БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

НАМИРАНЕ БРОЯ НА КОРИДОРИТЕ В ПРАВОЪГЪЛНИК

Христо Хитов

Намирането на ε-ентропията и ε-капацитета на пространството от непрекъснатите функции относно хаусдорфова метрика е еквивалентно на намирането на броя на коридорите в правоъгълник [1].

В [1, стр. 41] е формулирана следната задача:

„Нека m и n са две натурални числа и нека един правоъгълник с дължина на основата n и височина m е разделен на квадрати със страна, равна на единица. Да се намери броят на коридорите, образувани от тези квадратчета, като под коридор тук разбираме такова множество от квадрати, което удовлетворява следните условия:

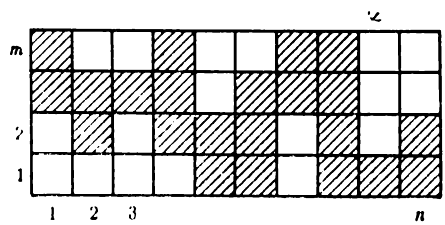
а) всеки коридор съдържа квадратче от всяка вертикална ивица на правоъгълника;

б) вертикалните ивици на коридора са свързани съвкупности (под „вертикална ивица на коридора“ разбираме квадратчета от коридора, лежащи в една и съща вертикална ивица на правоъгълника);

в) поне едно квадратче от всяка вертикална ивица (без последната) на коридора има обща страна с едно квадратче от съседната вдясно вертикална ивица на коридора.

Натуралните числа n и m ще наричаме съответно дължина и ширина на коридора.“

На фиг. 1 е даден пример на коридор с дължина 10 и ширина 4



Фиг. 1

В [1] е дадена рекурентна формула за пресмятане на броя на коридорите (2.7), „чието решение е свързано със значителни трудности и не е намерено“ [1, стр. 43]. Направени са само оценки за броя на коридорите, който се означава с $K_{n,m}$.

От Бл. Сендов бяха изказани следните две хипотези:

1. $K_{n,m}$ е полином на m от степен $2n$.

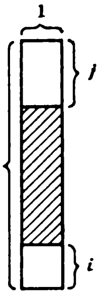
2. Корен $2n$-ти от старшия коефициент $\lambda_{n,m}$ на този полином при $n \to \infty$ клони към $e^{-1/2}$.

Втората хипотеза е публикувана в [2, стр. 148] във вида

$$\lambda_{n,m} > e^{-1/2} \quad \text{и} \quad \lim \lambda_{n,m} = e^{-1/2}$$

Тук в раздел 1. се намира рекурентна формула за броя на коридорите, в раздел 2. се доказва хипотеза 1. и се намира рекурентна формула за старшия коефициент на полинома, като са посочени 50 стойности за λ_{2n} и $(\lambda_{2n})^{1/2n}$ с по 16 значещи цифри, а в раздел 3. се опровергава хипотеза 2. поне във вида, в който е дадена в [2].

В [3] са разгледани доста по-пълно разделите 1. и 3. на настоящата работа, като за $\lambda_{n,m}$, записан там като λ_{2n}, са посочени само 32 стойности с по 6 значещи цифри.



Фиг. 2

1. Да означим с a_{ij}, $i, j=0, 1, 2, \ldots, m-1$; $i+j \le m-1$, вертикална ивица от коридор с ширина m, в която са включени квадратчетата с номер $i+1, i+2, \ldots, m-j$, броени от долу на горе върху съответната вертикална ивица на правоъгълника, в който е вписан въпросният коридор (фиг. 2).

Всеки елемент a_{ij} може да се разглежда като коридор с дължина единица и ширина m. Нека с $L_{n,m}$ означим съвкупността от най-десните вертикални ивици на всички коридори с дължина n и ширина m. Нека с $l(L_{n,m})$ означим броя на елементите в съвкупността $L_{n,m}$. Тъй като всеки елемент на $L_{n,m}$, който е от вида a_{ij}, характеризира точно един коридор, то

$$l(a_{ij})=1, \tag{1}$$

$$l(L_{n,m})=\lambda_{n,m}. \tag{2}$$

Очевидно е, че при $n>1$ в $L_{n,m}$ ще имаме и еднакви елементи (защото има различни коридори, които имат една и съща най-дясна вертикална ивица).

