БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

СВЪРЗАНОСТИ НА НЯКОИ ПОВЪРХНИНИ, ВЛОЖЕНИ В ПРОЕКТИВНОТО ПРОСТРАНСТВО С АФИНОРНА СТРУКТУРА

В. В. Вишневский, Е. В. Павлов

В [2] е изучено проективно пространство над алгебра, което възниква при изучаване на реалните или комплексни проективни пространства, означени съответно със символите P_n и $P_n(i)$, снабдени с афинор (смесен двувалентен тензор), който се явява абсолютен образ в тези пространства.

С тази работа ще бъдат допълнени тези резултати с нови факти, имащи геометричен характер, като са указани и пътища за тяхното приложение при изучаването на свързаностите на повърхнините от тези пространства; § 1 е написан от В. В. Вишневский, а § 2 от Е. В. Павлов.

§ 1. АБСОЛЮТЕН АФИНОР В ПРОЕКТИВНОТО ПРОСТРАНСТВО

1. Нека в $P_{n-1}(i)$, образът на точката на което е псевдовектор от комплексното векторно пространство $B_n(i)$, т. е. вектор, зададен с точност до произволен ненулев комплексен множител, е зададен някакъв афинор γ. Да разгледаме в проективното пространство преобразуванието T, запазващо матрицата γ: $\gamma = T^{-1}\gamma T$. Последното съотношение е равносилно на

$$\gamma T = T\gamma, \tag{1}$$

от което не е трудно да се заключи, че съвкупността $\{T\}$ на тези преобразования е подгрупа $G(\gamma)$ на общата проективна група, а линейният оператор γ по отношение на $G(\gamma)$ ще разглеждаме като абсолютен афинор. Известно е, че $P_{n-1}(i)$ с абсолютен афинор γ е директна сума на пространствата, определени от собствените стойности на γ (вж. например [2]), затова по-нататък без нарушаване на общността на резултатите ще предполагаме, че γ има единствена собствена стойност λ. Освен това също без ограничаване на общността ще предполагаме, че $\lambda = 0$ или в противен случай можем да дефинираме нов оператор $\gamma - \lambda E$ (E е тъждественият оператор), който относно $G(\gamma)$ също се явява абсолютен.

Алгебричните свойства на γ, както е известно ([14], стр. 182), напълно се определят от характеристиката му

$$[(m_1, m_2, \ldots, m_r)], \tag{2}$$

където m_a е степента на елементарните делители на матрицата γ или размерността на жордановите клетки в каноничната форма на γ, а кръглите скоби означават, че тези числа отговарят на една собствена стойност на γ, която ние сега считаме нулева. Някои свойства на проективните и неевклидовите пространства с такъв абсолютен афинор са изучени в работите [6], [8], а при характеристика $[(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{r})]$ идваме до бипланарното пространство от параболичен тип [12] (при $r=2$ в частност към параболичното биаксиално пространство [11]).

2. Да запишем за удобство характеристиката (2) в по-подробен вид:

(3)
$$[(\underbrace{m, \dots, m}_{p_m}, \underbrace{m-1, \dots, m-1}_{p_{m-1}}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_1})],$$

където някои от $p_{m-1}, \dots, p_1$ (или всички) могат да бъдат нули, ако съответните числа в характеристиката отсъствуват. Да определим числата

(4)
$$r_s = \sum_{i=s}^{m} p_i, \quad \varrho_s = n - \sum_{j=1}^{s} r_j, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

където винаги $\varrho_m = 0$. Както е известно ([14], стр. 184), ϱ_s съвпадат с ранговете на операторите γ^s.

Ако точка $x \in P_{n-1}(i)$ и удовлетворява уравнението $\gamma^s x = 0$, то, прилагайки оператора $T \in G(\gamma)$, съгласно (1) имаме $\gamma^s T x = 0$. Следователно съвкупността от решенията на уравнението $\gamma^s x = 0$ е линейно подпространство, инвариантно относно $G(\gamma)$. Доколкото това уравнение има $n - \varrho_s$ независими решения, по такъв начин се определя равнина $L_{n-\varrho_s-1} \subset P_{n-1}(i)$, която ние ще наричаме **а б с о л ю т н а**. Очевидно от $\gamma^s x = 0$ следва $\gamma^{s+1} x = 0$, затова $L_{n-\varrho_s-1} \subset L_{n-\varrho_{s+1}-1}$. По такъв начин абсолютният афинор с характеристика (3) определя в $P_{n-1}(i)$ верига от абсолютни равнини:

(5)
$$L_{n-\varrho_1-1} \subset L_{n-\varrho_2-1} \subset \dots \subset L_{n-\varrho_{m-1}-1} \subset L_{n-\varrho_m-1} = P_{n-1}(i).$$

В частност в параболичното бипланарно пространство ще получим една абсолютна равнина L_{r-1}, а в биаксилното — права L_1.

