БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ДЛЯ ФОРМ С p-АДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Стефан Додунеков

Пусть R_p — p-адическое числовое поле. Известна следующая гипотеза ([1], стр. 82):

Любая форма F степени n с p-адическими коэффициентами, число переменных которой больше n^2, представляет нуль в R_p.

Оказывается, что в частном случае, когда F имеет вид

$$F=a_1x_1^n+\dots+a_mx_m^n,\quad a_i\in R_p,\quad i=1,\dots,m, \tag{1}$$

гипотеза верна для всех R_p, для которых $p \nmid n$.

1. Замена переменных. Пусть $a_i=p^{k_i}\varepsilon_i$ и $k_i=ns_i+l_i$, $0\leq l_i<n$. После преобразования $y_i=p^{s_i}x_i$ придем к форме

$$F=p^{l_1}\varepsilon_1y_1^n+\dots+p^{l_m}\varepsilon_my_m^n.$$

Таким образом

$$F=F_0\dotplus pF_1\dotplus\dots\dotplus p^{n-1}F_{n-1}. \tag{2}$$

Здесь у всех форм F_i, $i=0, 1,\dots, n-1$ коэффициенты являются p-адическими единицами. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что форма (1) имеет вид (2).

2. Форма (2) представляет нуль в поле R_p тогда и только тогда, когда представляет нуль хотя бы одна из форм $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$.

а) Достаточность условия очевидна.

б) Пусть $F(\eta_1,\dots,\eta_n)=0$. Можно считать, что для некоторого индекса i $p\nmid\eta_i$, потому что в противном случае можно сделать необходимые сокращения. Пусть i наименьший индекс, для которого $p\nmid\eta_i$ и пусть y_i участвует в F_j. Из

$$F_0\dotplus pF_1\dotplus\dots\dotplus p^{n-1}F_{n-1}=0$$

следует, что

$$F_0\dotplus pF_1\dotplus\dots\dotplus p^{n-1}F_{n-1}\equiv 0 \pmod{p^{j+1}}.$$

Так как $0\leq j<n-1$, все формы до j-той делятся на p^n, а во всех формах после p^jF_j показатель p по меньшей мере равен $j+1$. Следовательно,

$$p^j F_j \equiv 0 \pmod{p^{j+1}},$$

$$F_j \equiv 0 \pmod{p}.$$

С другой стороны,

$$\left.\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\right|_{y_i=\eta_i} = n\varepsilon_i \eta_i^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

По следствию из теоремы 3, § 5, гл. I [1] форма F_j представляет нуль в R_p.

3. Пусть теперь для F выполняется условие гипотезы $m > n^2$. Так как в (2) участвуют не более чем n формы F_i, в хотя бы одной форме F_s содержатся более чем n переменных. Рассмотрим сравнение

$$F_s \quad \varepsilon_{s_1} y_{s_1}^n + \qquad + \varepsilon_{s_r} y_{s_r}^n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Если $\varepsilon_{s_k} \equiv a_k \pmod{p}$, $k = 1, \ldots, r$, с рациональными a_k, то

$$a_1 y_{s_1}^n + \qquad + a_r y_{s_r}^n \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

Согласно теореме Шевалле (3) имеет ненулевое решение

$$a_1 b_1^n + \qquad + a_r b_r^n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Но в таком случае и

$$\varepsilon_{s_1} b_1^n + \qquad + \varepsilon_{s_r} b_r^n \equiv 0 \pmod{p}$$

Пусть $p x b_j$. Тогда

$$\left.\frac{\partial F_s}{\partial y_{s_j}}\right|_{y_{s_j}=b_j} = n\varepsilon_{s_j} b_j^{n-1} \not\equiv \pmod{p}$$

и опять по следствию из теоремы 3, § 5, гл. I [1] F_s представляет нуль в R_p.

Таким образом, действительно форма (1) представляет нуль в R_p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боревич, З. И., И. Р. Шафаревич. Теория чисел. Москва, 1964.

Поступило 11. V. 1971 г.

ВЪРХУ ЕДНА ХИПОТЕЗА ЗА ФОРМИ С p-АДИЧНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Стефан Додунеков

(*Резюме*)

Доказано е следното твърдение:
Нека

$$F=a_1x_1^n+a_2x_2^n+\ldots+a_mx_m^n$$

е форма с коефициенти от p-адичното числово поле R_p. Ако pxn и $m>n^2$, формата F представя нулата в R_p.

ON A HYPOTHESIS FOR FORMS WITH p-ADIC COEFFICIENTS

Stefan Dodunekov

(*Summary*)

The following assumption is proved:
Let

$$F=a_1x_1^n+a_1x_2^n+\ldots+a_mx_m^n$$

be a form with coefficients from the p-adic number field R_p. If pxn and $m>n^2$, then the form F represents the zero in R_p.