БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ОБОБЩЕНИЕ НА РИМАНОВАТА КРИВИНА И НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Грозьо Станилов

Широко е известно голямото значение, което има за развитието на римановата геометрия фундаменталното понятие за риманова кривина, тензор и кривина на Ричи. В много от теоремите на глобалната риманова геометрия, като прочутата теорема на Боне — Майерс, Раух, Александров — Топоногов, Адамар — Картан, Морс — Шьонберг се оперира с понятието риманова кривина като една инварианта, която се съпоставя на двумерно линейно подпространство от допирателното пространство на риманово многообразие. Естествено възниква въпросът за обобщението на това понятие, което неминуемо ще доведе до обобщение на редица класически теореми и обогатяване на учението за римановите пространства с нови факти. На Всесъюзната конференция по геометрия в СССР, състояла се през 1967 г. в Казан, при обсъждане на доклада на румънския математик К. Телеман бе повдигнат този въпрос. Тогава ние си поставихме този проблем за разрешаване и това ни се удаде в края на 1969 г., плод на което е първата ни кратка статия [2].

Преди да пристъпим към изброяване на някои по-важни резултати от настоящата работа, ще съобщим накратко за едно друго обобщение на римановата кривина, дадено от американския математик Дж. Торп [9].

Нека X е четномерно риманово многообразие от димeнсия n, x е точка от това многообразие, а P е четномерно линейно подпространство от допирателното пространство X_x на многообразието X в точката x; $\dim P = p$. Торп оперира с величината

$$\gamma_p(x, P) = \frac{(-1)^{p/2}}{2^{p/2}p!}\sum{}' \varepsilon_{i1\ldots ip}\varepsilon_{j1\ldots jp}\langle R(u_{i1}, u_{i2})u_{j1}, u_{j2}\rangle$$
$$\langle R(u_{i3}, u_{i4})u_{j3}, u_{j4}\rangle \cdots \langle R(u_{ip-1}, u_{ip})u_{jp-1}, u_{jp}\rangle,$$

като $u_1, \ldots, u_p$ е ортонормална база за подпространството P. В дясната страна се извършва сумиране по всички пермутации на числата $1, 2, \ldots, p$, като получените членове се вземат със съответен знак. В частност, ако римановата кривина K е постоянна величина, кривината γ_p от ред p е също постоянна величина и $\gamma_p = K^{p/2}$.

Докато Торп обобщава понятието риманова кривина за четномерно линейно подпространство от допирателното пространство на четномерно риманово многообразие, при нас не е нужно да се правят тези ограничения. При това даденото от нас обобщение в четномерния случай се отличава от това на Торп.

Ето и накратко съдържанието на основните резултати, получени от нас.

В настоящата работа M е n-мерно риманово многообразие, като $n \geqq 2$ е произволно естествено число. В § 1 дефинираме основната величина — взаимната инварианта на две произволни линейни подпространства от допирателното пространство на M. При известни ограничения за двете подпространства дефинираме кривина на произволномерно линейно подпространство от допирателното пространство на M, кривина на Ричи за направление относно произволномерно линейно подпространство. И при съвсем специален избор на подпространствата достигаме до класичните понятия за риманова кривина (кривина на двумерно линейно подпространство) и кривина на Ричи (кривина на Ричи относно цялото допирателно пространство). В този параграф тези величини са отнесени спрямо ортонормални бази на съответните линейни подпространства. В § 2 намираме формули за тези величини, като предполагаме, че линейните подпространства са отнесени спрямо произволни бази. Между другото в този параграф поднасяме и формули, с помощта на които може ефективно да се построи една ортонормална база на линейно пространство, като се знае произволна негова база. Доколкото ни е известно, тези формули не се срещат в литературата и това ни дава основание да считаме, че те са нови. В § 3 даваме една интересна характеристика на пространствата на Айнщайн, а в § 5 — една нова характеристика на пространствата с постоянна риманова кривина, като използваме кривините на Ричи от ред $m \leqq n-2$. В [2] ние дадохме една характеристика на тези пространства, като използвахме кривините на m-мерните линейни подпространства. В § 4 обобщаваме две известни теореми от глобален характер, като доказваме една теорема, в която фигурира естественото число m. За $m=1$ получаваме теоремата на Боне—Майерс, а при $m=n-1$ — една друга теорема на Майерс. В § 6 даваме една интерпретация на кривината на Ричи от произволен ред.

Резултатите от § 1, 2 и 4 получих по време на пребиваването ми в Бон при проф. В. Клингенберг. С него и проф. Х. Кархер водих често интересни и полезни разговори и тук е мястото да изкажа благодарността си на двамата за това. Останалите резултати са нови.

Част от резултатите, поместени в тази работа, бяха съобщени на математическия конгрес на балканските математици, състоял се през 1971 г. в Истанбул (Турция).

§ 1. ОБОБЩЕНИЕ НА РИМАНОВАТА КРИВИНА

Нека M е риманово многообразие от димeнсия n, R е тензорът на кривината за свързаността на Леви - Чивита. Означаваме с $\langle , \rangle$ метричния тензор (скаларно произвединие) на M. За произволна точка $p \in M$ с M_p означаваме допирателното пространство към M в точката p. Нека E^m, E^k са две линейни подпространства на пространството M_p от димeнсии m, съответно k. Нашите разглеждания важат за $1 \leq m, k \leq n$. Означаваме с $u_1, \ldots, u_m$ една ортонормална база за E^m, като без ограничение считаме $u_1, \ldots, u_n$ за ортонормална база на M_p. Нека $v_1, \ldots, v_k$ е ортонормална база на подпространството E^k. В общия случай не поставяме никакви ограничения за взаимното положение на подпространствата E^m и E^k.

Нека $v, w \in M_p$ са два произволни, но фиксирани вектора. В римановата геометрия се разглежда линейното изображение

$$T: M_p \to M_p,$$

определено по следния начин:

$$T: u \to R(u, v)w,$$

за произволен вектор $u \in M_p$. Ние въвеждаме в разглеждане линейното изображение

$$P_{E^m} \circ T: E^m \to E^m,$$

като

$$P_{E^m}: M_p \to E^m$$

означава ортогонално проектиране върху подпространството E^m. Най-простата инварианта на това изображение — неговата следа — ни дава възможност да дефинираме величината

(1)
$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) := \operatorname{tr}(P_{E^m} \circ T).$$

Ако положим

$$P_{E^m} \circ T(u_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i^j u_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

получаваме

$$\lambda_i^j = \langle P_{E^m} \circ T(u_i), u_j \rangle,$$

или

$$\lambda_i^j = \langle R(u_i, v)w, u_j \rangle.$$

Следователно

(2)
$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \langle R(u_i, v)w, u_i \rangle$$

за произволни $v, w \in M_p$. От свойствата на тензора на кривината и скаларното произведение следва, че $\underset{2}{S}_{E^m}$ е билинейно и симетрично изображение на M_p в полето на реалните числа R:

$$\underset{2}{S}_{E^m}: M_p \times M_p \to \mathsf{R},$$

$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) = \underset{2}{S}_{E^m}(w, v).$$

Впрочем $\underset{2}{S}_{E^m}$ е симетричен тензор от тип (0, 2), който ще наричаме *тензор на Ричи от тип (0, 2) относно подпространството E^m*.

От линейната алгебра е известно съществуването на линейно изображение

$$\overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m} : M_p \to M_p,$$

притежаващо свойството [1]

$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) = \langle \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}(v), w\rangle. \tag{3}$$

То ни дава възможност да разгледаме линейното изображение

$$P_{E^k} \circ \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m} : E^k \to E^k.$$

Сега дефинираме основната величина

$$K(E^m, E^k) := \operatorname{tr}(P_{E^k} \circ \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}). \tag{4}$$

Полагаме

$$P_{E^k} \circ \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}(v_j) = \sum_{s=1}^{k} \mu_j^s v_s, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Оттук получаваме

$$\mu_j^s = \langle P_{E^k} \circ \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}(v_j), v_s\rangle = \underset{2}{S}_{E^m}(v_j, v_s).$$

Следователно

$$\mu_j^s = \sum_{i=1}^{m} \langle R(u_i, v_j)v_s, u_i\rangle.$$

Тогава имаме

$$K(E^m, E^k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \langle R(u_i, v_j)v_j, u_i\rangle. \tag{5}$$

От това представяне се вижда непосредствено, че

$$K(E^m, E^k) = K(E^k, E^m), \tag{6}$$

т. е. че K е симетрична функция на двете линейни подпространства E^m E^k. Тази величина наричаме *взаимна инварианта на подпространствата* E^m, E^k *в точката* p. При нашите разглеждания тя има да играе важна роля. Взаимната инварианта K зависи освен от подпространствата E^m, E^k още и от точката p:

$$K(p;\ E^m, E^k).$$

Сега ще разгледаме някои частни случаи.