Нека $x \in L_{n-\varrho_{s+1}-1}$, т. е. $\gamma^{s+1} x$ 0. Тогава $\gamma^s(\gamma x) = 0$ и следователно $\gamma x \in L_{n-\varrho_s-1}$. Оттк следва, че γ осъществява ендоморфизъм $L_{n-\varrho_{s+1}-1} \to L_{n-\varrho_s-1}$, откъдето в частност следва, че $r_s \geqq r_{s+1}$. Ядрото на този ендоморфизъм съвпада с множеството точки, удовлетворяващи условието $\gamma x = 0$, т. е. $L_{n-\varrho_1}$ затова всяка равнина с $n - \varrho_1 = r_1$ измерения, минаваща през $L_{n-\varrho_1-1}$ и точка $x \in L_{n-\varrho_{s+1}-1}$, се изобразява с оператора γ в точка от $L_{n-\varrho_s-1}$. Вследствие линейността на γ това съответствие е проективно и можем да направим следния извод: r_1-равнините, минаващи през $L_{n-\varrho_1-1}$ и лежащи в $L_{n-\varrho_{s+1}-1}$, се изобразяват проективно в $L_{n-\varrho_s-1}$. Обратно, ако е зададена веригата от абсолютни равнини (5) и указаното по-горе проективно съответствие, което ние ще наричаме **а б с о л ю т н а п р о е к т и в н о с т**, по такъв начин абсолютният афинор с характеристика (3) е напълно определен, даже неговата матрица може да бъде фактически получена, например в жорданова форма, с помощта на метода на Вайл ([14] стр. 176—180).

По такъв начин достигнахме до следната

Теорема. За да бъде зададен абсолютен афинор в $P_{n-1}(i)$, необходимо и достатъчно е да е зададена системата абсолютни равнини и абсолютната проективност.

За параболичното биаксиално пространство този резултат е известен като проективно съответствие между особените равнини от снопа и на точките от абсолютната L_1 [11].

3. Да разгледаме системата оператори $E, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{m-1}$. Тъй като $\gamma^m=0$, те образуват базис на някаква комутативна алгебра, очевидно изоморфна на алгебрата с базис $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1}\}$, $\varepsilon^m=0$, която се нарича алгебра на плуралните числа от ред m и се означава със символа $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$. Затова $P_{n-1}(i)$ може да се разглежда като такова пространство, в което действува точното представяне на алгебрата $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$ над полето на комплексните числа C.

Нека $x \in P_{n-1}(i)$; тогава равнината $P_k(i)$, определена от векторите $x, \gamma x, \ldots, \gamma^{m-1}x$, ще наричаме особена. При това $k \leqq m-1$ и тази размерност достига максимум, ако x не лежи в $L_{n-\varrho_{m-1}-1}$. Ако пък $x \in L_{n-\varrho_{k+1}-1}$, то $\gamma x \in L_{n-\varrho_k-1}$, $\gamma^2 x \in L_{n-\varrho_{k-1}-1}$, $\ldots, \gamma^k x \in L_{n-\varrho_1-1}$, $\gamma^{k+1}x=0$ и следователно за особената $P_k(i)$ ще имаме $P_k(i) \cap L_{n-\varrho_k-1} = P_{k-1}(i)$, $P_k(i) \cap L_{n-\varrho_{k-1}-1} = P_{k-2}(i), \ldots, P_k(i) \cap L_{n-\varrho_1-1} = P_0(i)$.

Разглеждайки стационарната група $G_{P_k(i)}$ на особената $P_k(i)$ като подгрупа на $G(\gamma)$, веднага заключаваме, че $G_{P_k(i)}$ запазва сечението на $P_k(i)$ с абсолютните равнини и следователно геометрията в $P_k(i)$ ще бъде флагова $\mathfrak{F}_k$ ([10], стр. 297). По-нататък вместо P_k ще пишем $\mathfrak{F}_k$.

Тъй като множеството на особените флагови $\mathfrak{F}_k$ образува конгруенция ([8], стр. 125), то $G(\gamma)$ може да се характеризира като подгрупа на проективната група, привеждаща в себе си конгруенцията особени $\mathfrak{F}_k$. В биксиалното пространство този факт обикновено се поставя в основата на определението на биаксиалната група. Нашата група $G(\gamma)$, както ние я определихме в т. 1, в биаксиалното пространство съответствува на така наречената главна група [11]; ако пък вместо (1) приложим по-общо условие $\sigma(\gamma T) = T\gamma$, където σ е произволен числов множител, ние ще получим по-широка от $G(\gamma)$ група, разглеждането на която тук не се предвижда.