Съвкупността $L_{1,m}$ е без еднакви елементи. Нея ще считаме за основна и ще бележим с V_0:

$$V_0=L_{1,m}=\{a_{ij}\}, \quad i, j=0, 1, 2, \ldots, m-1; \; i+j\le m-1, \tag{3}$$

или

$$\begin{array}{ccccc}
a_{0,m-1} & & & & \\
a_{0,m-2} & a_{1,m-2} & & & \\
a_{0,m-3} & a_{1,m-3} & a_{2,m-3} & & \\
\ldots & & & & \\
a_{0,1} & a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{m-2,1} \\
a_{0,0} & a_{1,0} & a_{2,0} & \ldots & a_{m-2,0} \quad a_{m-1,0}.
\end{array} \tag{4}$$

Не е трудно да се види, че

$$l(V_0)=l(L_{1,m})=\sum_{s=1}^{m} s=\binom{m+1}{2}. \tag{5}$$

Всички коридори с дължина $n+1$ и ширина m, които имат n-та вертикална ивица a_{ij}, $i+j\le m-1$, се характеризират със съвкупността

$$\{a_{pq}\}, \quad 0\le p\le m-1-j; \quad 0\le q\le m-1-i; \quad p+q\le m-1. \tag{6}$$

Следователно, ако познаваме $L_{n,m}$, лесно бихме могли да намерим и $L_{n+1,m}$, а оттам и $K_{n+1,m} = l(L_{n+1,m})$.

Две вертикални ивици a_{ij} и a_{ji} са симетрични относно надлъжната ос на правоъгълника, в който е вписан коридорът. От това следва, че броят на коридорите с дължина $n+1$ и ширина m, които имат n-та вертикална ивица a_{ij}, е равен на броя на коридорите със същите размери, които имат n-та вертикална ивица a_{ji} (поради симетричността на съвкупностите от $n+1$-вите вертикални ивици в двата случая). Поради това ще считаме a_{ij} и a_{ji} за неразлични и ще пишем

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{7}$$

Ще използваме и означението V_i, $V_i \subset V_0$, по следния начин:

$$V_i' = \{a_{pq}\}, \quad i \le p \le m-1, \quad 0 \le q \le m-1-p, \tag{8}$$

$$V_i'' = \{a_{pq}\}, \quad 0 \le p \le m-1-q, \quad i \le q \le m-1. \tag{9}$$

Поради (7) можем да считаме V_i' и V_i'' за неразлични и коя да е двете съвкупности да означим с V_i. Тогава V_i ще има един от двата вида:

$$\begin{array}{llll} a_{i,m-1-i} & & & \\ a_{i,m-2-i} & a_{i+1,m-1-i} & & \\ \dots & & & \\ a_{i,1} & a_{i+1,1} & \dots\ a_{m-2,1} & \\ a_{i,0} & a_{i+1,0} & \dots\ a_{m-2,0} & a_{m-1,0} \end{array} \tag{10}$$

или

$$\begin{array}{llll} a_{0,m-1} & & & \\ a_{0,m-2} & a_{1,m-2} & & \\ \dots & & & \\ a_{0,i+1} & a_{1,i+1} & \dots\ a_{m-2-i,i+1} & \\ a_{0,i} & a_{1,i} & \dots\ a_{m-2-i,i} & a_{m-1-i,i}. \end{array} \tag{11}$$

Не е трудно да се види, че

$$l(V_i) = \sum_{s=1}^{m-i} s = \binom{m-i+1}{2}. \tag{12}$$

Като вземем пред вид (6), можем да въведем оператора f:

$$f(a_{ij}) = \{a_{pq}\} \tag{13}$$

(за p и q са в сила ограниченията от (6)).

