БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ШЕНОН—КОТЕЛНИКОВ В СЛУЧАЙ НА СЛУЧАЙНО ИЗМЕСТЕНИ МОМЕНТИ НА НАБЛЮДЕНИЕ

Елисавета Панчева

§ 1. УВОД

В тази работа се изследва приложимостта на Шенон-Котелниковата теорема в случай на случайно изместени моменти на наблюдение. Доказателството на теоремата на Шенон—Котелников се дава в § 2. Тази теорема е доказвана например от Беляев в [9] и от Балакришнан в [7]. В [6] Балакришнан изследва процеса, получен от интерполационната формула от теоремата на Шенон—Котелников при изместени по време точки на наблюдение. В § 3, 4 и 5 са конструирани случайните спектрални мерки както на редицата от наблюдения със случайно изместени моменти на наблюдение, така и на интерполирания процес. Това представяне дава възможност резултатите на Балакришнан да се получат директно. Накрая е намерена грешката, допусната при интерполирането.

Нека е зададено вероятностното пространство $[\Omega, \mathrm{A}, P]$ и върху него нека е определен случайният процес $\xi(t,\omega)=\xi(t)$, $t\in R_1$, $\omega\in\Omega$. В тази работа се разглеждат само непрекъснати процеси от L_2. Непрекъснат процес е този, при който за всяка точка t_0 и всяка нулева редица $\{h_i\}$ редицата $\xi(t_0+h_i)$, $i=0, \pm 1, \pm 2$ клони към $\xi(t_0)$ в смисъл на средно квадратичната сходимост. С H_ξ ще означим затворената линейна обвивка на $\xi(t)$, $t\in R_1$ в $L^2{}_{[\Omega, \mathrm{A}, P]}$. С дефинирането на скаларното произведение

$$\langle\xi(t_1), \xi(t_2)\rangle=M\xi(t_1)\,.\,\overline{\xi(t_2)}$$

и нормата

$$\|\xi(t)\|^2=M|\xi(t)|^2$$

H_ξ става Хилбертово пространство.

Функциите

$$R(t,s)=M\xi(t)\,.\,\overline{\xi(s)},$$

$$R_f(n,m)=M\xi_n\,.\,\overline{\xi_m}$$

наричаме корелационни функции на случайния процес $\xi(t)$, $t\in R_1$, съответно на случайната редица ξ_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Един случаен процес се нарича стационарен от втори ред или слабо стационарен, ако

(1.1) $$M\xi(t) \int_{\Omega} \xi(t,\omega)P(d\omega)=\text{const},$$

(1.2) $$R(t,s)=R(t-s).$$

Една случайна редица се нарича слабо стационарна, ако

(1.1a) $$M\xi_n \quad \text{const},$$

(1.2a) $$R_f(n,m)=R_f(n-m).$$

Нека $\xi(t)$ е слабо стационарен случаен процес. Тогава $\xi(t)$ допуска спектралното представяне

(1.3) $$\xi(t)=\int e^{i\lambda t}\mu(d\lambda),$$

където μ е принадлежащата му спектрална мярка. Съответно за ξ_n имаме

(1.3a) $$\xi_n=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\mu(d\lambda).$$

Дефиниция. Случайната функция μ, която е елемент на H_ξ и удовлетворява условията

а. $M|\mu(\Delta)|^2<\infty, \ \forall\Delta\in \mathbf{B}_1$,

б. $M[\mu(\Delta_1)\,.\,\overline{\mu(\Delta)_2}]=0$ за $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$,

в. $\mu\left(\bigcup\limits_1^\infty \Delta_n\right)=\lim\limits_{m\to\infty}\ \mu\left(\bigcup\limits_1^m \Delta_n\right)$

за непресичащи се Δ_n, $n=1, 2, \ldots$, наричаме случайна спектрална мярка на процеса $\xi(t)$. ($\mathbf{B}_1$ е σ-алгебрата на борелевите множества от R_1.) Аналогично на (1.3) корелационната функция $R(t)$ на слабо стационарния процес $\xi(t)$ (на редицата ξ_n) допуска представянето

(1.4) $$R(t)=\int e^{i\lambda t}F(d\lambda),$$

(1.4a) $$R_f(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}F(d\lambda).$$

Функцията $F(\Delta)$, дефинирана в $\mathbf{B}_1$ с $F(\Delta)=M|\mu(\Delta)|^2$, която също е σ-адитивна и освен това крайна, наричаме спектрална мярка.