Нека отбележим следното важно свойство на особената $\mathfrak{F}_k$: тя е хоморфна на $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$. Действително, ако $a=\sum_{i=0}^{m-1} a_i\varepsilon^i \in \mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$, то в $\mathfrak{F}_k$ на този елемент отговаря $x_a = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\gamma^i x$, а ядрото на този хомоморфизъм е нилпотентният идеал на $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$, определен от базисните елементи $\{\varepsilon^{k+1}, \varepsilon^{k+2}, \ldots, \varepsilon^{m-1}\}$, който сме означили в [2] със символа R_{k+1}. Оттук следва, че в представянето на $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$, определена от оператора γ, абсолютните равнини (5) съответствуват на нилпотентните идеали $\mathrm{R}_1 \supset \mathrm{R}_2 \supset \ldots \supset \mathrm{R}_{m-1}$, така че за $L_{n-\varrho_k-1}$ идеалът R_k в това представяне се явява анулатор. Освен това оттук следва също, че преходът от точка x, определяща особената $\mathfrak{F}_k$, към някоя друга точка $y \in \mathfrak{F}_k$, е равносилен на умножението на някакъв множител $a \in \mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$, който естествено се определя с точност до произволно събираемо от анулиращия идеал. Ние определихме по такъв начин операция умножение на особената k-равнина $\mathfrak{X}$ на $a \in R(\varepsilon^{m-1})$, която ще означаваме със символа $\mathfrak{X}a$, при това ясно е, че $(\mathfrak{X}a)b = \mathfrak{X}(ab)$ за произволни a, b. Ако при това a не е делител на нула, то тази операция е равносилна на смяна на флаговия репер в $\mathfrak{X}$.

Нека $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ са две основни равнини с не обезателно еднаква размерност, получени с помощта на точките x и y. Тогава да наречем сбор $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}$ особената равнина, определена от векторите $x+y$, $\gamma(x+y), \ldots, \gamma^{m-1}(x+y)$. Веднага се вижда, че сборът е комутативен и удовлетворява законите

$$(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})a = \mathfrak{X}a+\mathfrak{Y}a, \quad \mathfrak{X}(a+b) = \mathfrak{X}a+\mathfrak{X}b.$$

Значи множеството на особените $\mathfrak{F}_k$, които са хомоморфни на $R(\varepsilon^{m-1})$ относно въведената операция събиране и умножение на величина от $R(\varepsilon^{m-1})$, образуват модул над $R(\varepsilon^{m-1})$ [3].

По причини, които ще бъдат изяснени по-нататък, да наречем особените равнини, зададени с точност до произволен обратим множител от $R(\varepsilon^{m-1})$, плурални проективни пространства $P(\varepsilon^{m-1})$.

4. Да наречем канонични координати на $P_{n-1}(i)$ такива негови координати, относно който матрицата γ има жорданова форма

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & & \\ & J_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_r} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

където m_a е размерността на жордановите клетки

$$J_{m_a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

и съвпадат с числата m_a в (2), а за удобство да считаме, че както в (3) числата m_a са разположени в нерастящ ред. Тогава матричната координата на особената $\mathfrak{F}_k$ ([9], стр. 373) може да бъде записана във вид на $(n \times m)$-матрица (n е броят на редовете, m — броят на стълбовете):

$$\mathfrak{X} = (\gamma^{m-1}x, \gamma^{m-2}x, \ldots, \gamma x, x), \tag{7}$$

където x е стълб от координати, а $\gamma^k x$ неговото произведение отляво на k-тата степен на матрицата (6). Лесно се вижда, че и в каноничните координати имаме

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}^1 \\ \cdot \\ \mathfrak{X}^r \end{pmatrix}, \tag{8}$$

където

$$
(9) \qquad \mathfrak{X}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^{S_a} & \dots & x^{S_{a-1}+2} & x^{S_{a-1}+1} \\ & & & & & x^{S_{a-1}+2} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & 0 & x^{S_a} \end{pmatrix},
$$

а $S_a = m_1 + m_2 + \cdots + m_a$. Блокове от вида (9), в които отгоре надясно е разположен триъгълник с равни елементи във всеки наддиагонал, а всички останали елементи са нули, се наричат H-блокове, а матрици, съставени от H-блокове, като например (8), се наричат H-матрици [8]. От [5], стр. 204, следва съгласно (1), че матрицата на всяко преобразование T от $G(\gamma)$ има вида

$$
(10) \qquad (T) = \begin{pmatrix} T_1^1 \dots T_r^1 \\ \\ T_1^r \dots T_r^r \end{pmatrix},
$$

където T_b^a са H-блокове, т. е. (T) е H-матрица. Ако $\breve{x} = Tx$, където T има вида (10), то $\breve{\mathfrak{X}} = T\mathfrak{X}$ или

$$
(11) \qquad \breve{\mathfrak{X}}^a = T_b^a \mathfrak{X}^b,
$$

така че ако се разглеждат H-блоковете като H-матрични координати, от (11) е очевидно, че те при преобразование от $G(\gamma)$ се трансформират линейно и хомогенно.