Следователно под $f(a_{ij})$ ще разбираме съвкупността от $n+1$-вите вертикални ивици на всички коридори с ширина m, които имат n-та вертикална ивица a_{ij}. Лесно се вижда, че този оператор е линеен, т. е.

$$f(\alpha a_{ij} + \beta a_{pq}) = \alpha f(a_{ij}) + \beta f(a_{pq}). \tag{14}$$

Тъй като $L_{n,m}$ е съвкупността от всички n-ти вертикални ивици, то

$$f(L_{n,m})=L_{n+1}. \tag{15}$$

От (3), (8), (9) и (13) следва, че

$$f(a_{ij})=V_0-V''_{m-i}-V'_{m-j}$$

или поради приетата неразличимост на V'_s и V''_s

$$f(a_{ij})=V_0-V_{m-i}-V_{m-j},\quad i,\ j\leq m-1, \tag{16}$$

като $V_m=\emptyset$.

Понеже $V_t=\{a_{ij}\}$, $t\leq i\leq m-1-j$; $0\leq j\leq m-1-t$, то

$$V_t=\sum_{j=0}^{m-1-t}\ \sum_{i=t}^{m-1-j} a_{ij},\quad t=0,\ 1,\ldots,\ m-1, \tag{17}$$

и като вземем под внимание (14) и (16), ще получим

$$f(V_t)=\sum_{j=0}^{m-1-t}\ \sum_{i=t}^{m-1-t} f(a_{ij}), \tag{17a}$$

или

$$f(V_t)=\binom{m-t+1}{2}V_0-\sum_{s=1}^{m-t}s(V_s+V_{t+s}),\quad t=0,1,\ldots,\ m-1. \tag{18}$$

Сумирането в (16), (17) и (18) е условно — имаме пред вид изброяването на елементите a_{ij} или на техните съвкупности от вида V_t. Това оправдава и (17а).

Тъй като $V_m=\emptyset$, то

$$f(V_0)=\binom{m+1}{2}V_0-2\sum_{s=1}^{m-1}.\,sV_s, \tag{19}$$

$$\underset{1\leq t\leq m-1}{f(V_t)}=\binom{m-t+1}{2}V_0-\sum_{s=1}^{m-t}s(V_s+V_{t+s}). \tag{20}$$

Теорема 1.1. Съвкупността $L_{n,m}$ е линейна комбинация на V_s, $s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1$.

Доказателство. Доказателството ще извършим по метода на пълната математическа индукция.

При $n=1$ теоремата е вярна. От (3) следва

$$L_{1,m}=\sum_{s=0}^{m-1}C_s^{(1)}V_s,\quad C_0^{(1)}=1,\quad C_s^{(1)}=0(1\leqq s\leqq m-1).$$

при $n=2$

$$L_{2,m}=f(L_{1,m})=f(V_0)=\binom{m+1}{2}V_0-2\sum_{s=1}^{m-1}sV_s,$$

т. е.

$$L_{2,m}=C_0^{(2)}V_0-\sum_{s=1}^{m-1}C_s^{(2)}V_s,$$

където

$$C_0^{(2)}=\binom{m+1}{2},\quad C_s^{(2)}=2s\ (1\leqq s\leqq m-1).$$

Нека допуснем, че

$$L_{n,m}=\sum_{s=0}^{m-1}C_s^{(n)}V_s,$$

или по-конкретно

(20a) $$L_{n,m}=C_0^{(n)}V_0-\sum_{s=1}^{m-1}C_s^{(n)}V_s.$$

Тогава от (15), (19), (20) и (20a) следва

$$L_{n+1,m}=f(L_{n,m})=f\left[C_0^{(n)}V_0-\sum_{s=1}^{m-1}C_s^{(n)}V_s\right]=C_0^{(n)}f(V_0)-\sum_{s=1}^{m-1}C_s^{(n)}f(V_s),$$

или

$$L_{n+1,m}=C_0^{(n+1)}V_0-\sum_{s=1}^{m-1}C_s^{(n+1)}V_s,$$

където

$$C_0^{(n+1)}=\binom{m+1}{2}C_0^{(n)}-\sum_{s=1}^{m-1}\binom{m-s+1}{2}C_s^{(n)}$$

(21) $$\underset{1\leqq s\leqq m-1}{C_s^{(n+1)}}=2sC_0^{(n)}-s\sum_{t=1}^{m-s}C_t^{(n)}-\sum_{t=1}^{s-1}(s-t)C_t^{(n)}.$$

С това теоремата е доказана, т. е.