Съответствието $e^{i\lambda t}\leftrightarrow\xi(t)=\int e^{i\lambda t}\mu(d\lambda)$ задава еднозначно изометрично изображение на L^2_F в H_ξ.

§ 2. ТЕОРЕМА НА ШЕНОН—КОТЕЛНИКОВ

Нека $\xi(t)$, $t \in R_1$ е слабо стационарен случаен процес с ограничен спектър, концентриран в $(-a, a)$, т. е. нека да притежава спектрална мярка F такава, че $F[(-\infty, -a] \cup [a, \infty)] = 0$. Тогава $\xi(t)$ може да се представи като

$$\xi(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k} \cdot \xi(\pi k/a).$$

Доказателство. От теорията на редовете на Фурие е известно, че абсолютно интегрируемата в $[-a, a]$ функция $e^{i\lambda t}$ като функция от λ има следния ред на Фурие:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k} \cdot e^{i\lambda\frac{\pi}{a}k}$$

който клони равномерно по t към $e^{i\lambda t}$ във всеки интервал $-a+\delta \leq \lambda \leq a-\delta$, $\delta > 0$. От друга страна, $e^{i\lambda t}$ в $(-a, a)$ е функция с ограничена вариация, а това дава право да заключим, че парциалните суми

$$S_n(\lambda) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k} \cdot e^{i\lambda\frac{\pi}{a}k}$$

са равноограничени, т. е. $|S_n(\lambda)| \leq \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Остава да се покаже, че парциалните суми S_n клонят средно квадратично към $e^{i\lambda t}$ и спрямо спектралната мярка F.

$$\int_{-a}^{a} |S_n(\lambda) - e^{i\lambda t}|^2 F(d\lambda)$$

$$= \int_{-a+\delta}^{a-\delta} |S_n(\lambda) - e^{i\lambda t}|^2 F(d\lambda) + \int_{(-a,a)\setminus[-a+\delta, a-\delta]} |S_n(\lambda) - e^{i\lambda t}|^2 F(d\lambda).$$

Нека ε, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, ε, ε_1 $\varepsilon_2 > 0$ е предварително зададено. Тогава съществува такова $\delta(\varepsilon) > 0$, че поради равномерната сходимост на S_n в $[-a+\delta, a-\delta]$ и равноограничеността им в останалата част на $(-a, a)$ може да изберем n_0 толкова голямо, та за всички $n > n_0$ първият интеграл да остане по-малък от ε_1, а вторият — по-малък от ε_2, т. е.

$$\int_{-a}^{a} |S_n(\lambda) - e^{i\lambda t}|^2 F(d\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тъй като между L_F^2 и H_ξ съществува еднозначно изометрично съответствие, то

$$\| \xi(t) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k} \cdot \xi(\pi k/a) \|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

което и трябваше да се докаже.

§ 3. ВРЪЗКА МЕЖДУ ν И μ

Нека е даден слабо стационарният случаен процес $\xi(t)$ със случайна спектрална мярка μ. Ясно е, че и съответната редица $\xi_n = \xi(nT)$, $n=0, \pm 1, \ldots$, с интервал на наблюдение $T>0$ също е слабо стационарна, така че

$$(3.1) \qquad \xi(nT) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \nu(d\lambda),$$

където ν е съответната случайна спектрална мярка. Да намерим връзката между μ и ν. За тази цел ще разгледаме процеса за $t=nT$:

$$(3.2) \qquad \xi(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda nT} \mu(d\lambda).$$

Функцията под интеграла има период $2\pi/T$. От сравнението на горните два интеграла получаваме

$$(3.3) \qquad \nu(\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\{x:\ x/T \in \Delta\} \cap [-\pi/T + 2\pi k/T, \pi/T + 2\pi k/T]),$$

където $\Delta \in B_1$.