В построената матрична интерпретация на особените равнини е очевидно, че операцията умножение (8) на $a \in \mathrm{R}(\varepsilon^{m+1})$ се интерпретира като произведението (8) отдясно на матрицата

$$
(12) \qquad (a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & . & a_{m-1} \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & & a_1 \\ 0 & & 0 & a_0 \end{pmatrix},
$$

което принадлежи на известното регулярно представяне на $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$. По такъв начин матричните координати (9) се определят с точност до умножение отдясно на произволна матрица (12). Обаче както е показано в [3], операцията събиране и умножение на H-матрици отговаря на операциите събиране и умножение на величини от $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$, съпоставени на тези матрици, с което се оправдава въведеният за множеството особени равнини термин. Доколкото в (8) всяка особена равнина се определя от r H-блока с точност до умножение отдясно на (12) или r плурални числа с точност до умножение на плурално число $a = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varepsilon^i$, то нашето $P(\varepsilon^{m-1})$ може да се счита $r-1$-мерно $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$. Необходимо е само да се има пред вид, че при наличие на (6) на блокове с различна размерност задаването на r и m' още не определят $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$, а трябва да са указани числата, които определят размерността на блоковете (9) по вертикали, например числата

m_a, ако характеристиката е записана във вида (3). Ако пък в (6) $m_1 = m_2 = \cdots = m_r = m$, то получаваме $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$ в този смисъл, както е определено в [6].

Да покажем как в $P_{n-1}(i)$ се интерпретира фундаменталната група на $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$. Всяко преобразование $T \in G(\gamma)$ се явява и преобразование в $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$, но при това тези преобразования от $G(\gamma)$, които се различават на множител, явяващи се полином от (6), трябва да бъдат отъждествени, защото привеждат към особени $\mathfrak{J}_k$, различаващи се с множител от $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$. Полиномите от γ образуват подгрупа $N \subset G(\gamma)$, която е нормален делител на $G(\gamma)$, затова фундаменталната група на $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$ се реализира в $P_{n-1}(i)$ като факторгрупа $G(\gamma)/N$.

5. Ако $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$, то права от $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$ ще наричаме съвкупността от особени равнини

$$Z = \mathfrak{X}\lambda + \mathfrak{Y}\mu. \tag{13}$$

Нека λ и μ са фиксирани, а Z и

$$W = \mathfrak{X}\sigma + \mathfrak{Y}\tau \tag{14}$$

са две точки от една права в $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$, при това σ и μ обратими. Тогава да определим двойното отношение като матрицата

$$\omega = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, Z, W) = \lambda\sigma^{-1}\tau\mu^{-1} \tag{15}$$

от вида (12), доколкото отдясно всички матрици имат такъв вид. Инвариантноста на ω при пренормировка на особените равнини и на преобразованието от $G(\gamma)$ леко се проверява, както и в реалното P_n.

H-матрицата ω или съответната ѝ величина от $\mathrm{R}(\varepsilon^{m-1})$ съдържа m реални инварианта, геометрическия смисъл на които ще покажем сега. За това (13) и (14) да пренормираме така, че

$$Z = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y}, \quad W = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y}\omega. \tag{16}$$

По формулите от т. 4 уравненията (16) са равносилни на

$$\begin{gathered} \gamma^k z = \gamma^k x + \gamma^k y, \\ \gamma^k w = \gamma^k x + \omega_{m-k-1}\gamma^{m-1}y + \omega_{m-k-2}\gamma^{m-2}y + \cdots + \omega_0\gamma^k y, \end{gathered} \tag{17}$$

където ω_i се определя от равенството

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \cdot & \omega_{m-1} \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & \cdot & \omega_1 \\ 0 & & 0 & \omega_0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

а $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и $\gamma^0 = E$. Да разгледаме най-характерния случай, когато особените равнини $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, Z, W не се пресичат по две, което е възможно при достатъчно висока размерност на $P_{n-1}(i)$: $n > 2m$. Като считаме отначало, че $\omega_i = 0$ с изключение на ω_0, от (17) ще имаме

$$\gamma^k z = \gamma^k x + \gamma^k y, \quad \gamma^k w = \gamma^k x + \omega_0 \gamma^k y, \tag{19}$$

от което лесно заключаваме, че през всяка точка на една от тези равнини минава права, пресичаща всички останали равнини; ще я наричаме **трансверзала**. За всички тези прави двойното отношение на четирите точки, определени от тях, е равно на ω_0. При това е очевидно, че особените $\mathfrak{F}_0$ на тези равнини лежат в едно $P_1(i)$, особените $\mathfrak{F}_1$ лежат в едно $P_3(i)$ и т. н. накрая самите четири $\mathfrak{F}_{m-1}$ принадлежат на едно $P_{2m-1}(i)$. Като казваме, че такива $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, Z, W се намират в ω_0-трансверзално положение, нека резюмираме резултата по следния начин: за да се намират четири непресичащи се особени $\mathfrak{F}_{m-1}$ в ω_0-трансверзално положение, необходимо и достатъчно е двойното им отношение да е комплексно число. Естествено съществуването на безброй трансверзали се обяснява с това, че матрицата (18), определяща двойното отношение, има m-кратни собствени стойности ([9], стр. 386). Частен случай ще бъде хармоничната четворка на особените равнини $\omega_0=-1$, когато върху трансверзалите се определят хармонични четворки от точки.