(22) $$L_{n,m}=C_0^{(n)}V_0-\sum_{s=1}^{m-1}C_s^{(n)}V_s$$

за всяко $n\geqq 1$, като при $n=1$ $C_0^{(1)}=1$ и $C_s^{(1)}=0$, $1\leqq s\leqq m-1$, и за всяко $n\geqq 2$

(23) $$C_0^{(n)}=\binom{m+1}{2}C_0^{(n-1)}-\sum_{s=1}^{m-1}\binom{m-s+1}{2}C_s^{(n-1)},$$

(24) $$\underset{1\leqq s\leqq m-1}{C_s^{(n)}}=2sC_0^{(n-1)}-s\sum_{t=1}^{m-s}C_t^{(n-1)}-\sum_{t=1}^{s-1}(s-t)C_t^{(n-1)}.$$

От (2) и (22) следва

$$K_{n,m} - l(L_{n,m}) = C_0^{(n)} l(V_0) \quad \sum_{s=1}^{m-1} C_s^{(n)} l(V_s),$$

а като се има пред вид (12),

$$K_{n,m} = \binom{m+1}{2} C_0^{(n)} - \sum_{s=1}^{m-1} \binom{m-s+1}{2} C_s^{(n)}. \tag{25}$$

Като сравним (21) и (25), можем да запишем

$$C_0^{(n+1)} = K_{n,m}. \tag{26}$$

Тогава бихме могли да запишем

$$K_{n+1,m} = \binom{m+1}{2} K_{n,m} - \sum_{s=1}^{m-1} \binom{m-s+1}{2} C_s^{(n+1)}, \tag{27}$$

$$C_s^{(n+1)} = 2sK_{n-1,m} - s\sum_{t=1}^{m-s} C_t^{(n)} - \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) C_t^{(n)} \tag{28}$$

при начални условия

$$K_{0,m} = 1, \quad C_s^{(1)} = 0. \tag{29}$$

И така, ако знаем $K_{n,m}$ и $C_s^{(n+1)}$, бихме могли да намерим $K_{n+1,m}$, т. е. броя на коридорите с дължина $n+1$ и ширина m.

Въз основа на получените рекурентни формули са намерени

$$K_{1,m} = \frac{1}{2} m(m+1),$$

$$K_{2,m} = \frac{1}{6} m(m+1)(m^2+m+1),$$

$$K_{3,m} = \frac{1}{180} m(m+1)(11m^4 + 22m^3 + 28m^2 + 17m + 12),$$

$$K_{4,m} = \frac{1}{360} m(m+1)(8m^6 + 24m^5 + 41m^4 + 42m^3 + 22m^2 + 18m + 12).$$

Същите резултати са дадени и в [2, стр. 148].

Да се продължи по-нататък е твърде нецелесъобразно, тъй като пресмятанията стават обемисти и не бихме могли да отидем далеч. Численото пресмятане даже с автоматична сметачна машина също не би довело до далечен резултат поради много бързото нарастване на $K_{n,m}$ особено при по-големи стойности на m. Например $K_{1,4} = 10$, $K_{2,4} = 70$, $K_{5,4} = 29\,676$, $K_{8,4} = 12\,542\,162$.

2. В този раздел ще се спрем на хипотеза 1. Или по-точно ще докажем следната

Теорема 2.1. $K_{n,m}$ е полином на m от степен $2n$.

Доказателство. Лесно се установява, че

$$S_{n^k} = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + Q_k(n), \tag{30}$$

където $S_{n^k} = \sum_{i=1}^{n} i^k$, $Q_k(n)$ е полином на n от степен най-много k.

От (27), (28) и (29) при $n = 0$ имаме

$$K_{1,m} = \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m. \tag{31}$$

При $n = 1$

$$C_s^{(2)} = 2s, \tag{32}$$

$$K_{2,m} = \binom{m+1}{2} K_{1,m} - \sum_{s=1}^{m-1} \binom{m-s+1}{2} 2s$$

$$= \frac{1}{4}(m^2+m)^2 - m^2 \sum_{s=1}^{m-1} s + 2m \sum_{s=1}^{m-1} s^2 - \sum_{s=1}^{m-1} (ms - s^2).$$

Сумите няма да развиваме изцяло, а като използваме (30), ще отделим само тези събираеми, които имат най-висока степен относно m. Всички останали събираеми ще групираме в полином, който е от по-ниска степен.

