль и KH имеет идемпотент e, не принадлежащий центру KH.

Пусть $z \in KH$, $ez \neq ze$ и $a = eze - ez \neq 0$ (или $a = eze - ze \neq 0$). Исходя из того, что опорная подгруппа N элемента a конечная нормальная подгруппа и ее группа автоморфизмов конечна, в группе G существует такая конечно порожденная бесконечная подгруппа $G_1 = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$, что $h_i g = g h_i$ для любого $g \in N$ и $i = 1, 2, \ldots, r$. Далее, из равенств

$$a(h_1+\cdots+h_r) = (h_1+\cdots+h_r)\,a,$$
$$e(h_1+\cdots+h_r) = (h_1+\cdots+h_r)\,e$$

вытекает, что $f = e + (h_1+\cdots+h_r)a$ является идемпотентом. Действительно, принимая во внимание, что $ae = a^2 = 0$ и $ea = a$, получаем $f^2 = f$, а это невозможно так как f — идемпотент с бесконечной опорной подгруппой. Теорема доказана.

Определение. Идеал I кольца K называется σ-допустимым, если $I^{g\sigma} \subseteq I$ для каждого $g \in F$.

Лемма 5.3. Пусть (G, K, ϱ, σ) — произвольное скрещенное произведение, а I двусторонний σ-допустимый идеал кольца K. Тогда

$$(G, K, \varrho, \sigma)/(G, K, \varrho, \sigma)I \cong (G, K/I, \bar{\varrho}, \bar{\sigma}),$$

где $\bar{\varrho}_{g,h} = \varrho_{g,h} + I$, а $(\alpha + I)^{g\bar{\sigma}} = \alpha^{g\sigma} + I$.

Доказательство. Очевидно, что $(G, K, \varrho, \sigma)I$ является двусторонним идеалом кольца (G, K, ϱ, σ) и $\bar{\varrho}_{g,h}$ — обратимые элементы фактор-кольца K/I. Если $\alpha^{g\sigma} + I = \beta^{g\sigma} + I$, то $(\alpha - \beta)^{g\sigma} \in I$ и $\alpha - \beta \in I$, так как I — σ-допустимый идеал. Следовательно, отображение

$$g\bar{\sigma}\colon\ \alpha + I \to \alpha^{g\sigma} + I$$

является автоморфизмом кольца K/I.

Определим отображение

$$\varphi\colon\ (G, K, \varrho, \sigma) \to (G, K/I, \bar{\varrho}, \bar{\sigma})$$

следующим образом:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_{g_i} \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_{g_i}(\alpha_i + I).$$

Ясно, что φ является гомоморфизмом с ядром $(G, K, \varrho, \sigma)I$.

Лемма доказана.

Лемма 5.4. Пусть (G, K, ϱ, σ) — произвольное скрещенное произведение группы G и кольца K, а H — нормальная подгруппа группы G. Тогда

$$(G, K, \varrho, \sigma) \cong (G/H,\ (H, K, \varrho, \sigma),\ \zeta,\ \tau)$$

для некоторых ζ и τ.

Доказательство. Обозначим чрез $a, b, \ldots$ элементы группы G/H, а через $g_a, g_b, \ldots$ фиксированную систему представителей смежных классов $a, b, \ldots$ группы G по подгруппе H. Далее, из соотношения

$$ab = g_a g_b H = g_{ab} H$$

следует, что

$$g_a g_b = g_{ab} m_{a,b},\quad m_{a,b} \in H.$$

Ради краткости, вместо t_{g_a} в дальнейшем будем писать t_a. Тогда любое x из (G, K, ϱ, σ) можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_{a_i} v_i,$$

где $t_{a_i} = t_{g_{a_i}}$, $0 \neq v_i \in (H, K, \varrho, \sigma)$ и

$$t_a t_b = t_{ab} t_{m_{a,b}} \varrho^{-1}_{g_{ab}, m_{a,b}} \varrho_{g_a, g_b}.$$

Если положим

$$(5.2)\qquad \zeta_{a,b} = t_{m_{a,b}} \varrho^{-1}_{g_{ab}, m_{a,b}} \varrho_{g_a, g_b},$$

то $t_a t_b = t_{ab} \zeta_{a,b}$, где $\zeta_{a,b} \in (H, K, \varrho, \sigma)$. Далее, отображение

$$(5.3)\qquad a\tau: v \to v^{a\tau} = t_a^{-1} v t_a$$

является автоморфизмом кольца (H, K, ϱ, σ). Следовательно, кольцо (G, K, ϱ, σ) можно рассматривать как скрещенное произведение $(G/H, (H, K, \varrho, \sigma), \zeta, \tau)$ фактор группы G/H и кольца (H, K, ϱ, σ) при системе факторов ζ и отображение τ.