Нека сега не всички ω_i са равни на нула. Да дефинираме точките

$$\underset{k}{w}=\underset{k-1}{w}-\omega_k\gamma^k y \tag{20}$$

и съответните им особени равнини $\underset{k}{W}$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$, а също и точките

$$\underset{k}{t}=\underset{k-1}{w}+\gamma^k y \tag{21}$$

и да определим особените им равнини $\underset{k}{\mathfrak{T}}$. Тогава за $\underset{k}{\mathfrak{T}}$ и $\underset{k}{W}$ съгласно (2) и (21) ще имаме

$$\underset{k}{\mathfrak{T}}=\underset{k-1}{W}+\mathfrak{Y}\varepsilon^k,\quad \underset{k}{W}=\underset{k-1}{W}-\mathfrak{Y}\varepsilon^k\omega_k \tag{22}$$

(по k не се сумира), откъдето

$$\omega_k=-(\underset{k-1}{W}, \mathfrak{Y}\varepsilon^k, \underset{k}{\mathfrak{T}}, \underset{k}{W}). \tag{23}$$

По такъв начин ω_k само по знак се различава от ъгъла на въртене на $\underset{k}{W}$ към $\underset{k-1}{W}$ в параболичната метрика на снопа, където за несобствен елемент служи $\mathfrak{Y}\varepsilon^k$, а единичен $\underset{k}{\mathfrak{T}}$. Това преобразование на особената равнина W ще наричаме **въртене** от k-ти ред. Осъществявайки всички въртения до $m-1$ ред включително, идваме до особената равнина $\underset{m-1}{W}$ такава, че $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, Z, \underset{m-1}{W})\ \omega_0$.

И така, инвариантите $\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}$ в (18) се определят от въртения от $1, \ldots, m-1$ ред на особените W до положение, което е ω_0-трансверзално относно останалите равнини.

В случая, когато особените равнини на първата от $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$ се пресичат, по същия начин се определят аналогични инварианти, но вече в по-малък брой.

6. В $P_{r-1}(\varepsilon^{m-1})$ може да се изучат и тензори, образи на които в $P_{n-1}(i)$ служат така наречените чисти тензори, т. е. тензори, комутиращи с абсолютния афинор по всяка двойка от своите индекси [3]. Ще покажем един удобен начин за определяне вида на матрицата на такива тензори в канонични координати в $P_{n-1}(i)$.

Смесен тензор от втора валентност t^i_j, удовлетворяващ условието за чистота $t\gamma=\gamma t$, има съгласно [5], стр. 204, матрица, явяваща се H-матрица от вида (10). Ковариантният двувалентен тензор g_{ij} с матрица g условието за чистота има вида

$$\gamma' g = g\gamma, \tag{24}$$

както това е показано в [3].

Да разгледаме матрицата

$$h=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{matrix}\right\}m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_r\left\{\begin{matrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{matrix}\right. \end{pmatrix}, \tag{25}$$

притежаваща двете очевидни свойства:

а) Тя е идемпотентна: $h^2=E$, а значи и $h^{-1}=h$.

б) Матрицата (6) се превежда от h в спрегнатата

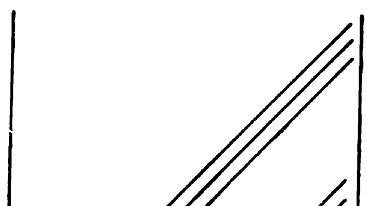
$$\gamma' = h\gamma h. \tag{26}$$

Тогава с помощта на (26) е лесно да се покаже, че (24) е равносилно на равенството

$$\gamma(hg) = (hg)\gamma, \tag{27}$$

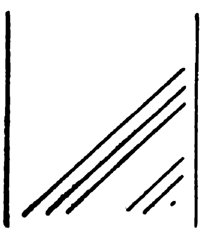
което означава, че матрицата hg комутира с γ и се явява следователно H-матрица от вида (10). Но $g=h(hg)$, затова общият вид на g се намира при умножение на H-матрицата отляво на матрицата (25). При това, както лесно можем да се убедим, всеки H-блок претърпява отражение спрямо своята хоризонтална ос на симетрия и ние идваме до матрицата, състояща се от блокове от вида

(28)



или от блокове от вида

(29)



където на отбелязаните прави се разположени равни елементи, а празните места са запълнени с нули. За блоковете (28) и (29) казваме, че имат долна напречна триъгълна форма. В частност, когато g_{ij} удовлетворява (24) и е симетричен, ние получаваме B-тензор, матрицата на който е намерена в [1].