Сега нека предположим, че е дадена една слабо стационарна случайна редица ξ_n, $n=0, \pm 1, \ldots$, с позната случайна спектрална мярка ν и потърсим връзката между ν и случайната спектрална мярка на интерполирания процес:

$$(3.4) \qquad \xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k} \cdot \xi_k .$$

Заместваме (3.1) в (3.4), полагаме $\lambda' = \lambda T$ и използвайки теоремата на Шенон—Котелников, получаваме

$$\xi(t) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i\lambda T} \nu(T d\lambda).$$

Оттук заключаваме, че интерполираният процес $\xi(t)$ е слабо стационарен и с ограничен спектър, като за случайната му спектрална мярка имаме

$$(3.5) \qquad \mu(\Delta) = \nu(\{x:\ Tx \in \Delta\}).$$

§ 4. СЛУЧАЙНО ИЗМЕСТЕНИ МОМЕНТИ НА НАБЛЮДЕНИЕ

Разгледаната във § 2 теорема на Шенон—Котелников твърди, се сигналният процес $\xi(t)$ с ширина на спектъра $2a$ може да бъде напълно реконструиран чрез редицата от наблюдения $\xi(\pi n/a)$, $n=0, \pm 1, \ldots$ Поради несъвършенството на измерителните уреди в действителност точките на наблюдение са разместени по време, така че на практика разполагаме с редицата $\{\xi(\pi n/a+\varrho_n)\}$, където $\varrho=\{\varrho_n\}$ са случайните отклонения от първоначалните моменти на наблюдение $\pi n/a$.

Нека е дадена случайната редица $\{\varrho_n\}$, $n=0, \pm 1, \ldots$, стационарна в тесен смисъл и независима от процеса $\xi(t)$.

Лема 4.1. Редицата $\{\xi(\pi n/a+\varrho_n)\}$ е слабо стационарна.

Доказателство. От независимостта на $\{\varrho_n\}$, $n=0, \pm 1, \ldots$, от $\xi(t)$ получаваме за $M\xi(\pi n/a+\varrho_n)$

$$M\xi(\pi n/a+\varrho_n)=\int M[\xi(\pi n/a+a_n)\,|_{\varrho_n}-a_n]P_\varrho(dx)$$

$$=\int M[\xi(\pi n/a+x_n)]P_\varrho(dx)-\mathrm{const},$$

тъй като $M\xi(t)=\mathrm{const}$. Остава да покажем, че корелационната функция $R_\varrho(n, m)$ на редицата $\{\xi(\pi n/a+\varrho_n)\}$ удовлетворява условието $R_\varrho(n, m)=R_\varrho(n-m)$. Наистина

$$M\xi(\pi n/a+\varrho_n)\,.\,\overline{\xi(\pi m/a+\varrho_m)}$$

$$=\int M[\xi(\pi n/a+x_n)\,.\,\overline{\xi(\pi m/a+x_m)}\,|_{x_n=\varrho_n,\, x_m=\varrho_m}]P_\varrho(dx)$$

$$=\int M[\xi(\pi n/a+x_n)\,.\,\overline{\xi(\pi m/a+x_m)}\,|_{x_n=\varrho_{n-m},\, x_m=\varrho_0}]P_\varrho(dx)$$

$$=\int R(\pi(n-m)/a+(x_n-x_m))P_\varrho(dx)=R_\varrho(n-m).$$

Тук използвахме стационарността на $\{\varrho_n\}$ и $\xi(t)$.

Да означим с $\{\tilde{\xi}_n\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, редицата $\{\xi(\pi n/a+\varrho_n)\}$. Като слабо стационарна тя има спектралното представяне

$$\tilde{\xi}_n=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\tilde{\nu}(d\lambda), \tag{4.1}$$

където $\tilde{\nu}$ е случайната ѝ спектрална мярка.

От друга страна, $\tilde{\xi}_n$ може да бъде разгледана и като стойност на процеса $\xi(t)$ за $t=\pi n/a+\varrho_n$.

Лема 4.2. В сила е равенството

$$\tilde{\xi}_n=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\mu(d\lambda). \tag{4.2}$$

Тук е интегрирана случайна функция спрямо случайна спектрална мярка. Такъв интеграл е разгледан в [10]. Тъй като $f(\lambda)=e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}$ удовлетворява изискванията на доказаната там теорема 2, а и $\int_{-a}^{a} F(d\lambda)$ е краен, то очевидно интегралът от (4.2) съществува.