Тогава

$$K_{2,m} = \frac{1}{6} m^4 + Q_3(m). \tag{33}$$

От намирането на

$$C_s^{(3)} = -\frac{4}{3} s^3 + 2ms^2 + Q_2(m, s) \tag{34}$$

определяме вида на $C_s^{(2n+1)}$.

Установихме, че теоремата е вярна при $n = k$, т. е.

$$K_{k,m} = \lambda_{2k} m^{2k} + Q_{2k-1}(m) \tag{35}$$

и

$$C_s^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{2k-1} \mu_{2k-i}^{(k+1)} s^{2k-i} m^{i-1} + Q_{2k-2}(m, s). \tag{36}$$

Нека намерим $K_{k+1,m}$ и $C_s^{(k+2)}$.

$$K_{k+1,m} = \binom{m+1}{2} K_{k,m} - \sum_{s=1}^{m-1} \binom{m-s+1}{2} C_s^{(k+1)}.$$

Като използваме (35) и (36) и отделим едночлените, чиято степен относно m е по-ниска от $2k+2$, получаваме

$$K_{k+1,m}=\lambda_{2(k+1)}m^{2(k+1)}+Q_{2n+1}(m), \tag{37}$$

където

$$\lambda_{2(k+1)}=\frac{1}{2}\lambda_{2k}-\sum_{q=1}^{2k-1}{}'\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}\mu_q^{(k+1)},$$

$$C_s^{(k+2)}=2sK_{k,m}-s\sum_{t=1}^{m-s}{}'C_t^{(k+1)}-s\sum_{t=1}^{s-1}C_t^{(k+1)}+\sum_{t=1}^{s-1}{}'t\ C_t^{(k+1)}.$$

Отново използваме (35), (36) и след известна обработка намираме

$$C_s^{(k+2)}=\sum_{i=1}^{2k+1}{}'\mu_{2(k+1)-i}^{(k+2)}s^{2(k+1)-i}m^{i-1}+Q_{2k}(m,s). \tag{38}$$

С това теоремата е доказана и хипотеза 1. потвърдена. От доказателството на теорема 2.1 е извлечена следната рекурентна формула за старшия коефициент в полинома, за който става дума в теоремата:

$$\lambda_{2(n+1)}=\frac{1}{2}\lambda_{2n}-\sum_{q=1}^{2n-1}{}'\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}\mu_q^{(n+1)}, \tag{39}$$

където

$$\mu_1^{(n+1)}=2\lambda_{2(n-1)}-\sum_{p=1}^{2n-3}{}'\frac{1}{p+1}\mu_p^{(n)},$$

$$\mu_2^{(n+1)}=\sum_{p=1}^{2n-3}{}'\mu_p^{(n)},$$

$$\mu_{\substack{q\\3\le q\le 2n-2}}^{(n+1)}=\left[\frac{(-1)^{q}-1}{q-1}+\frac{1}{q}\right]\mu_{q-2}^{(n)}+(-1)^q\sum_{p=q-1}^{2n-3}{}'\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q-1}\mu_p^{(n)},$$

$$\mu_{2n-1}^{(n+1)}=\left[\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n-1}\right]\mu_{2n-3}^{(n)}$$

при начални условия $\lambda_2=1/2$, $\lambda_4=1/6$, $\mu_1^{(2)}=2$.*

По формулата (39) точно са изчислени

$$\lambda_2=\frac{1}{2},\quad \lambda_4=\frac{1}{6},\quad \lambda_6=\frac{11}{180},\quad \lambda_8=\frac{1}{45},\quad \lambda_{10}=\frac{1837}{226800},\quad \lambda_{12}=\frac{4909}{1663200}$$

С помощта на автоматична сметачна машина IBM/360 са намерени 50 стойности на λ_{2n} и $(\lambda_{2n})^{1/2n}$ с по 15 знака (вж. табл. 1).

* По-подробно намирането на (37) и (39) може да се види в [3].