1. Нека двете подпространства съвпадат: $E^m \equiv E^k$. От (5) имаме

$$K(E^m, E^m) = \sum_{i,j=1}^{m} \langle R(u_i, u_j)u_j, u_i\rangle. \tag{7}$$

Сега дефинираме

$$K(E^m) := \frac{1}{2} K(E^m, E^m). \tag{8}$$

От (7), като използваме свойствата на тензора на кривината, намираме

$$K(E^m) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \langle R(u_i, u_j)u_j, u_i \rangle. \tag{9}$$

Като вземем пред вид, че

$$\langle R(u_i, u_j)u_j, u_i \rangle = : K(u_i, u_j) = K_{ij} \tag{9'}$$

е римановата кривина на двумерната равнина, определена от точката p и векторите u_i, u_j, можем да пишем

$$K(E^m) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} K_{ij}. \tag{10}$$

Величината $K(E^m)$ наричаме *кривина на m-мерното линейно подпространство* E^m на допирателното пространство M_p.

Има да разгледаме два подслучая.

а) Нека $m = n$. Тогава $E^m = M_p$ и от (10) имаме

$$K(M_p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = : S(p), \tag{11}$$

което е *скаларната кривина на римановото многообразие в точката* p. Тя според нашата интерпретация се явява кривина на цялото допирателно пространство.

Ще отбележим, че в някои курсове под скаларна кривина се разбира $2S(p)$ [3].

б) Нека $m = 2$. От (10) получаваме

$$K(E^2) = K_{12}.$$

Следователно дефинираната от нас кривина за m-мерно подпространство в двумерния случай съвпада с римановата кривина на двумерната равнина.

2. Нека двете подпространства не съвпадат, но $k = 1$. Сега дефинираме

$$\varrho_{E^m}(v) := K(E^m, E^1), \tag{12}$$

като v е единичен вектор в E^1. В частност, ако v е ортогонален вектор на E^m, имаме

$$\varrho_{E^m}(v) = \sum_{i=1}^{m} K(u_i, v). \tag{13}$$

Величината $\varrho_{E^m}(v)$ наричаме *кривина на Ричи за направлението v относно подпространството* E^m. В частност, ако $m = n$ или $m = n-1$, от (12) получаваме

$$\varrho_{M_p}(u_n) = \sum_{i=1}^{n-1} K(u_i, u_n) \tag{14}$$

$(u_n \quad v)$, което е обикновената кривина на Ричи за направлението v. Следователно последната се явява като кривина на Ричи относно цялото допирателно пространство.

От самия начин, по който достигнахме до дефинираните величиии, е ясно, че те не зависят от избраните в тях бази. Впрочем ние ще докажем и директно следната

Теорема 1. Взаимната инварианта $K(E^m, E^k)$ не зависи от ортонормалните бази на двете линейни подпространства.

Доказателство. Нека $u'_1, \ldots, u'_m$ е друга ортонормална база за E^m, (а $v'_1, \ldots, v^1_K$ е такава за E^k. Имаме

$$u'_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j_i u_j, \quad v'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{k} \beta^\mu_\lambda v_\mu,$$

като матриците (α^j_i), (β^μ_λ) са ортогонални. Тогава

$$K'(E^m, E^k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{k} \langle R(u'_i, v'_\lambda)v'_\lambda, u'_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\bar{\mu}=1}^{k} \sum_{\bar{j}=1}^{m} \alpha^j_i \beta^\mu_\lambda \beta^{\bar{\mu}}_\lambda \alpha^{\bar{j}}_i \langle R(u_j, v_\mu)v_{\bar{\mu}}, u_{\bar{j}}\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k} \langle R(u_j, v_\mu)v_\mu, u_j\rangle \quad K(E^m, E^k),$$

тъй като

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^j_i \alpha^{\bar{j}}_i = \delta^{\bar{j}}_j,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \beta^\mu_\lambda \beta^{\bar{\mu}}_\lambda - \delta^{\bar{\mu}}_\mu,$$

като вдясно стоят символите на Кронекер.

На края ще отбележим, че при $m = n$ дефинираният тензор на Ричи относно допирателното пространство M_p съвпада с обикновения тензор на Ричи.

§ 2. ОТНАСЯНЕ НА ДЕФИНИРАНИТЕ ВЕЛИЧИНИ СПРЯМО ПРОИЗВОЛНИ БАЗИ

В теорията на римановите пространства кривината на Риман, т. е. кривината на двумерна равнина от допирателното пространство на риманово многообразие, се използва по-често отнесена спрямо произволна база на равнината, а не спрямо специална ортонормална система, както показва формулата (1.9'). Затова в тези параграф си поставяме за задача да изразим кривината на Ричи относно линейно подпространство, кривината на подпространство и взаимната инварианта на две линейни подпространства спрямо произволни бази на съответните линейни подпространства. За да решим тази задача, необходими са ни експлицитни формули, които позволяват директно намирането на ортонормални бази на дадено линейно пространство, като се излиза от произволна база на същото пространство. Наистина методът на Грам — Шмидт за ортогонализация на базата позволява намирането на ортонормална база, но ефективни формули за това не се дават. Ние най-напред ще дадем такива формули, след което ще пристъпим към решението на поставените задачи.

Нека L е n-мерно линейно пространство, снабдено със скаларно произведение $(\ ,\ )$. Нека $v_1, \ldots, v_n$ е произволна база на L. С помощта на тези вектори построяваме следните вектори:

$$u_1 := \frac{v_1}{\sqrt{D(v_1)}}, \quad D(v_1) := (v_1, v_1),$$

$$u_2 := \frac{1}{\sqrt{D(v_1)D(v_1, v_2)}} \begin{vmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

$$(1) \qquad u_k := \frac{1}{\sqrt{D(v_1 \ldots v_{k-1})D(v_1 \ldots v_k)}} \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1, v_k) \\ \\ (v_{k-1} v_1) & (v_{k-1} v_k) \\ v_1 & v_k \end{vmatrix}, \quad k = 3, 4, \ldots, n.$$

Тук

$$D(v_1 \ldots v_k) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_k) \\ \\ (v_k v_1) & (v_k v_k) \end{vmatrix}$$

е детерминантата на Грам за векторите $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Ще покажем, че така построените вектори $u_1, u_2, \ldots, u_k$ образуват ортонормална база. Очевидно е, че векторите u_1, u_2 образуват ортонормална база и определят същото двумерно подпространство, както и векторите v_1, v_2.

Да допуснем, че векторите $u_1, \ldots, u_{k-1}$, определящи същото линейно подпространство както векторите $v_1, \ldots, v_{k-1}$, образуват ортонормална система от вектори. Тогава достатъчно е да покажем, че u_k е перпендикулярен вектор на $u_1, \ldots, u_{k-1}$ или все едно на векторите $v_1, \ldots, v_{k-1}$ и има квадрат 1. За фиксирано $i = 1, 2, \ldots, k-1$ имаме

$$(u_k, v_i) = \frac{1}{\sqrt{D(v_1 \ldots v_{k-1})D(v_1 \ldots v_k)}} \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_k) \\ \\ (v_{k-1} v_1) & . (v_{k-1} v_k) \\ (v_1 v_i) & (v_k v_i) \end{vmatrix} = 0,$$

тъй като детерминантата има два равни реда. Нека A_{kj} означава адюнгираното количество на елемента (v_k, v_j) в детерминантата на Грам $D(v_1, \ldots, v_k)$. Имаме

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{D(v_1 \ldots v_{k-1})D(v_1 \ldots v_k)}} (v_1 A_{k1} + \cdots + v_k A_{kk}).$$

Понеже $u_k \perp v_1, \ldots, v_{k-1}$, следва

$$u_k \perp v := v_1 A_{k1} + \cdots + v_{k-1} A_{kk-1}.$$

Тогава

$$(u_k, u_k) = \frac{1}{D(v_1 \ldots v_{k-1}) D(v_1 \ldots v_k)} (v + v_k A_{kk})^2$$

$$= \frac{1}{D(v_1 \ldots v_{k-1}) D(v_1 \ldots v_k)} (v_1 A_{k1} + \cdots + v_k A_{kk}) v_k A_{kk}$$

$$= \frac{1}{D(v_1 \ldots v_{k-1}) D(v_1 \ldots v_k)} ((v_1, v_k) A_{k1} + \cdots + (v_k, v_k) A_{kk}) A_{kk} = 1.$$

С това доказахме следната

Теорема 1. Нека $v_1, \ldots, v_n$ е произволна база на линейното векторно пространство L със скаларно произведение. Тогава системата вектори $u_1, \ldots, u_n$, определени с формулите (1), образуват ортонормална база за L.