Доказателство на лема 4.2. Имаме

$$M\left|\tilde{\xi}_n-\int_{-a}^{a} e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\mu(d\lambda)\right|^2$$

$$=M|\tilde{\xi}_n|^2-M\left(\tilde{\xi}_n\,.\int_{-a}^{a} e^{-i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\overline{\mu(d\lambda)}\right)$$

$$-M\left(\overline{\tilde{\xi}}_n\quad\int_{-a}^{a} e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\mu(d\lambda)\right)+M\left|\int_{-a}^{a} e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\mu(d\lambda)\right|^2=0,$$

тъй като всеки един от четирите члена е равен на $\int_{-a}^{a} F(d\lambda)$ (средната енергия на процеса $\xi(t)$).

Следващата ни задача е да намерим връзката между случайните спектрални мерки на процеса $\xi(t)$ и редицата на наблюденията $\tilde{\xi}_n$.

Теорема 4.1. За $\tilde{\nu}$ е в сила равенството

$$\tilde{\nu}(d\lambda)=C(a\lambda/\pi)\mu(ad\lambda/\pi)+\int_{-a}^{a}\chi_x(d\lambda)\mu(dx).$$

Доказателство. От (4.2) получаваме

$$\tilde{\xi}_n=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\mu(d\lambda) \tag{4.2a}$$

$$=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\pi n/a}\,.\,Me^{i\lambda\varrho_n}\mu(d\lambda)+\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\pi n/a}(e^{i\lambda\varrho_n}-Me^{i\lambda\varrho_n})\mu(d\lambda).$$

За доказателството на теорема 4.1 използваме следните няколко леми.

Лема 4.3. Характеристичната функция на грешките $Me^{i\lambda\varrho_n}=C(\lambda)$ не зависи от n.

Доказателство. То е очевидно поради стационарността на редицата $\{\varrho_n\}$.

Лема 4.4. Двата интеграла в (4.2а) са некорелируеми.

Наистина

$$M\left[\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\pi n/a} C(\lambda)\mu(d\lambda) \cdot \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda\pi n/a}(e^{-i\lambda\varrho_n} - \overline{C(\lambda)})\overline{\mu(d\lambda)}\right]$$

$$= \int_{-a}^{a} C(\lambda)[M e^{-i\lambda\varrho_n} - \overline{C(\lambda)}]F(d\lambda) = 0.$$

Лема 4.5. Случайната редица от (4.2а) $\eta_n(\lambda) = e^{i\lambda\pi n/a}(e^{i\lambda\varrho_n} - C(\lambda))$ е слабо стационарна.

Наистина

$$M\eta_n(\lambda) = e^{i\lambda\pi n/a}(C(\lambda) - C(\lambda)) = 0,$$

$$M\eta_n(\lambda) \cdot \overline{\eta_m(\lambda)} = e^{i\lambda\pi(n-m)/a}(Me^{i\lambda(\varrho_{n-m} - \varrho_0)} - |C(\lambda)|^2),$$

т. е. $R_\eta(n, m) = R_\eta(n-m)$.

Оттук следва възможността за спектралното представяне

$$\eta_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixn}\chi_\lambda(dx), \tag{4.3}$$

където χ_λ е съответната случайна спектрална мярка.

Лема 4.6. Семейството (χ_λ), $\lambda \in R_1$, удовлетворява изискванията на теорема 3 от [10] (в този случай μ е случайната спектрална мярка на процеса $\xi(t)$).

Доказателство. По условие $\{\varrho_n\} n=, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, е независима от $\xi(t)$, а с нея и $\{\eta_n\}$ $n=0, \pm 1, \ldots$ χ_λ е случайна функция от H_η, а μ от H_ξ. Оттук следва и независимостта на χ_λ от μ, което е и първото условие на споменатата теорема. За да бъде изпълнено и второто, трябва да покажем, че случайната функция $\chi_\lambda(A)$, $A \in \mathbf{B}_1$, е μ-интегрируема.

α) Корелационната функция $M[\chi_\lambda(A) \cdot \overline{\chi_{\lambda'}(A)}]$ е измерима, тъй като може да бъде апроксимирана с измерими функции, а именно:

$$M[\chi_\lambda(A) \cdot \chi_{\lambda'}(A)] = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{k=1}^{N_n} c_{k,n} M[\eta_{e_{k,n}}(\lambda) \cdot \eta_0(\lambda')].$$

β) Пространството H_η е сепарабелно, защото случайните функции $\eta_n(\lambda)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\lambda \in R_1$, са непрекъснати. Оттук и от неравенството $H_\chi \subseteq H_\eta$ следва сепарабелността на H_χ.

