БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADEMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

# ВЪРХУ ПРИБЛИЖЕНИЕТО НА ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНИ ПОЛОЖИТЕЛНИ ОПЕРАТОРИ

**Борислав Боянов**

Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана в интервала $\Delta$ (краен или безкраен). Допълнена графика $\bar{f}$ на функцията $f(x)$ ще наричаме сечението на всички затворени и изпъкнали по отношение на оста $y$ множества от точки в равнината, които съдържат графиката на $f(x)$.

Хаусдорфово разстояние [1] $r(f, g)$ между две ограничени в $\Delta$ функции $f(x)$ и $g(x)$ ще наричаме числото

$$\max\{\max_{A\in\bar{f}}\min_{B\in\bar{g}}\|A-B\|_0,\ \max_{A\in\bar{g}}\min_{B\in\bar{f}}\|A-B\|_0\}.$$

където

$$\|A-B\|_0=\|A(x_1, y_1)-B(x_2, y_2)\|_0=\max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|).$$

С $\mu(f;\delta)$ или просто $\mu(\delta)$ ще означаваме модула на немонотонност на функцията $f(x)$:

$$\mu(f;\delta)=\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}[|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|]-|f(x_1)-f(x_2)|\}.$$

С $M_\Delta$ ще бележим съвкупността от всички ограничени в $\Delta$ функции, за които

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(f;\delta)=0.$$

Нека $\{L_n[f(t);x]\}_1^\infty$ е редица от линейни оператори, определени за всяко $f\in M_\Delta$ и такива, че:

a) Ако $f(x)\geq 0$ за всяко $x\in\Delta$, то $L_n[f(t);x]\geq 0$. Това свойство на $L_n$ се нарича положителност или монотонност.

b) $L_n[1;x]=1$.

c) За всяко $\delta>0$ съществува клоняща към нула редица от положителни числа $\{a_n(\delta)\}_1^\infty$ такива, че

$$L_n[h_{z,\delta}(t);z]\leq a_n(\delta)$$

за всяко $z\in\Delta$, където

$$h_{z,\delta}(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t\in\Delta\cap[x-\delta, z+\delta].\\ 1 & \text{при}\quad t\overline{\in}\Delta\cap[z-\delta, z+\delta].\end{cases}$$

Ще използваме следните означения:

$$\varrho_n = \max_{x\in\Delta} | L_n [f(t); x] - f(x) |;$$

$$r_n = r[L_n [f], f);$$

$$R_n (x) = \min_{(\xi,\eta)\in f} | (x, L_n [f; x]) - (\xi, \eta) |_0, \quad R_n = \max_{x\in\Delta} R_n (x).$$

Лема 1. Нека $\xi\in\Delta$, $f(x)\in M_1$ и $f(x)\leqq 0$ за всяко $x\in[\xi-\delta, \xi+\delta]\cap\Delta$ Тогава

$$L_n [f(t); \xi] \leqq \alpha_n (\delta).$$

*Доказателство.* Използваме очевидното неравенство

$$f(x) \leqq h_{\xi,\delta}(x), \quad x\in\Delta,$$

и положителността на оператора $L_n$.

Да означим с $C_\Delta$ съвкупността от всички непрекъснати функции, дефинирани и ограничени в $\Delta$, а с $\omega(f; \delta)$ или просто $\omega(\delta)$ модула на непрекъснатост на $f(x)$.

Лема 2. Ако $f(x)\in C_\Delta$, $\delta>0$, $\xi\in\Delta$ и $f(x)\leqq 0$ за всяко $x\in[\xi-\delta, \xi+\delta]\cap\Delta$, то

$$L_n [f(t); \xi] \leqq \omega(\delta) \sum_{k=1}^{N} \alpha_n (k\delta),$$

където $N = \left[\frac{|\Delta|}{\delta}\right]$.