Сега ще установим едно помощно тъждество от теорията на детерминантите.

Нека

$$D_{m+1} \quad \det(v_{ij}) \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, m+1, \tag{2}$$

е различна от нула детерминанта от ред $m+1$, като поддетерминантата на елемента $v_{m+1,\, m+1}$

$$D_m = D_{m+1,\, m+1} \neq 0. \tag{3}$$

Означаваме с $A_{ij}^{m+1} (A_{ij}^m)$ адюнгираното количество на елемента v_{ij} в детерминантата D_{m+1} (D_m). Тогава важи

Теорема 2.

$$\frac{A_{ij}^{m+1}}{D_{m+1}} - \frac{A_{ij}^m}{D_m} = \frac{A_{i,m+1}^{m+1}}{D_m} \frac{A_{m+1,j}^{m+1}}{D_{m+1}}, \quad 1 \leq i, j \leq m. \tag{4}$$

Доказателство. Нека $1 \leq j, j' \leq m$. От основните свойства на детерминантите имаме

$$\sum_{i=1}^{m+1} v_{ij} A_{ij'}^{m+1} = D_{m+1} \delta_j^{j'}.$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij} A_{ij'}^{m} = D_m \delta_j^{j'}.$$

Оттук получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij} \left(\frac{A_{ij'}^{m+1}}{D_{m+1}} - \frac{A_{ij'}^m}{D_m} \right) + \frac{v_{m+1,j} A_{m+1,j'}^{m+1}}{D_{m+1}} = 0. \tag{5}$$

За всяко $1 \leq j \leq m$ очевидно важи

$$\frac{1}{D_m D_{m+1}} \left(\sum_{i=1}^{m+1} v_{ij} A_{im+1}^{m+1} \right) A_{m+1,j'}^{m+1} = 0. \tag{6}$$

Да означим

$$C_{ij'}:=\frac{A_{ij'}^{m+1}}{D_{m+1}}-\frac{A_{ij'}^{m}}{D_m}-\frac{A_{im+1}^{m+1}}{D_m}\frac{A_{m+1\,j}^{m+1}}{D_{m+1}}=0.$$

Като извадим (6) от (5), получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij}C_{ij'}=0. \tag{7}$$

Написваме (7) за $j=1,\dots,m$ и фиксирано $1\leq j'\leq m$. Поради условието (3) следва желаното

$$C_{ij'}=0,$$

с което доказателството на теоремата се завършва.

След всичко това да намерим израз за кривината на Ричи $\varrho_{E^m}(u)$ при условие, че векторът u е перпендикулярен на подпространството E^m и подпространството E^m е отнесено спрямо произволна база $v_1,\dots,v_m$. Ще установим следната

Теорема 3.

$$\varrho_{E^m}(u)-\frac{1}{D(v_1\dots v_m)}\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\langle R(v_i,u)u,v_j\rangle, \tag{8}$$

като $u\perp E^m$ и A_{ij} адюнгираното количество на (v_i,v_j) в детерминантата на Грам $D(v_1\dots v_k)$.

Доказателството ще проведем по индукция относно m.

За m 1 имаме

$$\varrho_{E^1}(u)=\langle R(u_1,u)u,v_1\rangle=\frac{1}{D(v_1)}\langle R(v_1,u)u,v_1\rangle.$$

За $m=2$

$$\varrho_{E^2}(u)=\langle R(u_1,u)u,u_1\rangle+\langle R(u_2,u)u,u_2\rangle=\frac{1}{D(v_1)}\langle R(v_1,u)u,v_1\rangle$$

$$+\frac{1}{D(v_1)D(v_1,v_2)}\langle R((v_1,v_1)v_2-(v_1,v_2)v_1,u)u,(v_1,v_1)v_2-(v_1,v_2)v_1\rangle.$$

Като приложим основните свойства на тензора на кривината, получаваме

$$\varrho_{E^2}(u)=\frac{1}{D(v_1,v_2)}\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\langle R(v_i,u)u,v_j\rangle.$$

Нека теоремата е вярна за някое m. Тогава според формулите (1)

$$\varrho_{E^{m+1}}(u)=\sum_{i=1}^{m+1}\langle R(u_i,u)u,u_i\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\langle R(u_i,u)u,u_i\rangle+\langle R(u_{m+1},u)u,u_{m+1}\rangle.$$

Според (8) имаме

$$\varrho_{E^{m+1}}(u)=\frac{1}{D(v_1\dots v_m)}\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\langle R(v_i,u)u,v_j\rangle$$

$$+\frac{1}{D(v_1\dots v_m)D(v_1\dots v_{m+1})}\langle R\left(\sum_{l=1}^{m+1}v_lA_{m+1,l},u\right)u,\sum_{j=1}^{m+1}v_jA_{m+1,j}\rangle.$$

За коефициента пред $\langle R(v_i,u)u,\ v_{m+1}\rangle$, $i<m+1$, в дясната страна на това равенство получаваме

$$\frac{A_{m+1,i}}{D(v_1\dots v_{m+1})}.$$

Търсим коефициента пред $\langle R(v_i,u)u,v_j\rangle$ за $1\leq i,j<m+1$. Непосредствено отчитаме

$$\frac{A_{ij}^{m}}{D(v_1\dots v_m)}+\frac{A_{m+1,i}^{m+1}\ A_{m+1,j}^{m+1}}{D(v_1\dots v_m)D(v_1\dots v_{m+1})},$$

което съгласно теорема 2 е равно на

$$\frac{A_{ij}^{m+1}}{D(v_1\dots v_{m+1})}$$

С това теорема 3 е доказана.

За да намерим аналогичен израз за кривината $K(E^m)$, можем да постъпим по същия начин. Тъй като сега пресмятанията са твърде сложни, ние ще приложим една друга метода. За целта ще използваме следния факт [5].

Нека V е n-мерно реално векторно пространство със скаларно произведение и нека $c_1,\dots,c_n$ е произволна база на V. Означаваме с $(C_{\lambda\mu})$ обратната матрица на матрицата на Грам $c_{\lambda\mu}:=\langle c_\lambda,c_\mu\rangle$.

Съществува матрицата $(B_{\lambda\mu})$, така че са изпълнени:

$$(\alpha)\qquad C_{\mu\nu}=\sum_{\lambda=1}^{n}B_{\lambda\mu}B_{\lambda\nu}.$$

Векторите

$$(\beta)\qquad u_l:=\sum_{\mu=1}^{n}B_{l\mu}c_\mu$$

образуват ортонормална база за V.

Нека сега $v_1,\dots,v_m$ е произволна база за E^m. Според цитираното твърдение векторите

$$u_i=\sum_{\lambda=1}^{m}B_{i\lambda}v_\lambda$$

образуват ортонормална база за E^m. Като излезем от

$$K(E^m)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\langle R(u_i, u_j)u_j, u_i\rangle,$$

получаваме

$$K(E^m)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle R\left(\sum_{\lambda=1}^{m}B_{i\lambda}v_\lambda, \sum_{\mu=1}^{m}B_{j\mu}v_\mu\right)\sum_{\mu'=1}^{m}B_{j\mu'}v_{\mu'}, \sum_{\lambda'=1}^{m}B_{i\lambda'}v_{\lambda'}\right\rangle.$$

На основание свойството (a) получаваме

Теорема 4. Нека $v_1, \dots, v_m$ е произволна база на линейното подпространство E^m на допирателното пространство M_p. Тогава

$$K(E^m)=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu,p,q=1}^{m}V_{\lambda q}V_{\mu p}\langle R(v_\lambda, v_\mu)v_p, v_q\rangle, \tag{9}$$

като $V_{\lambda\mu}$ е обратната матрица на матрицата на Грам $v_{\lambda\mu}=\langle v_\lambda, v_\mu\rangle$.