§2. СВЪРЗАНОСТ НА НОРМАЛИЗИРАНАТА ПОВЪРХНИНА В ПРОЕКТИВНОТО ПРОСТРАНСТВО, СНАБДЕНО С АФИНОРНА СТРУКТУРА

Нека в P_{n-1}, което е снабдено с абсолютен афинор γ, е зададена повърхнина X_{n-m}, определена от уравненията

$$x^i = x^i(u^\alpha),\quad i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n;\quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, n-m. \tag{30}$$

Ще предположим, че 1) особените равнини за всяка точка от x_{n-m} нямат с допирателната равнина в дадената точка никакви други общи точки и 2) допирателната P_{n-m} съдържа някоя P_{n-m-1}, инвариантна относно γ.

Първото условие не налага съществени ограничения за разглеждания клас повърхнини, макар че съществуват повърхнини, за които особената равнина във всяка точка принадлежи на допирателната равнина към повърхнината (например повърхнина, определена от пресичането на присъединени B-квадрики). Напротив, второто изискване се явява по-съществено, доколкото то предполага наличие на съответно пресичане на допирателната равнина към повърхнината и абсолютните равнини.

В [7], стр. 198, авторът въвежда за всяка повърхнина X_{n-m} в P_{n-1} два вида нормали: нормала от първи род P_{m-1}, минаваща през точка x от повърхнината X_{n-m} и нямаща други общи точки с нея, и нормала от втори род P_{n-m-1}, разположена в допирателната равнина към X_{n-m} в точка x и неминаваща през точка x. С помощта на дефинираните нормали възниква афинна свързаност, която определя вътрешната геометрия на тази повърхнина.

В нашия случай за нормала от първи род избираме особената равнина P_{m-1}, определена от точките $x, \gamma x, \ldots, \gamma^{m-1}x$, а за нормала от втори род—равнина от допирателната равнина, инвариантна относно γ. Точките от тези нормали да вземем за базисни точки. Системата за разлагане на производните на векторите по базисните точки е

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} && \partial_\alpha x = y_\alpha + l_\alpha x,\\
(31)\quad &\text{(b)} && \partial_\alpha y_\beta = l_\alpha y_\beta + \overset{0}{b}_{\alpha\beta} x + \overset{s}{b}_{\beta\alpha} \underset{s}{X},\\
&\text{(c)} && {}_\alpha\underset{s}{X} = \underset{s}{m}{}^{\beta}_{\alpha} y_\beta + \underset{s}{m}_\alpha x + \underset{s}{\overset{r}{n}}_\alpha \underset{r}{X},
\end{aligned}$$

$$r, s, t, \ldots \quad 1, 2, \ldots, m-1,$$

където $X = \overset{s}{\gamma} x$ са точки от нормалата от първи род, а y_a — точки от нормалата от втори род. Нормалата от втори род, както казахме, е инвариантна относно γ; тогава точката

$$\bar{y}^i_a = \gamma^i_k y^k_a \tag{32}$$

може да се представи като линейна комбинация на останалите точки y_a

$$\bar{y}^i_a = A^\beta_a y^i_\beta. \tag{33}$$

Ще докажем, че A^β_a е афинор върху повърхнината Y_{n-m}. За това да въведем нова параметризация $\breve{u}^\beta = f^\beta(u^a)$. Като имаме пред вид, че при преобразуване на криволинейни координати опорните точки y_a образуват тензор с векторни компоненти ([7], стр. 200), то от

$$\bar{y}_a = A^\beta_a y_\beta = A^\beta_a y_{\breve{\sigma}} \frac{\partial \breve{u}^\sigma}{\partial u^\beta}$$

рез контракция с $\partial u^a / \partial \breve{u}^\varkappa$ намираме

$$\bar{y}_{\breve{\varkappa}} = A^\beta_a \frac{\partial u^a}{\partial \breve{u}^\varkappa} \frac{\partial \breve{u}^\sigma}{\partial u^\beta} y_{\breve{\sigma}}.$$

От друга страна, $y_{\breve{\varkappa}} = A^{\breve{\sigma}}_{\breve{\varkappa}} y_{\breve{\sigma}}$; при сравнението на тези уравнения следва верността на нашето твърдение.

За афинора A^β_a ще казваме, че е индуциран от γ върху повърхнината (30). Тогава от (31, b) следва

$$\nabla_a \bar{y}_\beta = l_a \bar{y}_\beta + \overset{0}{b}_{a\beta} \gamma x + \overset{s}{b}_{\beta a} \gamma \underset{s}{X},$$

или

$$\nabla_a \bar{y}_\beta = \underset{a}{l} \bar{y}_\beta + \overset{0}{b}_{a\beta} \underset{1}{X} + \overset{s}{b}_{\beta a} \underset{s+1}{X}. \tag{34}$$

Нека диференцираме (33) и използваме основните уравнения (31); получаваме

$$\nabla_\gamma \bar{y}_a = \nabla_\gamma A^\beta_a y_\beta + A^\beta_a (l_\gamma y_\beta + \overset{0}{b}_{\gamma\beta} x + \overset{s}{b}_{\beta\gamma} \underset{s}{X}). \tag{35}$$

Заместваме лявата страна на (35) с (34); след приравняване на коефициентите получаваме