Имаме

γ) $\int \| \chi_\lambda(A) \|^2 F(d\lambda) \leq \int \| \eta_0(\lambda) \|^2 F(d\lambda) < \infty.$

Свойствата α, β, γ на случайната функция χ_λ очевидно гарантират нейната μ-интегрируемост.

Като използваме горните леми, да преобразуваме (4.2) по следния начин:

$$\tilde{\xi}_n \quad \int_{-a}^{a} e^{i\lambda(\pi n/a+\varrho_n)}\mu(d\lambda)$$

$$=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\pi n/a}C(\lambda)\mu(d\lambda)+\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\pi n/a}[e^{i\lambda\varrho_n}-C(\lambda)]\mu(d\lambda)$$

$$=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\pi n/a}C(\lambda)\mu(d\lambda)+\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{ixn}\chi_\lambda(dx)\right]\mu(d\lambda)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\left[C(a\lambda/\pi)\mu(a/\pi d\lambda)+\int_{-a}^{a}\chi_x(d\lambda)\mu(dx)\right].$$

Сравнението на този резултат с (4.1) ни дава търсената зависимост:

$$\tilde{\nu}(d\lambda)=C(a\lambda/\pi)\mu(a/\pi d\lambda)+\int_{-a}^{a}\chi_x(d\lambda)\mu(dx). \tag{4.4}$$

За спектралната мярка на $\tilde{\xi}_n$ получаваме съответно

$$\|\tilde{\nu}(d\lambda)\|^2=|C(a\lambda/\pi)|^2F(\alpha/\pi d\lambda)+\int_{-a}^{a}\|\chi_x(d\lambda)\|^2F(dx). \tag{4.5}$$

С това доказахме теорема 4.1.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ШЕНОН—КОТЕЛНИКОВ

Ако в интерполационната формула от теоремата на Шенон—Котелников вместо редицата $\{\xi(\pi n/a)$ с точни моменти на наблюдение поставим редицата $\{\xi(\pi n/a+\varrho_n)\}$ с допуснати случайни грешки, получаваме един интерполиран процес

$$\tilde{\xi}_t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k}\cdot\tilde{\xi}_k .$$

Като използваме резултатите от предишните параграфи, за интерполирания процес $\tilde{\xi}_t$ можем да кажем, че е слабо стационарен, с ограничен спектър и допуска спектралното представяне

$$\tilde{\xi}_t=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda t}\tilde{\mu}(d\lambda),$$

където случайната спектрална мярка $\tilde{\mu}$ е напълно определена от случайната спектрална мярка на редицата $\tilde{\xi}_n$, т. е.

$$\tilde{\mu}(d\lambda)=\tilde{\nu}(\pi/a d\lambda).$$

Оттук за съответната спектрална мярка $\|\widetilde{\mu}(d\lambda)\|^2$ получаваме

$$\|\widetilde{\mu}(d\lambda)\|^2 \quad C(\lambda)|^2F(d\lambda)+\int_{-a}^{a}\|\chi_x(\pi/ad\lambda)\|^2F(dx).$$

Тази съществена формула може да бъде интерпретирана така:

Допуснатите грешки в моментите на наблюдение предизвикват отслабване на средната енергия на процеса за всяка честота, тъй като $C(\lambda)|<1$. Това отслабване се компенсира от допълнителен енергиен член, независим от процеса.

От интерес е и големината на грешката, която допускаме при оценката на ξ_t с $\widetilde{\xi}_t$:

$$\sigma^2=M|\xi(t)|^2-M(\xi_t.\bar{\widetilde{\xi}}_t)-M(\bar{\xi}_t.\widetilde{\xi}_t)+M|\widetilde{\xi}_t\,^2.$$

Да изчислим поотделно всеки един от членовете:

$$M|\xi(t)|^2=\int_{-a}^{a}F(d\lambda),$$

$$M|\widetilde{\xi}(t)|^2=\int_{-a}^{a}\|\widetilde{\mu}(d\lambda)\|^2=\int_{-a}^{a}|C(\lambda)|^2F(d\lambda)+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-a}^{a}\|\chi_x(d\lambda)\|^2\right]F(dx)$$

$$=\int_{-a}^{a}|C(\lambda)|^2F(d\lambda)+\int_{-a}^{a}[1-|C(\lambda)|^2]F(d\lambda)+\int_{-a}^{a}F(d\lambda),$$

$$M(\bar{\xi}_t.\widetilde{\xi}_t)=M\left(\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda t}\overline{\mu(d\lambda)}.\int_{-a}^{a}e^{i\lambda t}[C(\lambda)\mu(d\lambda)+\int_{-a}^{a}\chi_x(\pi/ad\lambda)\mu(dx)]\right)$$

$$=\int_{-a}^{a}C(\lambda)F(d\lambda)+\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\pi}^{\pi}M\chi_x(d\lambda)\right]F(dx)=\int_{-a}^{a}C(\lambda)F(d\lambda)+0.$$