По същия начин се доказва и следната

Теорема 5. Нека E^m, E^k са две линейни подпространства на допирателното пространство M_p. Нека $u_1, \dots, u_m$; $v_1, \dots, v_k$ са произволни бази на E^m, съответно на E^k. Означаваме с

$$u_{\lambda\mu}: \langle u_\lambda, u_\mu\rangle,$$

$$v_{\lambda\mu}:=\langle v_\lambda, v_\mu\rangle$$

матриците на Грам и нека $u_{\lambda\mu}$, $v_{\lambda\mu}$ са техните обратни. Тогава за взаимната инварианта на двете подпространства имаме

$$K(E^m, E^k)=\sum_{\substack{\lambda,q=1,\dots,m\\ \mu,p=1,\dots,k}}U_{\lambda q}V_{\mu p}\langle R(u_\lambda, v_\mu)v_p, v_q\rangle\text{·} \tag{10}$$

Приложената метода, с помощта на която изведохме формулите (9) и (10), можем да приложим и за извеждане на (8). Ние предпочетохме по-дългия, но в замяна на това по-красив начин чрез използването на експлицитните формули (1).

§ 3. ЕДНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА АЙНЩАЙНОВИТЕ МНОГООБРАЗИЯ

Едно риманово многообразие, за което кривината на Ричи е постоянна, се нарича айнщайново многообразие. Достатъчно условие за това е кривината на Ричи да не зависи от направлението, като не се предполага, че тя е една и съща за всички точки на многообразието [3]·

В [2] ние дадохме следната характеристика на айнщайновите многообразия: едно риманово многообразие е айнщайново тогава и само тогава, когато кривината на хиперравнините в допирателното пространство е постоянна.

Като следствие от други резултати в [6] е показано, че едно четиримерно риманово многообразие е айнщайново точно когато всяка двумерна равнина в допирателното пространство има същата кривина както двумерната равнина, ортогонална на първата. Доказателството на този факт е елементарно и просто.

Даденото определение за кривина на произволно m-мерно линейно подпространство на допирателното пространство на риманово многообразие ни дава възможност да обобщим в една доста силна форма тези два резултата. Най-напред някои помощни твърдения.

Нека $u_1, u_2, \ldots, u_n$ е ортонормална база за допирателното пространство M_p. Означаваме с ϱ_i кривината на Ричи за направлението u_i, а с $K_{i_1 \ldots i_s}$ — кривината на s-мерното линейно подпространство, определено с векторите $u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}$. В сила е следната

Теорема 1.

$$K_{12 \ldots s} - K_{s+1, \ldots, n} = \sum_{i=1}^{s} \varrho_i - S(p), \tag{1}$$

като

$$S(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \tag{2}$$

е скаларната кривина на многообразието в точката p [2].

Доказателство. Имаме според (I.10)

$$K_{12 \ldots} \sum_{1 \leq i < j \leq s} K_{ij} = \sum_{2 \leq i < j \leq s} K_{ij} + \sum_{j=2}^{s} K_{1j},$$

или

$$K_{12 \ldots s} = K_{23 \ldots s} + \sum_{j=2}^{s} K_{1j}. \tag{3}$$

Като излезем от

$$K_{1, s+1, \ldots, n} = \sum_{s+1 \leq i < j \leq n} K_{ij} + \sum_{j=s+1}^{n} K_{1j} = K_{s+1, \ldots, n} + \sum_{j=s+1}^{n} K_{1j},$$

намираме

$$K_{s+1, \ldots, n} = K_{1, s+1, \ldots, n} - \sum_{j=s+1}^{n} K_{1j}. \tag{4}$$

От (3) и (4) получаваме

$$K_{12 \ldots s} - K_{s+1, \ldots, n} = K_{23 \ldots s} - K_{1, s+1, \ldots, n} + \sum_{j=2}^{n} K_{1j}.$$

Така получихме рекурентната формула

$$K_{12 \ldots} - K_{s+1, \quad, n} = K_{23 \ldots s} - K_{1, s+1, \ldots, n} + \varrho_1. \tag{5}$$

Полагаме $s = 2$. Имаме

$$K_{12} \quad K_{34 \ldots} \quad \varrho_1 \; - K_{134 \ldots} \tag{6}$$

Величината $K_{134\ldots n}$ е кривината на хиперравнината в M_p, ортогонална на направлението u_2. Според формулата от [2]

(7) $$K(E_i^{n-1})=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varrho_j-2\varrho_i\right)$$

имаме

(8) $$K_{134\ldots n}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\varrho_j-\varrho_2=S(p)-\varrho_2.$$

От (6) следва

(9) $$K_{12}-K_{34\ldots n}=\varrho_1+\varrho_2-S(p),$$

което показва верността на теоремата за $s=2$.

Нека формула (1) е вярна за $s-1$. Тогава можем да пишем

$$K_{23\ldots s}-K_{1,s+1,\ldots,n}=\sum_{i=2}^{s}\varrho_i-S(p).$$

От рекурентната формула (5) получаваме

$$K_{12\ldots s}-K_{s+1,\ldots,n}=\varrho_1+\sum_{i=2}^{s}\varrho_i-S(p),$$

с което теорема 1 е доказана.

От формула (1) можем да получим едно интересно тъждество, свързващо натуралните числа n, s. Именно в сила е следната формула:

(10) $$\binom{n-2}{s-2}-\binom{n-2}{n-2-s}=2\binom{n-1}{s-1}-\binom{n}{s}.$$

Доказателство. Написваме формула (1) за индексите $i_1<i_2<\ldots<i_s$

(1') $$K_{i_1\ldots i_s}-K_{j_1\ldots j_{n-s}}=\varrho_{i_1}+\cdots+\varrho_{i_s}-S(p).$$

Тук $j_1<\ldots<j_{n-s}$ са допълнителните числа на числата $i_1<\ldots<i_s$ в n-орката 1, 2, ..., n. Извършваме сумиране по всички комбинации $i_1>i_2>\ldots>i_s$. От [2] имаме

$$\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n} K_{i_1\ldots i_s}=\binom{n-2}{s-2}S(p).$$

Аналогично

$$\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{n-s}\leq n} K_{j_1\ldots j_{n-s}}=\binom{n-2}{n-s-2}S(p).$$

Има да отчетем колко пъти се явява величината ϱ_1 при сумирането на равенствата (1). Тя се явява всеки път, когато имаме величината $K_{1i_2\ldots}$

като $2 \leq i_2 < \ldots < i_s \leq n$, които са на брой $s-1$ и вземат $n-1$ стойности. Следователно коефициентът пред ϱ_1 при указаното сумиране ще бъде $\binom{n-1}{s-1}$. Като вземем пред вид, че имаме $\binom{n}{s}$ равенства (1'), след сумирането им ще получим вдясно

$$\binom{n-1}{s-1}\sum_{i=1}^{n}\varrho_i-\binom{n}{s}S(p)=\left(2\binom{n-1}{s-1}-\binom{n}{s}\right)S(p),$$

с което формула (10) е доказана.

Направените разсъждения ни водят до следната формула за скаларната кривина, изразена чрез разликите от кривините на s-мерните линейни подпространства и техните ортогонални допълнения:

$$\left(2\binom{n-1}{s-1}-\binom{n}{s}\right)S(p)=\sum(K_{i_1\ldots i_s}-K_{j_1\ldots j_{n-s}}), \tag{11}$$

като сумирането се извършва по всички $1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n$, а $j_1<\ldots<j_{n-s}$ са допълнителните числа на числата $i_1,\ldots,i_s$ в n-орката числа $1, 2, \ldots, n$.

Като следствие от получената формула (11) имаме следния резултат:

Ако разликата между кривината на произволно s-мерно линейно подпространство и неговото $(n-s)$-мерно ортогонално допълнение е постоянна величина D, независеща от точката p на многообразието, то скаларната кривина на многообразието е постоянна величина:

$$S(p)=\frac{\binom{n}{s}D}{2\binom{n-1}{s-1}-\binom{n}{s}}. \tag{12}$$

Сега си поставяме за задача да разрешим система (1) относно величините ϱ_i. За целта написваме (1) за $i_1=1$:

$$K_{1i_2\ldots i_s}-K_{j_1\ldots j_{n-s}}=\varrho_1+\varrho_{i_2}+\cdots+\varrho_{i_s}-S(p). \tag{13}$$