Таблица 1

	λ_{2n}	$\lambda_{2n}^{1/2n}$
01	0,500000000000000P 00	
02	0,166666666666666P 00	
03	0,611111111111111P—01	
04	0,222222222222222P—01	0,621367359213605P 00
05	0,809964726631393P—02	0,617798160154550P 00
06	0,295153920153920P—02	0,615418734684922P 00
07	0,107562099129559P—02	0,613727610824238P 00
08	0,391983108748982P—03	0,612462086504093P 00
09	0,142848685476414P—03	0,611479657701467P 00
10	0,520577114285832P—04	0,610694844352861P 00
11	0,189711613837679P—04	0,610053475114637P 00
12	0,691357635103794P—05	0,609519515208275P 00
13	0,251948402470633P—05	0,609068068069685P 00
14	0,918164409801981P—06	0,608681379516730P 00
15	0,334602591323694P—06	0,608346448028677P 00
16	0,121937741133210P—06	0,608053534162448P 00
17	0,444372312057363P—07	0,607795197876330P 00
18	0,161940634530426P—07	0,607565657764448P 00
19	0,590153085611975P—08	0,607360353251425P 00
20	0,215066876492878P—08	0,607175638506103P 00
21	0,783758697396944P—09	0,607008564048034P 00
22	0,285621712540051P—09	0,606856718071591P 00
23	0,104087856307379P—09	0,606718109267357P 00
24	0,379322766967385P—10	0,606591079008428P 00
25	0,138234916675391P—10	0,606474234660530P 00
26	0,503763387804830P—11	0,606366398316203P 00
27	0,183584261351961P—11	0,606266566945673P 00
28	0,669027996715051P—12	0,606173881104405P 00
29	0,243810911181778P—12	0,606087600127806P 00
30	0,888509310569358P—13	0,606007082296518P 00
31	0,323795514787215P—13	0,605931768847824P 00
32	0,117999366072071P—13	0,605861170990310P 00
33	0,430019866166486P—14	0,605794859283627P 00
34	0,156710236209998P—14	0,605732454895585P 00
35	0,571092176552732P—15	0,605673622360499P 00
36	0,208120593783477P—15	0,605618063546415P 00
37	0,758444666817942P—16	0,605565512602142P 00
38	0,276396632436597P—16	0,605515731703339P 00
39	0,100726001202971P—16	0,605468507454008P 00
40	0,367071397233395P—17	0,605423647828550P 00
41	0,133770171539440P—17	0,605380979561951P 00
42	0,487492714387329P—18	0,605340345913307P 00
43	0,177654811865632P—18	0,605301604741844P 00
44	0,647419566437594P—19	0,605264626845631P 00
45	0,235936246592220P—19	0,605229294522086P 00
46	0,859812019002221P—20	0,605195500316484P 00
47	0,313337487858914P—20	0,605163145930418P 00
48	0,114188193614309P—20	0,605132141266868P 00
49	0,416130979092097P—21	0,605102403592338P 00
50	0,151648770576969P—21	0,605073856799659P 00
51	0,552646901407847P—22	0,605046430757607P 00

3. От сравняването на e^{-1} $0{,}606530659713$ със стойностите на $(\lambda_{2n})^{1/2n}$ от табл. 1 се вижда, че при $n > 25$ $(\lambda_{2n})^{1/2n} < e^{-1/2}$ — противно на очакваното според хипотеза 2. От направените крайни разлики на функцията $(\lambda_{2n})^{1/2n}$ до 10-ти ред се вижда, че тя се изменя плавно. От всичко това можем да направим извода, че хипотеза 2. в изказания вид е невярна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл., Б. Пенков. ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснати функции. Известия Мат. инст. БАН, **6** (1962), 37—50.
2. Сендов, Бл. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. Успехи математ. наук. **24** (1969), вып. 5 (149), 141—178.
3. Хитов, Хр. Разработка на задачата за намиране броя на коридорите в правоъгълник. Дипломна работа. Соф. унив., 1969.

Постъпила на 25. IX. 1970 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА КОРИДОРОВ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Христо Хитов

(Резюме)

Определение ε-энтропии и ε-емкости пространства непрерывных функций в отношении хаусдорфовой метрики эквивалентно определению числа коридоров в прямоугольнике [1].