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \nabla_\gamma A^\beta_a = 0,\\
&\text{(b)} \qquad \overset{s}{b}_{a\beta} = A^\gamma_a \overset{s+1}{b}_{\gamma\beta},\\
&\text{(c)} \qquad \overset{0}{b}_{\gamma a} \quad A^\beta_a \overset{1}{b}_{\beta\gamma},\\
&\text{(d)} \qquad A^\beta_a \overset{0}{b}_{\gamma\beta} = 0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Нека запишем условията за интегрируемост на основната система (31). За първото уравнение получаваме

$$\text{(a)} \qquad S^{\gamma}_{\alpha\beta}=0,$$

$$\text{(37)} \quad \text{(b)} \qquad \overset{0}{b}_{[\beta\alpha]}+\nabla_{[\beta}l_{\alpha]}=0,$$

$$\text{(c)} \qquad \overset{s}{b}_{[\alpha\beta]}=0.$$

С $S^{\gamma}_{\alpha\beta}$ сме означили торзията. Да отбележим някои следствия от уравненията (36) и (37). От (37, а) се вижда, че нормализираната повърхнина няма торзия ([7], стр. 208). От (36, а) следва, че афинорът A^{β}_{α} е ковариантно постоянен в свързаността, която е определена на повърхнината от указаната нормализация. Това значи, че свързаността на нормализираната повърхнина X_{n-m}, за която нормалите от първи и втори род удовлетворяват изискванията 1) и 2), запазва структурата, индуцирана на повърхнината.

Съгласно с [13] параметрите u^{α} на повърхнината могат да бъдат избрани така, че A^{β}_{α} да е с постоянни компоненти. Следователно вътрешната геометрия е геометрия с афинна свързаност с интегрируема афинорна структура [4].

Ако сравним (31) и (39), получаваме, че афинорът A^{β}_{α} удовлетворява матричното уравнение $\gamma Y=YA$, където Y има максимален ранг, тъй като всички параметри на повърхнината са съществени. От известните свойства на това матрично уравнение ([5], стр. 208) следва, че A^{β}_{α} има едни и същи собствени стойности, както и γ, т. е. е нилпотентен и удовлетворява уравнението $A^{m}=0$. Друго свойство ни дава (37). Тензорите $\overset{s}{b}_{\alpha\beta}$ са симетрични. От (36) пък следва, че те са присъединени относно афинора A, т. е. се явяват B-тензори.

От уравнението (37, b) вследствие симетрията на $\overset{0}{b}_{\beta\alpha}$ следва, че $\nabla_{[\beta}l_{\alpha]}=0$, т. е. l_{α} е градиентен. Съгласно със [7], стр. 213, можем да смятаме, че $l_{\alpha}=0$, което ще наричаме канонично нормиране на повърхнината. По-нататък ще считаме, че повърхнината е канонично нормирана, т. е. $l_{\alpha}=0$.

След като показахме, $\overset{s}{b}_{\alpha\beta}$ са B-тензори, при канонично нормиране на повърхнината системата (31) може да се запише във вида

$$\text{(38)} \qquad \begin{aligned} &\nabla_{\alpha}y_{\beta}=\overset{s}{b}_{\alpha\beta}\underset{s}{X},\\ &\nabla_{\alpha}\underset{s}{X}=\underset{s}{m}^{\beta}_{\alpha}y_{\beta}+\underset{s}{\overset{r}{n}}_{\alpha}\underset{r}{X}. \end{aligned}$$

При това записване ще имаме пред вид, че $r, s, t, \ldots=0, 1, 2, \ldots, m-1$ и че сме означили $\underset{s}{m}_{\alpha}=\underset{s}{\overset{0}{n}}_{\alpha}$, $\underset{0}{X}=\gamma^{0}x=x$, $\underset{0}{\overset{r}{n}}_{\alpha}=0$, $\underset{0}{m}^{\beta}_{\alpha}y_{\beta}=y_{\alpha}$. Ако второто уравнение на (38) умножим с γ и сравним с

$$\nabla_\alpha \underset{s+1}{X} = \underset{s+1}{m_\alpha^\beta} y_\beta + \overset{r}{\underset{t+1}{n_\alpha}} \underset{r}{X},$$

получаваме следната връзка между коефициентите на системата:

$$\underset{s+1}{m_\alpha^\sigma} = \underset{s}{m_\alpha^\beta} A_\beta^\sigma, \quad \overset{r+1}{\underset{s+1}{n_\alpha}} = \overset{r}{\underset{s}{n_\alpha}}. \tag{39}$$