Сумираме равенствата (13) по всички $2\leq i_2<\ldots<i_s\leq n$, като за $j_1<\ldots<j_{n-s}$ важи казаното по-горе. Очевидно броят на уравненията (13) е $\binom{n-1}{s-1}$. Има да отчетем колко пъти се явява величината ϱ_2 вдясно на (13). Тя се среща точно тогава, когато отляво стои величината $K_{12i_3\ldots i_s}$. Понеже числата $3\leq i_3<\ldots<i_s\leq n$ са на брой $s-2$ и вземат $n-2$ стойности, коефициентът пред ϱ_2 при указаното сумиране ще бъде $\binom{n-2}{s-2}$. Така ще достигнем до

$$\sum(K_{1i_2\ldots i_s}-K_{j_1\ldots j_{n-s}})=\binom{n-1}{s-1}\varrho_1+\binom{n-2}{s-2}(\varrho_2+\cdots+\varrho_n)-\binom{n-1}{s-1}S(p)$$

$$=\left(\binom{n-1}{s-1}-\binom{n-2}{s-2}\right)\varrho_1+\binom{n-2}{s-2}\sum_{i=1}^{n}\varrho_i-\binom{n-1}{s-1}S(p)$$

$$=\left(\binom{n-1}{s-1}-\binom{n-2}{s-2}\right)\varrho_1+\left(2\binom{n-2}{s-2}-\binom{n-1}{s-1}\right)S(p).$$

оттук получаваме важната формула

$$(14)\qquad \varrho_1 = \frac{\sum'(K_{1i_2\ldots i_s}-K_{j_1\ldots j_{n-s}}) - \dfrac{2\binom{n-2}{s-2}-\binom{n-1}{s-1}}{2\binom{n-1}{s-1}-\binom{n}{s}}\left(\sum'\left(K_{i_1\ldots i_s}-K_{j_1\ldots j_{n-s}}\right)\right)}{\binom{n-1}{s-1}-\binom{n-2}{s-2}}$$

Формулите (1) и (14) ни дават възможност да формулираме следната важна теорема, явяваща се обобщение на двата резултата, споменати в началото на този параграф:

Теорема 2 (характеристика на айнщайново многообразие). Нека M е n-мерно риманово многообразие и числото s е фиксирано, като $1 < s \leq n-1$.

Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

а) кривината на Ричи е постоянна, т. е. многообразието е айнщайново;

б) разликата от кривината на произволно s-мерно линейно подпространство и неговото $(n-s)$-мерно ортогонално допълнение е постоянна величина.

Доказателството на теоремата е просто.

Нека е дадено по условие твърдението а) и нека коя да е кривина на Ричи е $\varrho = C$. От (2) намираме

$$S(p) = \frac{1}{2}\, n\, C,$$

което показва, че скаларната кривина е също постоянна. Съгласно (1) за разликите в точка б) получаваме също постоянна величина

$$s\,.\,C - \frac{1}{2}\,nC = \left(s - \frac{n}{2}\right)C.$$

Обратно, нека е дадено твърдението б) и нека коя да е разлика е равна на постоянната величина D. Според формула (14) за кривината на Ричи на произволно направление намираме постоянната стойност

$$\frac{\binom{n-1}{s-1} - \dfrac{2\binom{n-2}{s-2}-\binom{n-1}{s-1}}{2\binom{n-1}{s-1}-\binom{n}{s}}\binom{n}{s}}{\binom{n-1}{s-1}-\binom{n-2}{s-2}}\, D.$$

При доказателството на теоремата се използва една ортонормална база $u_1, \ldots, u_n$. Приведените формули (1) и (14) свързват кривината на Ричи за координатни направления и кривината на s-мерни ($(n-s)$-мерни) координатни линейни подпространства. Като се избере съответното направление за координатно или се разглежда съответното s-мерно линейно подпространство като координатно (т. е. определено с s линейно независими вектора на базата), лесно се убеждаваме, че твърдението на теоремата е независимо от базата.

С това теоремата е доказана за $2 \leq s \leq n-2$. За $s=1$ условието б) означава, че кривините на хиперравнините са постоянни и еквивалентността на двете условия е доказана от нас в [2].

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА БОНЕ — МАЙЕРС

От голямо значение в глобалната риманова геометрия е прочутата теорема на Боне — Майерс, която гласи [3], [4], [7]:

Ако M е пълно свързано риманово многообразие с риманова кривина

$$K \geqq h > 0, \tag{1}$$

то M е компактно и за неговия диаметър важи

$$d(M) \leqq \frac{\pi}{\sqrt{h}}. \tag{2}$$

Първоначално тази теорема бе доказана от Боне, но само за изпъкнали многообразия.

Един аналог на тази теорема бе получен по-късно от Майерс:

Ако M е пълно свързано риманово многообразие с кривина на Ричи

$$\varrho(v) \geqq (n-1)h > 0, \tag{3}$$

то M е компактно и за неговия диаметър важи също (2) [8].

В настоящия параграф ще обобщим тези две твърдения и едновременно ще дадем единно доказателство на двете теореми.

Най-напред в сила е следната

Теорема 1. Нека M е n-мерно риманово многообразие и нека кривината на Ричи удовлетворява условието

$$\varrho_{E^m}(v) \geqq mh > 0 \tag{4}$$

за всички единични вектори $v \in M_p$, всички m-мерни линейни подпространства E^m, за които

$$v \perp E^m \tag{5}$$

и за всички точки p на многообразието (m е фиксирано, $1 \leq m \leqq n-1$).

Тогава за разстоянието d между кои да са две спрегнати точки относно произволна геодезична g върху многообразието M е изпълнено неравенството

$$d \leqq \frac{\pi}{\sqrt{h}}. \tag{6}$$

Преди да пристъпим към доказателството на теоремата, ще отбележим, че при $m=1$ се получава теорема 3.3, а при $m=n-1$ — теорема 3.4 от втория том на [4]. Действително съгласно (1.13) поради (5) имаме

$$\varrho_{E^m}(v) = \sum_{i=1}^{m} K(u_i, v), \tag{7}$$

като $u_1, \ldots, u_m$ е ортонормална база за E^m. При $m=1$ получаваме

$$\varrho_{E^1}(v)=K(u_1, v).$$

При $m=n-1$ според (I.14) имаме

$$\varrho_{E^{n-1}}(v)=\varrho_{M_i}(v).$$

Доказателство на теоремата. Нека

$$g: J \to M,$$

като J е отворен интервал, е произволна геодезична линия върху многообразието M. Нека $a\in J$, $c\in J$ са две последователни спрегнати точки относно геодезичната. За произволно $b\in J$, подчинено на неравенствата $a<b<c$, геодезичната линия

$$g:[a, b]\to M$$

няма спрегнати точки.

Нека $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ са паралелни ортонормални векторни полета по g, като във всяка точка векторите $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_m(t)$ са ортогонални на геодезичната линия. Ако линията g отнесем спрямо дължината на дъгата си t и означим с $\dot{g}$ допирателното единично векторно по геодезичната g, имаме

$$\langle Y_i, Y_j\rangle(t)=\delta_{ij}, \quad i, j=1, \ldots, m,$$

$$\langle Y_i, \dot{g}\rangle(t)=0, \quad \langle \dot{g}, \dot{g}\rangle(t)=1,$$

като δ_{ij} е познатият символ на Кронекер. Съществуването на такива векторни полета не е ограничение нито за геодезичната линия, нито за многообразието. Наистина, ако изберем векторите $v_1, v_2, \ldots, v_m$ от допирателното пространство $M_{g(a)}$, подчинени на условията

$$\langle v_i, v_j\rangle=\delta_{ij}, \quad \langle v_i, \dot{g}(a)\rangle=0, \quad i, j=1, \ldots, m,$$

чрез паралелното им пренасяне по g достигаме до диференцируемите векторни полета $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

Нека f е произволна диференцируема функция по геодезичната линия g, като $f(a)=f(b)=0$. Тогава за диференцируемите векторни полета fY_i, $i=1, 2, \ldots, m$, можем да приложим следното твърдение 3.2 от втория том на [4]:

Нека $g:[a, b]\to M$ е геодезична линия без спрегнати точки. Нека X е диференцируемо векторно поле по g, притежаващо свойствата

а) $$X(a)=X(b)=0,$$

б) $$X(t)\perp\dot{g}(t) \quad \text{за} \quad t\in[a, b].$$

Тогава е изпълнено

(8) $$\int_a^b [\langle \nabla_{\dot{g}} X, \nabla_{\dot{g}} X\rangle-\langle R(X,\dot{g})\dot{g}, X\rangle]dt\geqq 0$$

и равенството е в сила точно когато векторното поле X е тъждествено нула.