*Доказателство.* Вижда се, че за всяко $x\in\Delta$ е изпълнено неравенството

$$f(x) \leqq \theta_{\xi,\delta}(x), \tag{1}$$

където

$$\theta_{\xi,\delta}(x) = \omega(\delta) \sum_{k=1}^{N} h_{\xi,k\delta}(x).$$

За $x\in[\xi-\delta, \xi+\delta]$ това следва от условията на лемата. Да допуснем, че неравенството е изпълнено за всяко $x\in[\xi+(m-1)\delta, \xi+m\delta]$, $m<N$. Тогава за $x\in[\xi+m\delta, \xi+(m+1)\delta]$ ще имаме

$$f(x) \leqq f(\xi+m\delta) + \omega(\delta) \leqq \omega(\delta) \sum_{k=1}^{N} h_{\xi,k\delta}(x) + \omega(\delta)$$

$$= \omega(\delta) \sum_{k=1}^{m} h_{\xi,k\delta}(x) + \omega(\delta) h_{\xi,(m+1)\delta}(x) \leqq \omega(\delta) \sum_{k=1}^{N} h_{\xi,k\delta}(x).$$

Оттук заключаваме, че (1) е вярно за всяко $x\in\Delta$. Това неравенство и положителността на $L_n$ дават

$$L_n\,[f(t)\,;\,\xi]\leqq \omega(\delta)\sum_{k=1}^{N} a_n\,(k\delta).$$

Лемата е доказана.

С помощта на лема 1 и 2 могат да се получат оценки за приближението на функции от класовете $M_\Delta$ и $C_\Delta$ с линейни оператори, удовлетворяващи условията a), b) и c).

Теорема 1. Ако $f(x)\in C_\Delta$, то $R_n\leq H$, където $H$ е решение на уравнението

$$H=\omega(H)\sum_{k=1}^{N}\alpha_n\,(kH),\quad N=\left[\frac{|\Delta|}{H}\right].$$

*Доказателство.* Нека $\xi\in\Delta$. Да приемем, че

$$L_n\,[f(t)\,;\,\xi]-f(\xi)>0.$$

Разсъжденията са аналогични и в противния случай. Да допуснем, че съществува число $\varepsilon>0$ такова, че $R_n\,(\xi)>H+\varepsilon$. Тогава за всяко $x\in[\xi-H,\,\xi+H]\cap\Delta$ ще бъде изпълнено

$$f(x)\leq L_n\,[f(t)\,;\,\xi]-H-\varepsilon.$$

От лема 2 следва

$$L_n\,[f(t)\,;\xi]\leqq L_n\,[f(t)\,;\xi]-H-\varepsilon+\omega(H)\sum_{k=1}^{N} a_n\,(kH),$$

$$H+\varepsilon\leqq\omega(H)\sum_{k=1}^{N} a_n\,(kH).$$

Понеже $\varepsilon>0$, то

$$H<\omega(H)\sum_{k=1}^{N} a_n\,(kH).$$

Това противоречи на условието на теоремата. Доказателството е завършено.

Теорема 2. Ако $f(x)\in M_\Delta$, $A=\max\limits_{x\in\Delta}|f(x)|$, то $R_n\leq H$, където $H$ е решение на уравнението

$$H=Aa_n\,(H).$$

*Доказателството* се основава на лема 1 и протича както при теорема 1.

В [2] са получени оценки за

$$\max_{x\in\overline{f}}\ \min_{\xi}\ \|X-(\xi,\,L_n\,[f\,;\,\xi])\|_0,$$

когато $L_n$ е линеен интегрален оператор, удовлетворяващ a), b) и c) и определен за всички локално монотонни $2\pi$-периодични функции. Използвайки и оценките за $R_n$ от теорема 1 и 2, можем да оценим хаусдорфовото разстояние $r(f, L_n[f])$.

Сега ще приложим получените резултати за някои известни линейни положителни оператори.

Оператор на Джексон. Да означим с $C_{2\pi}$ множеството от всички непрекъснати $2\pi$-периодични функции. Линейният положителен оператор

$$U_n[f;x]=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt$$

съпоставя на всяка функция $f\in C_{2\pi}$ тригонометричен полином от степен $2n-2$. Понеже тук ще разглеждаме само функции от класа $C_{2\pi}$, то вместо $h_{z,\delta}(t)$, $z\in\Delta=(-\infty,\infty)$, можем да използваме функциите $h^*_{z,\delta}(t)\in C_{2\pi}$ и такива, че $h^*_{z,\delta}(t)=h_{z,\delta}(t)$ при $z$, $t\in[-\pi,\pi]$. Лесно се получава една оценка отгоре за $U_n[h^*_{z,\delta}(t);z]$, $0<\delta<\pi$. За улеснение с $\mu_n$ ще означим множителя пред интеграла.