Лемма 5.5. Любое скрещенное произведение (G, K, ϱ, σ) полициклической группы G и нетерова коцьца K является нетеровым кольцом.

Лемма доказана Ф. Холлом для групповых алгебр и это доказательство легко переносится для любых скрещенных произведений.

Теорема 5.6. Пусть (G, K, ϱ, σ) скрещенное произведение правоупорядоченной группы G и коммутативного нетерова кольца K. Если каждый первичный идеал кольца K σ-допустимый, то любой идемпотент кольца (G, K, ϱ, σ) имеет тривиальную опорную подгруппу.

Доказательство. Если Q_i — произвольный примарный идеал кольца K, а P_i — соответствующий ему первичный идеал кольца K, то $P_i^{s_i} \subseteq Q_i$ для некоторого натурального числа $s_i \geq 1$ [6] и, согласно лемме 5.3,

$$(G, K, \varrho, \sigma)/(G, K, \varrho, \sigma)P_i \cong (G, K/P_i, \bar{\varrho}, \sigma).$$

Кольцо $(G, K/P_i, \bar{\varrho}, \sigma)$ не содержит делителей нуля [2], так как K/P_i — область целостности [11]. Следовательно, если

$$e = \sum_{g \in G} t_g a_g, \quad a_g \in K,$$

является идемпотентом кольца (G, K, ϱ, σ), то один из идемпотентов e или $t_1 \varrho_{1,1}^{-1} - e$ принадлежит $(G, K, \varrho, \sigma) P_i$. Далее, из $e^2 = e((t_1 \varrho_{1,1}^{-1} - e)^2 = t_1 \varrho_{1,1}^{-1} - e)$ следует $e^s = e((t_1 \varrho_{1,1}^{-1} - e)^s = t_1 \varrho_{1,1}^{-1} - e)$ для любого целого числа $s > 0$, а отсюда вытекает, принимая во внимание $P_i^{s_i} \subseteq Q_i$, что при $g \neq 1$ имеем $a_g \in Q_i$. Поскольку пересечение всех примарных идеалов Q_i есть нуль [6], то $a_g = 0$, $g \neq 1$, что доказывает теорему.

Теорема 5.7. Пусть в центре группы G содержится такая конечно порожденная подгруппа H, что G/H — правоупорядоченная группа и K — коммутативное нетерово кольцо. Если $\varrho_{g,h} = \varrho_{h,g}$ для любых двух перестановочных элементов g и h группы G, то все идемпотенты кольца (G, K, ϱ) имеют конечные опорные подгруппы.

Доказательство. Согласно лемме 5.4,

$$(G, K, \varrho) \cong (G/H, (H, K, \varrho), \zeta, \tau),$$

где ζ и τ определяются формулами (5.2) и (5.3). Ввиду того, что H лежит в центре группы G, то

$$t_{g_a^{-1} h_j g_a} \varrho_{g_a^{-1}, h_j g_a} \varrho_{h_j, g_a} = t_{h_j} \varrho_{g_a^{-1}, g_a h_j} \varrho_{g_a, h_j}$$

$$=t_{h_j}\varrho_{1,h_j}\varrho_{g_a^{-1},g_a}=\varrho_{1,1}\varrho_{g_a^{-1},g_a}t_{h_j},\quad h_j\in H.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} t_{h_j}a_j\right)^{a_\tau}=\sum_{j=1}^{m} t_{h_j}a_j,\quad a\in G/H,$$

т. е. $\tau=1$. Тогда на основании леммы 5.4 и 5.5 и предыдущей теоремы получаем, что каждый идемпотент кольца (G, K, ϱ) принадлежит подкольцу (H, K, ϱ). Далее,

$$(H, K, \varrho)\cong(H/P(H), (P(\mathrm{H}), K, \varrho), \zeta),$$

где $P(H)$ — периодическая часть группы H, и снова повторяя вышеприведенное рассуждение, заключаем, что каждый ξ-элемент кольца (G, K, ϱ) принадлежит подкольцу $(P(H), K, \varrho)$.

Теорема доказана.