Според казаното имаме за $i=1, 2, \ldots, m$

$$\int_a^b [\langle \nabla_{\dot g}(fY_i), \nabla_{\dot g}(fY_i)\rangle - \langle R(fY_i, \dot g)\dot g, fY_i\rangle] dt \geqq 0.$$

Понеже

$$\nabla_{\dot g}(fY_i) = f\nabla_{\dot g} Y_i + \frac{df}{dt} Y_i = \dot f Y_i,$$

тъй като Y_i е паралелно векторно поле ($\dot f = df/dt$),

$$\int_a^b [\dot f^2\langle Y_i, Y_i\rangle - f^2\langle R(Y_i, \dot g)\dot g, \quad Y_i\rangle] dt$$

$$= \int_a^b [\dot f^2 - f^2\langle R(Y_i, \dot g)\dot g, Y_i\rangle] dt \geqq 0.$$

Оттук, като сумираме за $i=1, 2, \ldots, m$, получаваме

$$\int_a^b \left[m\dot f^2 - f^2 \sum_{i=1}^m \langle R(Y_i, \dot g)\dot g, \quad Y_i\rangle \right] dt \geqq 0. \tag{9}$$

Нека $E^m(t)$ е m-мерното линейно „паралелно" подпространство на допирателното пространство $M_{g(t)}$, определено с векторите $Y_1(t), \ldots, Y_m(t)$. Понеже

$$\langle R(Y_i, \dot g)\dot g, \ Y_i\rangle(t) = K(Y_i, \dot g)(t)$$

е кривината на двумерното линейно подпространство в точката $g(t)$, определено с векторите $Y_i(t)$, $\dot g(t)$, съгласно (7) имаме

$$\varrho_{E^{m(t)}}(\dot g) = \sum_{i=1}^m \langle R(Y_i, \dot g)\dot g, \quad Y_i\rangle.$$

Очевидно за $E^m(t)$ и $\dot g(t)$ важи условието (5):

$$\dot g(t) \perp E^m(t).$$

Следователно според (4) имаме

$$\sum_{i=1}^m \langle R(Y_i, \dot g)\dot g, Y_i\rangle \geqq mh > 0,$$

т. е.

$$-\sum_{i=1}^m \langle R(Y_i, \dot g)\dot g, Y_i\rangle \leqq -mh.$$

От (9) следва

$$\int_a^b [m\dot{f}^2 - mhf^2]dt \geqq 0,$$

т. е.

$$\int_a^b (\dot{f}^2 - hf^2)dt \geqq 0. \tag{10}$$

Избираме функцията

$$f(t) = \sin\left(\pi \frac{t-a}{b-a}\right).$$

Очевидно тя е диференцируема и удовлетворява условията $f(a) = f(b) = 0$. Пресмятаме

$$\int_a^b f^2(t)dt = \frac{b-a}{2},$$

$$\int_a^b \dot{f}^2(t)dt = \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \frac{b-a}{2}.$$

Заместваме в (10) и получаваме

$$b - a \leqq \frac{\pi}{\sqrt{h}}. \tag{11}$$

Понеже b може да бъде произволно близко до c, следва

$$c - a \leqq \frac{\pi}{\sqrt{h}}. \tag{12}$$

За разстоянието d между двете спрегнати точки $g(a)$, $g(c)$ имаме

$$d = \int_a^c \sqrt{\langle \dot{g}(t), \dot{g}(t) \rangle} . dt = \int_a^c dt = c - a.$$

Следователно

$$d \leqq \frac{\pi}{\sqrt{h}},$$

което трябваше да се докаже.

Сега ще дадем обобщението на приведените в началото на този параграф две основни теореми.

Теорема 2. Нека M е m-мерно пълно свързано риманово многообразие и нека кривината на Ричи удовлетворява условието

$$\varrho_{E^m}(v) \geqq mh > 0 \tag{4}$$

за всички единични вектори $v \in M_p$, всички m-мерни линейни подпространства E^m на M_p, за които

$$v \perp E^m \tag{5}$$

и за всички точки p на многообразието; m е фиксирано, $1 \quad m \leqq n-1$.

Тогава за разстоянието d между кои да са две точки p_1, p_2 от многообразието M е изпълнено

$$d(p_1, p_2) \quad \frac{}{\sqrt{h}} \tag{13}$$

В частност диаметърът на многообразието е ограничен отгоре:

$$d(M) \quad \sqrt{h} \tag{14}$$

и многообразието M е компактно.

Доказателство. Нека p_1, p_2 са две произволни точки от многообразието M. Поради това, че M е пълно, можем да приложим известната теорема на Хопф Ринов [3]. Следователно съществува геодезична линия (без ограничение считаме отнесена спрямо дължината на дъгата си) $g:[a, b] \to M$, свързваща точките p_1, p_2: $g(a)=p_1$, $g(b)=p_2$ и при това нейната дължина е точно равна на разстоянието $d(p_1, p_2)$ между двете точки:

$$l(g)=d(p_1, p_2).$$

С други думи, g е геодезичната линия с минимална дължина. Тази линия няма спрегнати точки. Действително да допуснем, че за $a<c<b$ точката c е първата точка на a относно геодезичната линия g. Според теорема 11, стр. 153 на [7] би следвало, че

$$d(g(a), g(b))<b-a.$$

Обаче g е отнесена спрямо дължината на дъгата си и следователно

$$l(g)=\int_a^b \dot{g}\, dt=b-a.$$

Това показва, че g не е минимална, противно на заключението от теоремата на Хопф — Ринов.

Поради това, че g няма спрегнати точки, съгласно предната теорема

$$d(p_1, p_2)=l(g) \quad \bar{b} \quad a \quad \sqrt{h}$$

като b е първата спрегната точка на точката a относно геодезичната линия g. Оттук заключаваме за диаметъра на M:

$$d(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{h}}$$

Значи многообразието M е ограничено и според теоремата на Хопф — Ринов то е относително компактно, т. е. $\overline{M}$ е компактно. Но M е затворено и с това теоремата е доказана.

§ 5. ЕДНА ДРУГА ХАРАКТЕРИСТИКА НА МНОГООБРАЗИЯТА С ПОСТОЯННА РИМАНОВА КРИВИНА

В [2] доказахме, че едно n-мерно риманово многообразие е многообразие с постоянна риманова кривина (т. е. многообразие с постоянна кривина на двумерните линейни подпространства) тогава и само тогава, когато то е многообразие с постоянна кривина на m-мерните линейни подпространства. При това m е фиксирано, $3 \leq m \leq n-2$.

В този параграф ще дадем една друга подобна характеристика на тези многообразия, като на мястото на кривините на m-мерните линейни подпространства ще поставим кривините на Ричи спрямо m-мерните линейни подпространства.

Ще разглеждаме кривини на Ричи $\varrho_{E^m}(u)$, за които $u \perp E^m$. При това под кривина на Ричи от ред m за направлението u ще разбираме кривината на Ричи за това направление относно някакво m-мерно линейно подпространство.

Теорема 1. Нека E^m, E^{n-m-1} са две ортогонални линейни подпространства на допирателното пространство M_p и направлението u е перпендикулярно на тях. Тогава важи

$$\varrho(u)=\varrho_{E^m}(u)+\varrho_{E^{n-m-1}}(u). \tag{1}$$

Доказателството е просто. Нека $u_1, \ldots, u_n$ е ортонормална база за допирателното пространство M_p. Без ограничение вземаме $u=u_n$, подпространството E^m определяме с векторите $u_1, \ldots u_m$, а подпространството E^{n-m-1} — с $u^{m+1}, \ldots, u_{n-1}$. Тогава

$$\varrho(u)=\varrho_{M_p}(u)=\varrho(u_n)=\sum_{i=1}^{n-1} K(u_i, u_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{m} K(u_i, u_n)+\sum_{l=m+1}^{n} K(u_l, u_n)=\varrho_{E^m}(u_n)+\varrho_{E^{n-m-1}}(u_n),$$

с което доказателството на теоремата се завършва.

Теорема 2. Кривините на Ричи се изразяват чрез кривините на Ричи от ред m, като m е фиксирано: $1 \leq m \leq n-1$. По-точно, ако $u_1, \ldots, u_n$ е ортонормална база за допирателното пространство M_p и означим с $\varrho_{i_1 \ldots i_m}(u)$ кривината на Ричи относно m-мерното линейно координатно подпространство, определено с векторите $u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}$, в сила е следната формула:

$$\sum_{2 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \varrho_{i_1 \ldots i_m}(u_1)=\binom{n-2}{m-1}\varrho(u_1). \tag{2}$$

Доказателство. Според (I.13) имаме

$$\varrho_{1i_1\dots i_m}(u_1) = K_{1i_1}+\dots+K_{1i_m}. \tag{3}$$

Сега ще сумираме тези равенства по всички комбинации $2 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$. За да отчетем коефициента пред K_{12}, който се получава вдясно след указаното сумиране, най-напред ще забележим, че той се явява точно в израза за $\varrho_{2i_2\dots i_m}$. Понеже числата $3 \leq i_2 < \dots < i_m \leq n$ са на брой $m-1$ и вземат $n-2$ стойности, търсеният коефициент е равен на $\binom{n-2}{m-1}$. Следователно ще имаме

$$\sum \varrho_{1i_1\dots i_m}(u_1) = \binom{n-2}{m-1}\sum_{i=2}^{n} K_{1i} = \binom{n-2}{m-1}\varrho(u_1),$$

с което формула (2) е доказана.