Аналогично

$$M(\xi_t.\bar{\widetilde{\xi}}_t)=\int_{-a}^{a}\overline{C(\lambda)}F(d\lambda).$$

За σ^2 получаваме

$$\sigma^2 = 2\int_{-a}^{a}(1 \quad ReC(\lambda))F(d\lambda).$$

Накрая можем да отбележим, че допусканата грешка σ^2 при реконструирането на процеса ξ_t чрез редицата с грешки при наблюдението $\tilde{\xi}_n$, $n=0, +1, \ldots$, зависи от свойствата и разпределението на грешките.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов, Ю. А. Стационарные случайные процессы. Москва, 1963.
2. Толстов, Г. П. Ряды Фурье. Москва, 1960.
3. Титчмарш, Е. Теория функции. Москва, 1951.
4. Дуб, Дж. Л. Вероятностные процессы. Москва, 1956.
6. Balakrishnan. A. V. On the problem of time-juter in sampling.—IRE Transaction on information theory, IT-8, 1962, 226—236.
7. Balakrishnan, A. V. A note on the sampling principle for continuous signals.—IRE Transaction on information theory, IT-8, 1962, 237—245.
8. Рисс, Ф., Б. Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва, 1954.
9. Беляев, Ю. К. Аналитичные случайные функции.—Теория вероятностей и ее применение, 4, 1959, 437—444.
10 Панчева, Е. Интегриране на случайна функция спрямо случайна спектрална мярка.—Известия на Мат. инст. на БАН, 14, 1972.

Постъпила на 10. IV. 1971 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШЕНОНА — КОТЕЛЬНИКОВА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНО СМЕЩЕННЫХ МОМЕНТОВ НАБЛЮДЕНИЯ

Елисавета Панчева

(*Резюме*)

Приводится доказательство теоремы Шенона-Котельникова, отличающееся от обычно встречающегося в литературе. Рассматриваются свойства последовательности наблюдений $\tilde{\xi}_n = \xi\left(\frac{\pi}{a}n+\varrho_n\right)$ со случайно смещенными моментами наблюдения. Доказывается, что спектральная мера $\|\tilde{\nu}\|^2$ это последовательности имеет вид

$$\|\tilde{\nu}(d\lambda)\|^2 = \left|C\left(a\frac{\lambda}{\pi}\right)\right|^2 F\left(\frac{a}{\pi}d\lambda\right) + \int_{-a}^{a} \| \chi_x(d\lambda)\|^2 F(dx).$$

В конце рассматривается интерполяционный процесс

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(dt-\pi k)}{dt-\pi k}\tilde{\xi}_n$$

и найдено его среднеквадратичное отклонение от интерполяционного процесса по теореме Шенона — Котельникова.

ANWENDUNG DES ABTASTSTHEOREMS BEI VERWACKELTEN ABTASTPUNKTEN

Elisaveta Pančeva

(*Zusammenfassung*)

Es wird ein Beweis des Abtaststheorems gegeben. Man betrachtet die Eigenschaften der zufälligen Folge $\tilde{\xi}_n = \xi\left(\frac{\pi}{a} n + \varrho_n\right)$ mit verwackelten Abtastpunkten. Es wird bewiesen, dass ihr Spektralmass $\|\tilde{\nu}\|^2$ die folgende Darstellung besitzt:

$$\|\tilde{\nu}(d\lambda)\|^2 = \left|C\left(\lambda \frac{a}{\pi}\right)\right|^2 F\left(\frac{a}{\pi} d\lambda\right) + \int_{-a}^{a} \| \chi_x (d\lambda) \|^2 F(dx).$$

Am Ende wird der Interpolationsprozess

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin (at - \pi k)}{at - \pi k} \cdot \tilde{\xi}_k$$

betrachtet und die durch die Interpolation auftretenden Fehler berechnet.