Если подгруппа H не принадлежит центру группы G, то теорема 5.7 неверна. Действительно, рассмотрим групповую алгебру KG группы

$$G=\{a, b\,|\,a^4=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\}$$

над полем комплексных чисел K. Пусть ε—первообразный корень 4-ой степени из единицы и

$$e_1=\frac{1}{4}(1+\varepsilon a+\varepsilon^2a^2+\varepsilon^3a^3),$$

$$e_2=\frac{1}{4}(1+\varepsilon^3a+\varepsilon^2a^2+\varepsilon a^3).$$

Тогда элемент $e=2e_1-e_2+2e_1b^{-1}-e_2b$ является идемпотентным элементом алгебры KG с бесконечной опорной подгруппой.

Следствие 5.8. Пусть в центре группы G содержится такая конечно порожденная подгруппа H, что G/H — правоупорядоченная группа и K — коммутативное кольцо. Тогда каждый идемпотент группового кольца KG имеет конечную опорную подгруппу.

Доказательство. Если

$$x=\sum_{g\in G}a_g g,\quad a_g\in K,$$

является идемпотентом, то подкольцо K_1, порожденное элементами $a_g\neq 0$ и единицей кольца K, является нетеровым, как конечно порожденное коммутативное кольцо, что дает возможность применить теорему 5.7 к групповому кольцу K_1G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрунакиевич, В. А. Бирегулярные кольца. Мат. сборник, **39**, № 81, 447—464.
2. Бовди, А. А. Скрещенные произведения полугруппы и кольца. Сиб. мат. ж., **4** (1963), № 3, 481—499.
3. Бовди, А. А. Скрещенные произведения полугруппы и простого кольца. Сиб. мат. ж., **5** (1964), № 2, 465—467.

4. Бовди, А. А. О скрещенных произведениях полугруппы и кольца. Доклады АН СССР, **137** (1961), № 6, 1267—1269.
5. Бовди, А. А., С. В. Миховски. Идемпотенты скрещенных произведений. Доклады АН СССР (в печати).
6. Ван дер Варден, Б. Л. Современная алгебра, т. I и II. М., 1947.
7. Джекобсон, Н. Теория колец. М., 1947.
8. Скорняков, Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М., 1961.
9. Coleman, D. B. Idempotents in group rings. Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), No. 4, 962.
10. Connell, I. G. On the group ring. Canad. J. Math., **15** (1963), No. 4, 650—685.
11. Lambek, J. Lectures on rings and modules. Waltham., Mass., 1966.
12. Neuman, B. H. Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math., Soc., **1** (1951), No. 1, 178—187.
13. Passman, D. S. Central idempotents in group rings. Proc. Amer. Math. Soc., **22** (1969), No. 2, 555—556.
14. Rudin, W., H. Schneider. Idempotents in group rings. Duke Math. J., **31** (1964), No. 4, 585—602.

Ужгородский государственный у-т

Поступило 4. VII. 1970 г.

ИДЕМПОТЕНТИ В КРЪСТОСАНИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

А. А. Бовди и С. В. Миховски

(*Резюме*)

В тази работа се изследват опорните подгрупи на идемпотенти в кръстосани произведения на произволни групи и пръстени.

В § 2 се доказва, че опорната подгрупа на всеки централен идемпотент в произволно кръстосано произведение е крайна. Този факт по-нататък съществено се използува при изучаването на групови пръстени.

В § 3 се изучават бирегулярните групови пръстени. Необходими и достатъчни условия, при които един групов пръстен се разлага в директна сума от минимални неразложими двустранни идеали и в директна сума от неразложими идеали, са приведени в § 4.

В последната част на работата се изучава строежът на кръстосаните произведения, в които всички идемпотенти имат крайни опорни подгрупи. Следствие 5.8 обобщава теорема 3.4, а теоремите 5.1 и 5.2 в известен смисъл са обратни на теорема 4.3 на Рудин и Шнайдер [14].

IDEMPOTENTS OF CROSS PRODUCTS

A. A. Bovdi and S. V. Mihovski

(*Summary*)

The supporting subgroups of idempotents of cross products in arbitrary groups and rings are considered.

In paragraph 2 is proved that the supporting subgroup of every central idempotent in an arbitrary cross product is finite. The fact is used essentially further on when studying the group rings.

In paragraph 3 the biregular group rings are examined. Paragraph 4 contains the necessary and sufficient conditions for expansion of a group ring into a direct sum of minimal non-expandable two-sided ideals and into a direct sum of non-expandable ideals.

The last part of the paper deals with the composition of cross products whose idempotents have finite supporting subgroups. The corollary 5.8 generalizes the theorem 3.4 and the theorems 5.1 and 5.2 are in a sense reverse to the theorem 4.3 of Rudin and Schneider [14].