В [1] сформулирована следующая задача:

Пусть n и m два натуральных числа и пусть прямоугольник длиной основания n и высотой m разделен на квадраты, стороной равной единице; требуется найти число коридоров, составленных этими квадратиками, понимая коридор как множество квадратиков, удовлетворяющих следующим условиям:

а) в каждом коридоре содержится квадратик из каждой вертикальной полосы коридора;

б) вертикальные полосы коридора являются связанными совокупностями (под „вертикальной полосой коридора" понимаем квадратики коридора, лежащие в одной и той же вертикальной полосе прямоугольника);

в) хоть один квадратик из каждой вертикальной полосы (кроме последней) коридора имеет общую сторону с одним хоть квадратиком из смежной правой вертикальной полосы коридора.

Натуральные числа n и m называем соответственно длиной и шириной коридора [1, стр. 41].

На рис. 1 приведен пример коридора.

В [1] дана рекуррентная формула расчета числа коридоров (2.7), чье решение связано со значительными трудностями и пока не получено. Найдены только оценки числа коридоров, которое означается $K_{n,m}$:

$$n\log_2\binom{m+1}{2}\quad n\qquad \log_2 K_{n,m}\text{-}\ n\log_2\binom{m+1}{2}.$$

Бл. Сендовым были высказаны следующие гипотезы:

1. $K_{n,m}$ является полиномом m степени $2n$.

2. Корень квадратный старшего коэффициента $\lambda_{n,m}$ этого полинома при n клонит к $e^{\ 1/2}$.

Вторая гипотеза опубликована в [2, стр. 148] в виде

$$\lambda_{n,m}\geq e^{\ 1/2},\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_{n,m}\quad e^{\ 1/2}.$$

В настоящей работе выведена рекуррентная формула числа коридоров (28), (28) и (29). Доказана гипотеза 1. Выведена рекуррентная формула (39) старшего коэффициента в полиноме, упомянутом в этой гипотезе. Показано, что гипотеза 2, хотя бы в высказанном виде, неверна, так как при n $\cdot 25(\lambda_{2n})^{1/2n} < e^{-1/2}$ (табл. 1).

FINDING THE NUMBER OF CORRIDORS IN A RECTANGLE

Hristo Hitov

(*Summary*)

To find ε-entropy and ε-capacity of the space of continuous functions with respect to Hausdorff metric is equivalent to find the number of corridors in a rectangle [1].

In [1] the following problem is formulated.

Let n and m be two natural numbers and let a rectangle with a base length n and height m be divided into squares with a side equal to 1; find out the number of corridors formed by these squares. A corridor here means such a set of squares which satisfies the following conditions:

a) every corridor contains a square from every vertical strip of the rectangle;

b) the vertical strips of the corridor are connected sets (a vertical strip of the corridor will mean the corridor squares lying in one and the same vertical strip of the rectangle);

c) at least one square from every vertical strip of the corridor (with the exception of the last one) has a side common with at least one square from the right neighbouring vertical strip of the corridor.

The natural numbers n and m we shall call respectively length and width of the corridor [1, p. 41].

Figure 1 contains an example for a corridor.

In [1] a recurrent formula for calculating the number of corridors (2.7) is given but its solution is connected with several difficulties and for this reason it has not been found out yet. Only the estimates for the number of corridors denoted by $K_{n,m}$ are found out:

$$n\log_2\binom{m+1}{2}-n\leq\log_2 K_{n,m}\leq n\log_2\binom{m+1}{2}.$$

Bl. Sendov formulated the following hypotheses:

1. $K_{n,m}$ is a polynomial of m of degree $2n$.

2. The $2n$-th root of the senior coefficient $\lambda_{n,m}$ of this polynomial tends to n ▸ when $e^{-1/2}$

The second hypothesis was published in [2, p. 148] in the form

$$\lambda_{n,m} \quad e^{\ 1/2} \text{ and } \lim \lambda_{n,m} \quad e^{\ 1/2}.$$

In the present paper the recurrent formula for the number of corridors is derived (27), (28) and (29). The first hypothesis is proved. The recurrent formula (39) for the senior coefficient of the polynomial mentioned in this hypothesis is obtained. It is shown that the second hypothesis is not true, at least as formulated, because when n .25 $(\lambda_{2n})^{1/2n} < e^{-1/2}$ (Table 1).