$$U_n[h^*_{z,\delta};z]=\mu_n\int_{-\pi}^{\pi} h^*_{z,\delta}(t)\left[\frac{\sin n\frac{t-z}{2}}{\sin\frac{t-z}{2}}\right]^4 dt$$

$$=\mu_n\int_{z-\pi}^{z+\pi} h^*_{z,\delta}(t)\left[\frac{\sin n\frac{t-z}{2}}{\sin\frac{t-z}{2}}\right]^4 dt= 4\mu_n\int_{\delta/2}^{\pi/2}\left[\frac{\sin nt}{\sin t}\right]^4 dt.$$

Неравенството $\sin t\geq 2t/\pi$ за $t\in[0,\pi/2]$ дава

$$U_n[h^*_{z,\delta}(t);z]\leq\frac{1}{6}\mu_n\frac{\pi^4}{\delta^3}.$$

И така, операторът $U_n[f;x]$ удовлетворява условие c), където

$$a_n(\delta)=\frac{\pi^3}{\delta^3 n(2n^2+1)}.$$

От теорема 1 за едностранното отклонение $R_n$ на $U_n[f;x]$ от функцията $f(x)$ получаваме $R_n\leqq H$, където $H$ е решение на уравнението

$$H=\frac{\pi^3\omega(H)}{n(2n^2+1)H^3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^3},\qquad N=\left[\frac{2\pi}{H}\right]. \tag{2}$$

Вижда се, че ако

$$\frac{\pi^3\omega(x)}{n(2n^2+1)x^3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^3}<\nu(x),\quad x>0,$$

решението на уравнението $x=\nu(x)$ ще бъде по-голямо от решението на (2), а следователно и от $R_n$. За някои класове от функции може да се намери проста мажорираща функция $\nu(x)$, за която уравнението $x=\nu(x)$ се решава лесно.

Нека $f(x)\in \mathrm{Lip}_1\alpha$, $0<\alpha\leq 1$. Възползвайки се от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3$ и неравенството $\omega(\delta)\leq\delta^\alpha$, получаваме

$$R_n = O\left(n^{-\frac{3}{4-\alpha}}\right).$$

Специално ако $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$, то $R_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Тази оценка следва веднага и от очевидното неравенство $R_n \leq \varrho_n$. Като вземем пред вид, че оценката за $\varrho_n$ е точна в класа $\mathrm{Lip}\,1$ и известното неравенство [1]

$$\delta_n \leq R_n + \omega(R_n),$$

заключаваме, че и оценката за $R_n$ е точна по отношение на порядъка.

Да означим с $W$ този клас от Липшицови функции, който съдържа $\mathrm{Lip}\,1$ и за всяко $0<\alpha<1$ $\mathrm{Lip}\,\alpha\supset W$. За всяка функция от $W$ е вярно

$$\omega(\delta)\leq A\delta(1+|\ln\delta|),$$

където $A$ не зависи от $\delta$ ([3], стр. 111). От (2) следва, че за всяко $\delta>0$

$$R_n \leq \max\left\{\delta, \frac{\pi^3\omega(\delta)}{n(2n^2+1)\delta^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right\}.$$

Нека $\delta = g(n)/n$, където $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{n}=0$. Лесно се намира една независеща от $n$ константа $A_1$ такава, че

$$\frac{\pi^3\omega(\delta)}{n(2n^2+1)\delta^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\leq A_1\frac{\ln n}{n[g(n)]^2}$$

Сега избираме $g(n)$ така, че

$$\frac{g(n)}{n}=A_1\frac{\ln n}{n[g(n)]^2}.$$

Получаваме $g(n)=(A_1\ln n)^{1/3}$. И така, ако $f(x)\in W$, то

$$R_n = O((\ln n)^{1/3}/n).$$

Намерените тук оценки са точни по отношение на порядъка и за класовете $\mathrm{Lip}_1\alpha$, $0<\alpha<1$. Това се вижда от следната

Теорема 3. Ако $0\leq\alpha<1$ в $\varphi(x)$ е $2\pi$-периодична функция, за която

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^\alpha, & 0\leq x\leq\pi \\ 0, & -\pi/2\leq x<0, \\ -2\pi^{\alpha-1}.x-\pi^\alpha, & -\pi\leq x<-\pi/2, \end{cases}$$

то

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]}\ \min_{(\xi,\eta)\in\bar{\varphi}} \|(x, U_n[\varphi;x])-(\xi,\eta)\|_0\geq C.n^{-\frac{3}{4-\alpha}}$$

за всяко $n \geq 1$, където $C$ е положителна, независеща от $n$ константа.