Пак от (38) можем да получим условията за интегрируемост:

$$\begin{aligned} R_{\gamma\alpha\beta.}^{\ \ \ \sigma} &= -2\overset{s}{b}_{\beta[\alpha} \underset{s}{m_{\gamma]}^\sigma}, \quad \nabla_{[\gamma} \underset{s}{m_{\alpha]}^\beta} + \overset{r}{\underset{s}{n}}_{[\alpha} \underset{r}{m_{\gamma]}^\beta} = 0, \\ \nabla_{[\gamma} \overset{r}{b}_{\alpha]\beta} &+ \overset{s}{b}_{\beta[\alpha} \overset{r}{\underset{s}{n}}_{\gamma]} = 0, \quad \underset{s}{m_{[\alpha}^\beta} \overset{t}{b}_{\gamma]\beta} + \nabla_{[\gamma} \overset{t}{\underset{s}{n}}_{\alpha]} + \overset{r}{\underset{s}{n}}_{[\alpha} \overset{t}{\underset{r}{n}}_{\gamma]} = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

В заключение на това следва, че ако е зададена някоя свързаност в X_{n-m}, която запазва афинорна структура A_α^β, и съществуват тензорите $\overset{s}{b}_{\alpha\beta}$, $\underset{s}{m_\alpha^\beta}$ и $\overset{r}{\underset{s}{n_\alpha}}$, където $\overset{s}{b}_{\alpha\beta}$ са B-тензори, присъединени относно афинора A_α^β, и всички удовлетворяват условия (39) и (40), в проективното пространство с някоя афинорна структура γ съществува такава повърхнина X_{n-m}, върху която нормализацията с помощта на инвариантните равнини относно афинора γ определя указаната свързаност.

За афинор с характеристика [(2, 2)], т. е. в параболичното пространство, изискването 1) е равносилно на предположението, че особената права минава през точка от повърхнината и не лежи в допирателната равнина на повърхнината, а изискването 2) винаги е изпълнено. Свързаността на повърхнината от такова пространство, определена от разглежданата по-горе нормализация, е подробно изучена от Талантова [11].

За друг пример да разгледаме нормализация на крива X_1 в P_3 с абсолютен афинор с характеристика [(3, 1)]. Абсолютни равнини на такова P_3 ще са $L_1 \subset L_2$. Тогава изискването 1) е изпълнено за произволна крива, нележаща в равнината L_2, а изискването 2) е равносилно на предположението, че допирателната към X_1 права пресича L_1. Обаче това означава, че X_1 лежи в равнината P_2, минаваща през L_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулин, В. Н. n-мерные римановы пространства, допускающие поля ковариантно постоянных симметрических тензоров общего типа. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1970, № 5, 3—13.
2. Вишневский, В. В. Структуры проективных пространств, порождаемые аффинорами. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1969, № 6, 35—46.
3. Вишневский, В. В. Теория аффинорных модулей. — Уч. зап. Казанск. ун-та, **129**, 1970, № 6, 33—53.
4. Вишневский, В. В. Аффинорные структуры как структуры, определяемые алгебрами. — Уч. зап. Казанск. ун-та, **129**, 1970, № 6, 54—68.
5. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. Москва, 1966.
6. Еремина, Л. В., Л. Б. Лобанова. Плюральные квадратичные неевклидовы пространства. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1968. № 9, 29—35.
7. Норден, А. П. Пространства аффинной связности. Москва, 1950.

8. Певзнер, С. Л. Геометрия пары квадрик в проективном пространстве. — Сибирск. матем. ж., 1969, № 1, 116—137.
9. Розенфельд, Б. А. Многомерные пространства. Москва, 1966.
10. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства. Москва, 1969.
11. Талантова, Н. Б. Биаксиальное пространство параболического типа. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 214—228.
12. Талантова, Н. В. О нульсопряженных образах биаксиального пространства параболического типа. Уч. зап. Казанск. ун-та, **123**, 1963, № 1, 152—171.
13. Широков, А. П. Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров. — Доклады АН СССР, **102**, 1955, № 3, 461—464.
14. Широков, П. А. Тензорное исчисление. Казань, 1961.

Поступила на 10. 4. 1971 г.

СВЯЗНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ВЛОЖЕННЫХ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО С АФФИНОРНОЙ СТРУКТУРОЙ

В. В. Вишневский, Е. В. Павлов

(Резюме)

Изучается подгруппа проективной группы, сохраняющая матрицу произвольного нильпотентного аффинора. Геометрия этой подгруппы представляет вещественную реализацию геометрии проективного пространства алгебры плюральных чисел, определенную этим аффинором. На поверхности проективного пространства со структурой, в том случае, когда допустима нормализация с помощью инвариантных относительно аффинора плоскостей, возникает аффинная связность, сохраняющая индуцированную структуру.

CONNECTION ON SOME SURFACES EMBEDDED IN THE PROJECTIVE SPACE WITH AFFINOR STRUCTURE

V. V. Vishnevsky, E. V. Pavlov

(Summary)

A subgroup of the projective group preserving invariant the matrix of an arbitrary nilpotent affinor is investigated. The geometry of such a subgroup is a real realization of the geometry of the projective space over the algebra of plural numbers determined by this affinor. On a surface of the projective space having a structure, if it admits normalization with the help of planes invariant with respect to the affinor, an affinor connection arises preserving the induced structure.