Да приложим формула (2) за $m' = n-m-1$. Поради равенството

$$\binom{n-2}{m'-1} = \binom{n-2}{m}$$

получаваме

$$\sum_{j_1 < \dots < j_{n-m-1}} \varrho_{j_1\dots j_{n-m-1}}(u_1) = \binom{n-2}{m}\varrho(u_1). \tag{4}$$

От (1) имаме

$$\varrho(u_1) = \varrho_{i_1\dots i_m}(u_1) + \varrho_{j_1\dots j_{n-m-1}}(u_1),$$

като $2 \leq j_1 < \dots < j_{n-m-1} \leq n$ е допълнителната $(n-m-1)$-орка на числата $2 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ в редицата $2, 3, \dots, n$. Тази допълнителна $(n-m-1)$-орка ще означаваме с $\overline{i_1 \dots i_m}$. Тогава последното равенство можем да запишем във вида

$$\varrho(u_1) = \varrho_{i_1\dots i_m}(u_1) + \varrho_{\overline{i_1\dots i_m}}(u_1) \tag{5}$$

за $2 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$.

От (4) и (5) получаваме

$$\varrho_{i_1\dots i_m}(u_1) = \frac{1}{\binom{n-2}{m}} \sum_{2 \leq j_1 < \dots < j_{n-m-1} \leq n} \varrho_{j_1\dots j_{n-m-1}}(u_1) - \varrho_{\overline{i_1\dots i_m}}(u_1). \tag{6}$$

Полученият резултат може да се изкаже по следния начин:

Т е о р е м а 3. Кривините на Ричи от ред m се изразяват чрез кривините на Ричи от ред $n-m-1$ $(1 \leq m \leq n-2)$. Преходът се дава с помощта на формула (6).

Поради важността ще отбележим получения резултат при $m=1$ като

Т е о р е м а 4. Римановата кривина се изразява чрез кривините на Ричи от ред $n-2$.

Действително да положим $m=1$ в (6). Нека $i_1 = 2$. Тогава

$$(7)\qquad K_{12}=\varrho_2(u_1)=\frac{1}{n-2}\sum_{3\leq j_1<\dots<j_{n-2}}\varrho_{j_1\dots j_{n-2}}(u_1)-\varrho_{34}.$$

Нашата цел ще бъде да обобщим тази теорема в едно друго направление. Именно ще покажем, че римановата кривина може да се изрази чрез кривините на Ричи от произволен ред m ($1\leq m\leq n-2$).

Най-напред имаме за $2\leq i_1<\dots<i_m\leq n$, $j\neq 1, i_1, \dots, i_m$

$$\varrho_{i_1\dots i_m j}(u_1)=\sum_{s=1}^{m}K(u_1, u_{i_s})+K(u_1,u_j)$$

или

$$(8)\qquad \varrho_{i_1\dots i_m j}(u_1)=\varrho_{i_1\dots i_m}(u_1)+K_{1j}.$$

Сумираме равенствата (8) по указаните стойности на j. Получаваме

$$\sum_{j\neq 1, i_1, \dots, i_m}\varrho_{i_1\dots i_m j}(u_1)=(n-m-1)\varrho_{i_1\dots i_m}(u_1)+\sum_{j\neq 1, i_1, \dots, i_m}K(u_1,u_j).$$

Очевидно

$$\sum_{j\neq 1, i_1\dots i_m}K(u_1,u_j)=\varrho_{\overline{i_1\dots i_m}}(u_1).$$

Тогава

$$(9)\qquad \sum_{j\neq 1, i_1\dots i_m}\varrho_{i_1\dots i_m j}(u_1)=(n-m-1)\varrho_{i_1\dots i_m}(u_1)+\varrho_{\overline{i_1\dots i_m}}(u_1).$$

Като изключим величината $\varrho_{\overline{i_1\dots i_m}}(u_1)$ от равенствата (5) и (9), намираме

$$\sum_{j\neq 1, i_1\dots i_m}\varrho_{i_1\dots i_m j}(u_1)=\varrho(u_1)+(n-m-2)\varrho_{i_1\dots i_m}(u_1).$$

Прилагаме формула (2) за кривината на Ричи от ред $m+1$

$$\sum_{2\leq s_1<\dots<s_{m+1}\leq n}\varrho_{s_1\dots s_{m+1}}(u_1)=\binom{n-2}{m}\varrho(u_1).$$

От последните две равенства чрез изключване на величината $\varrho(u_1)$ получаваме

$$(10)\qquad \varrho_{i_1\dots i_m}(u_1)=\frac{1}{n-m-2}\left[\sum_{j\neq 1, i_1\dots i_m}\varrho_{i_1\dots i_m j}(u_1)-\frac{1}{\binom{n-2}{m}}\sum_{2\leq s_1<\dots<s_{m+1}}\varrho_{s_1\dots s_m}(u_1)\right]$$

при $1\leq m<n-2$. Така получихме

Теорема 5. Кривините на Ричи от ред m се изразяват чрез кривините на Ричи от ред $m+1$. Преходът се дава с формула (10).

Следствие. Кривините на Ричи от ред $m(1 \leq m<n-2)$ се изразяват чрез кривините на Ричи от ред $n-2$.

Прилагаме (10) за кривините на Ричи от ред $m-1$, като заместваме $i_1 \ldots i_m$ с $3, 4, \ldots, m+1$:

$$\varrho_{31\ldots m+1}(u_1)=\frac{1}{n-m-1}\left[\sum_{j\neq 1,3,4,\ldots,m+1}\varrho_{34\ldots m+1,j}(u_1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\binom{n-2}{m-1}}\sum\varrho_{s_1\ldots s_m}(u_1)\right].$$

Като излезем от

$$\varrho_{23\ldots m+1}(u_1)=\varrho_{31\ldots 1}(u_1)+K_{12}$$

и вземем пред вид предното равенство, получаваме за римановата кривина

$$K_{12}=\varrho_{2\ldots m+1}(u_1)-\frac{1}{n-m-1}\left[\sum_{j=2,m+2,\ldots,n}\varrho_{3\ldots m+1,j}(u_1)\right. \tag{11}$$

$$\left.-\frac{1}{\binom{n-2}{m-1}}\sum_{2\leq s_1<\ldots<s_m\leq n}\varrho_{s_1\ldots s_m}(u_1)\right].$$

В този израз коефициентите в дясната страна се разделят на три групи:

а) коефициентът пред кривината на Ричи $\varrho_{2\ldots m+1}(u_1)$ е

$$A=\frac{1}{n-m-1}\left(n-m-2+\frac{1}{\binom{n-2}{m-1}}\right); \tag{12}$$

б) коефициентът пред $\varrho_{3,\ldots m+1,j}$, $j=m+2,\ldots,n$ е

$$B=\frac{1}{n-m-1}\left(-1+\frac{1}{\binom{n-2}{m-1}}\right); \tag{13}$$

в) коефициентите пред останалите кривини на Ричи са

$$C=\frac{1}{n-m-1}\,\frac{1}{\binom{n-2}{m-1}}. \tag{14}$$

Така доказахме следната важна

Теорема 6. Римановата кривина се изразява чрез кривините на Ричи от произволен ред m, като $1\leq m\leq n-2$. По-точно в сила е следната формула:

$$K_{12}=\varrho_2(u_1)=A\varrho_{2\ldots m+1}(u_1)+B\sum_{j=m+2}^{n}\varrho_{34\ldots m+1,j}(u_1) \tag{15}$$

$$+C\overset{*}{\sum}\varrho_{s_1\ldots s_m}(u_1),$$

като за коефициентите A, B, C важат формулите (12), (13) и (14).

$\sum$ означава сумиране по всички останали кривини на Ричи от ред m, които могат да се образуват с помощта на базисните вектори $u_1, \ldots, u_n$ и които са отлични от кривините $\varrho_{2 \ldots m+1}(u_1)$, $\varrho_{34 \ldots m+1, j}(u_1)$ за $j=m+2, \ldots, n$.