*Доказателство.* Нека $0 < \delta < \pi/2$. Да означим с $\psi_\delta(x)$ $2\pi$-периодичната функция, за която

$$\psi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < \delta, \\ 1, & \delta \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Ще ни бъде необходима една оценка отдолу за $U_n[\psi_\delta(x); -\delta]$.

$$U_n[\psi_\delta(x); -\delta] = \mu_n \int_{-\pi}^{\pi} \psi_\delta(t) \left[ \frac{\sin n\frac{t+\delta}{2}}{\sin\frac{t+\delta}{2}} \right]^4 dt = \mu_n \int_\delta^\pi \left[ \frac{\sin n\frac{t+\delta}{2}}{\sin\frac{t+\delta}{2}} \right]^4 dt$$

$$\geq 2\mu^n \int_\delta^{\pi/2} \left[\frac{\sin nt}{t}\right]^4 dt = 2\mu_n \int_\delta^{k\pi/2n} + 2\mu_n \sum_{m=k}^{n-1} \int_{m\pi/2n}^{(m+1)\pi/2n}$$

$$\geq 2\mu_n \sum_{m=k}^{n-1} \int_{m\pi/2n}^{(m+1)\pi/2n} \left[\frac{\sin nt}{t}\right]^4 dt.$$

Съвсем лесно се доказва неравенството

$$\int_{m\pi/2n}^{(m+1)\pi/2n} \left[\frac{\sin nt}{t}\right]^4 dt > \frac{16 C_1 n^3}{\pi^4 (m+1)^4},$$

където

$$C_1 = \int_0^{\pi/2} [\sin(t + m\pi/2)]^4 dt.$$

Оттук

(3) $$U_n[\psi_\delta(x); -\delta] \geq \frac{32 C_1 n^3}{\pi^4} \mu_n \sum_{m=k+1}^{n} \frac{1}{m^4}.$$

За оценяване отдолу на сумата ще използваме следната известна ([4], стр. 32)

Лема. Нека $f(x)$ е положителна монотонно намаляваща функция, определена за $x \geq k+1$, $k \geq 0$. Нека

$$F(x) = \int_{k+1}^{x} f(t)dt, \quad F_n = f(k+1) + f(k+2) + \ldots + f(n).$$

Тогава $F(n) + f(n) \geq F_n$.

Тъй като функцията $1/t^4$ удовлетворява условията на лемата, то

$$\int_{k+1}^{n} \frac{1}{t^4} dt + \frac{1}{n^4} \leq \sum_{m=k+1}^{n} \frac{1}{m^4}.$$

Оттук

$$\sum_{m=k+1}^{n} \frac{1}{m^4} \geqq \frac{1}{3(k+1)^3} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^4}.$$

Вземайки под внимание горното неравенство, от (3) получаваме

$$U_n[\psi_\delta(x); -\delta] > \frac{32C_1 n^3}{3\pi^4} \mu_n \left(\frac{1}{(k+1)^3} - \frac{1}{n^3}\right)$$

за всяко $k$ такова, че $\delta \leqq k\pi/2\pi \leqq \pi/2$. От положителността на $U_n[f; x]$ и от очевидното неравенство $\omega(\delta)\psi_\delta(x) \leqq \varphi(x)$ следва

(4)
$$U_n[\varphi(x); -\delta] \geqq \omega(\delta) U_n[\psi_\delta(x); -\delta]$$
$$\geqq \omega(\delta) \frac{32C_1 n^3}{3\pi^4} \mu_n \left(\frac{1}{(k+1)^3} - \frac{1}{n^3}\right)$$

за всяко $\pi/2 > \delta > 0$. Тъй като $\varphi(x) \in C_{2\pi}$, то от теорема 1 следва, че съществува константа $C_2$, независеща от $n$ и такава, че

$$R_n \leqq C_2 n^{-\frac{3}{4-\alpha}}.$$

Да изберем $\delta = C_2 n^{-\frac{3}{4-\alpha}}$ и

$$k = \left[\frac{2n}{\pi} C_2 n^{-\frac{3}{4-\alpha}}\right] + 1 = \left[\frac{2C_2}{\pi} n^{-\frac{3}{4-\alpha}}\right] + 1.$$

Ясно е, че има независеща от $n$ константа $B$ такава, че

(5)
$$k \leq B n^{\frac{1-\alpha}{4-\alpha}},$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty} \mu_n n^3 = 3/4\pi$, може да се намери независеща от $n$ положителна константа $B_1$, за която

(6)
$$\frac{32C_1 n^3 \mu_n}{3\pi^4} \left(\frac{1}{(k+1)^3} - \frac{1}{n^3}\right) \geqq \frac{B_1}{k^3}.$$

Неравенствата (4), (5) и (6) дават

$$U_n[\varphi(x); -\delta] \geqq \frac{\omega(\delta) B_1}{k^3} \geqq \frac{C_2^\alpha B_1}{B^3} n^{-\frac{3}{4-\alpha}}.$$

Остава да забележим, че

$$\min_{(\xi,\eta)\in\bar{\varphi}} \|(U_n[\varphi(x); -\delta], -\delta) - (\xi, \eta)\|_0 = \min(\delta, U_n[\varphi(x); -\delta]).$$

Теоремата е доказана.

Ако $f(x)$ е $2\pi$-периодична и локално монотонна, от теорема 2 получаваме известната оценка [1]

$$R_n = O\left(n^{-\frac{3}{4}}\right)$$

за отклонението на $U_n[f; x]$ от функцията $f(x)$. От теорема 5 се вижда, че тази оценка не може да се подобри по отношение на порядъка.

Да разгледаме оператора на Фейер

$$\sigma_n[f; x] = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt.$$

Вижда се, че операторът е линеен и положителен и $\sigma_n[1; x] = 1$. Лесно се проверява и неравенството

$$\sigma_n[h^*_{z,\delta}; z] \leqq \alpha_n(\delta),$$

където $\alpha_n(\delta) = \pi/n\delta$. От теорема 1 следва, че ако $f(x)$ е $2\pi$-периодична и $f(x) \in \mathrm{Lip}_1\alpha$, то $R_n \leqq H$, където $H$ е решение на уравнението

$$H = H^{\alpha-1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}, \quad N = \left[\frac{2\pi}{H}\right]. \tag{7}$$

Тъй като може да се намери константа $C$ такава, че

$$\delta^{\alpha-1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} < C\delta^{\alpha-1}\frac{\ln n}{n}, \quad \delta > 0,$$

от (7) следва

$$R_n = O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right).$$

Тази оценка е точна само за $\alpha = 1$.

Авторът благодари на проф. Бл. Сендов за интереса, проявен към тази работа, и за направените забележки.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Сендов, Бл. Некоторые вопросы приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. — Успехи матем. наук, 24, 1969, вып. 5, 141—178.
2. Фройд, Г., Бл. Сендов. Об одном методе аппроксимации периодических функций тригонометрическими многочленами.— Труды Матем. инст. Венг. АН, Сер. А., 9, 1964, вып. 3, 491—494.
3. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
4. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т. 1. Москва, 1965.


*Постъпила на 11. V. 1971 г.*

# О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Борислав Боянов

(*Резюме*)

Получены оценки для отклонения $R(L_n[f], f)$ линейного положительного оператора $L_n$ от функции $f \in C_\Delta$:

$$R_n = R(L_n[f], f) = \max_{x \in \Delta} \min_{\xi \in \Delta} \|(x, L_n[f; x]) - (\xi, f(\xi))\|_0.$$

Применение этих результатов для оператора Джексона

$$U_n[f; x] = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt$$

дает:

Если $f \in C_\Delta$, то $R(U_n[f], f) \leq H$, где $H$ удовлетворяет уравнению $H = C\omega(H)/H^3$, $C$ — константа, не зависящая от $n$.

В частном случае, когда $f \in \mathrm{Lip}_1 \alpha$, получаем

$$R_n = O\left(n^{-\frac{3}{4-\alpha}}\right).$$

Эту оценку улучшить нельзя.

# ON THE APPROXIMATION OF FUNCTION BY LINEAR POSITIVE OPERATORS

Borislav Boyanov

(*Summary*)

An estimate of the deviation $R(L_n[f], f)$ of the linear positive operator $L_n$ from the function $f \in C_\Delta$ is obtained:

$$R_n = R(L_n[f], f) = \max_{x \in \Delta} \min_{\xi \in \Delta} \|(x, L_n[f; x]) - (\xi, f(\xi))\|_0.$$

A direct application of this result to Jackson's operator

$$U_n[f; x] = \frac{3}{2n\pi(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt$$

gives:

If $f(x) \in C_\Delta$, then $R(U_n[f], f) \leqq H$, where $H$ is a solution of the equation $H = C\omega(H)/H^3$. $C$ is constant.

In the particular case, when $f \in \mathrm{Lip}_1 \alpha$, we get

$$R_n = O\left(n^{-\frac{3}{4-\alpha}}\right).$$

This is the exact order estimate.