Като вземем пред вид последната теорема и формулата (I.13), можем да формулираме

Теорема 7 (характеристика на римановите многообразия с постоянна риманова кривина). Нека M е n-мерно риманово многообразие. M е риманово многообразие с постоянна риманова кривина (т. е. с постоянна кривина на двумерните линейни подпространства) тогава и само тогава, когато то е риманово многообразие с постоянна кривина на Ричи от ред m. При това m е фиксирано и $1 \leq m \leq n-2$.

Накрая, като вземем пред вид последната теорема от [2] и току-що намерения резултат в теорема 7, можем да изкажем следната

Теорема 8. Нека M е n-мерно риманово многообразие, а m е фиксирано и $1 \leq m \leq n-2$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

а) римановата кривина е постоянна;

б) кривините на m-мерните линейни подпространства от допирателните пространства са постоянни;

в) кривините на Ричи от ред m за направления относно ортогонални на тях m-мерни линейни подпространства са постоянни.

§ 6. ЕДНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА КРИВИНАТА НА РИЧИ ОТ РЕД m

Нека M е n-мерно риманово многообразие, g е геодезична линия върху M, отнесена спрямо дължината на дъгата си. Нека освен това приемем, че $g(0)=p$, а $\dot{g}(0)=T_0$ е единичният вектор към тази линия в точката ѝ p. Предполагаме, че векторите $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_m^0$ образуват ортонормална база на някакво m-мерно линейно подпространство E_0^m в допирателното пространство M_p, което е ортогонално на T_0. Следователно изпълнени са

$$\langle A_i^0, A_j^0 \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\langle A_i^0, T_0 \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\langle T_0, T_0 \rangle = 1.$$

Нека A_i' е постоянното векторно поле върху допирателното пространство M_p, разглеждано като диференцируемо многообразие [1]. Накратко това означава следното:

Да предположим, че $l_1, l_2, \ldots, l_n$ е ортонормална база за M_p, а $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ е съответната дуална база. Известно е, че $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ могат да служат за глобални координати върху M_p. Да допуснем, че векторът A_i^0 има следното представяне в M_p

$$A_i^0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j l_j, \quad i=1, \ldots, m. \tag{1}$$

Разглеждаме във всяка „точка“ $X \in M_p$ вектора

$$(2) \qquad A_i' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \left(\frac{\partial}{\partial \omega_j} \right)_X, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

имащ същите координати λ_i^j в точката $X \in M_p$ като вектора $A_i^{\circ} \in M_p$. Показва се, че по този начин се получава едно диференцируемо векторно поле върху допирателното пространство M_p. Така достигаме до m диференцируеми векторни полета върху M_p.

От [3] и [7] е известно, че векторните полета

$$(3) \qquad W_i = tA_i = (\exp_p)_* (tA_i'), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

са векторни полета на Якоби по геодезичната линия, които във всяка нейна точка са перпендикулярни на допирателния ѝ вектор:

$$(4) \qquad \langle W_i, \dot{g}(t) \rangle \; 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

За да се разбере по-добре следващото изложение, ще уточним определението, дадено чрез (3). Да разгледаме „линията“ φ в допирателното пространство M_p, определена чрез

$$\varphi(t) = t T_0.$$

Тогава геодезичната линия има параметричното представяне

$$g(t) = \exp_p (t T_0).$$

При дефиницията (3) изображението $(\exp_p)_*$ се взема в точките на линията φ; същото се отнася и за вектора tA_i', стоящ в дясната страна на (3). От казаното е ясно, че векторът

$$A_i = (\exp_p)_* (A_i')$$

зависи от t, т. е. е векторно поле по геодезичната линия g.

Да разгледаме функцията

$$(5) \qquad \varphi_i(t) = \sqrt{\langle W_i, W_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Прилагаме формулата на Тейлор до трети ред включително:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \frac{t}{1!} \varphi'(0) + \frac{t^2}{2!} \varphi''(0) + \frac{t^3}{3!} \varphi'''(0) +$$

В [7] са пресметнати

$$\varphi_i(0) = 0, \quad \varphi_i'(0) = 1, \quad \varphi_i''(0) = 0,$$

$$\varphi_i'''(0) = -K_i(T_0, A_i^0),$$

като $K_i(T_0, A_i^0)$ е кривината на Риман за двумерното пространство, определено от съответните вектори. Като се замести във формулата на Тейлор, се получава [7]

$$(6) \qquad \sqrt{\langle A_i, A_i \rangle} = 1 - K^i(T_0, A_i^0) \frac{t^2}{6} +$$

Да сумираме сега (6) по $i=1, 2, \ldots, m$. Получаваме

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{m}\sqrt{\langle A_i, A_i\rangle}=m-\varrho_{E_0^m}(T_0)\,\frac{t^2}{6}+\ldots$$

като $\varrho_{E_0^m}(T_0)$ е кривината на Ричи от ред m за направлението T_0 относно m-мерното линейно подпространство $E_0^m\perp T_0$.

Важната формула (7) ни доставя една интерпретация за кривината на Ричи от ред m за направления, ортогонални на съответните m-мерни линейни подпространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станилов, Гр. Диференцируеми многообразия (циклостилни записки). София, 1971.
2. Stanilov, Gr. Eine Verallgemeinerung der Schnittkrümmung.— Archiv der Mathematik, **21**, 1970, No 4, 424—428.
3. Gromoll, D., W. Klingenberg, W. Meyer. Riemannsche Geometrie im Grossen. Berlin, 1968.
4. Kobayaschi, S., K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry, I, II. New York, 1969.

Dombrowski, P. Krümmungsgrössen gleichungsdefinierter Untermannigfaltigkeiten Riemannscher Mannigfaltigkeiten. — Math. Nachr., **38**, 1968, 3/4, 133—180.

6. Singer, I. M., J. A. Thorpe. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira). Tokyo, 1969, p. 355—365.
7. Hicks, N. J. Notes on Differential Geometry. Toronto, 1965.
8. Milnor, J. Morse Theory. Princeton, 1963.
9. Thorpe, J. A. Sectional Curvatures and Characteristic Classes. — Ann. Math., **80**, 1964, No. 3, 429—443.

Постъпила на 24. IX. 1971

ОБОБЩЕНИЕ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Грозьо Станилов

(*Резюме*)

Пусть M представляет собой n-мерное риманово многообразие, снабженное связностью Леви — Чивита. Пусть R — тензор кривизны данной связности, $\langle , \rangle$ — скалярные произведения многообразия.

В работе обобщаются основные понятия классической римановой геометрии: риманова кривизна двухмерной площадки касательного пространства, кривизна Ричи для данного направления. В § 1 вводится взаимный инвариант двух произвольных линейных подпространств касательного пространства многообразия M, и, выбирая специальные линейные подпространства, достигаются известных еще со времени Римана и Гаусса величин.

Пусть E^m, E^k являются двумя произвольными линейными подпространствами тангенциального пространства M_p точки p многообразия M. Тензор кривизны R дает возможность дефинировать линейное изображение в M_p $T: M_p \to M_p$ при помощи $T(u) = R(u, v)w$. Тогда $P_{E^m} \circ T$ является линейным отображением E^m в E^m, причем P_{E^m} есть ортогональная проекция M_p на E^m. След этого отображения обозначен как

$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) := \mathrm{tr}\,(P_{E^m} \circ T),$$

и исходя из равенства

$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) = \langle \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}(v), w \rangle,$$

получается новое линейное отображение $\overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}$ в M_p. Величина

$$K(E^m, E^k) = \mathrm{tr}\left(P_{E^k} \circ \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}\right)$$

называется **взаимным инвариантом** линейных подпространств E^m, E^k в точке p. Она является симметричной функцией подпространств. Действует положение (5) из § 1, что $u_1, \ldots, u_m$; $v_1, \ldots, v_k$ представляют собой ортонормальные базисы в E^m и E^k. В случае, когда два подпространства E^m, E^k совпадают, имеем по определению

$$K(E^m) := \frac{1}{2} K(E^m, E^m).$$

Эта величина названа **кривизной** m-мерного линейного подпространства касательного пространства. Если $m = 2$, получается кривизна Римана для двухмерной площадки, а если $E^m = M_p$, получается скалярная кривизна многообразия.

Величину $\varrho_{E^m}(v) := K(E^m, E^1)$ называем кривизной Ричи для направления v относительно подпространства E^m. При $E^m = M_p$ получается обыкновенная кривизна Ричи.

В § 2 для введенных величин $\varrho_{E^m}(v)$, $K(E^m, E^k)$ найдены выражения (8) и (10) при предположении, что подпространства E^m и E^k относятся к произвольным базисам, а не обязательно к ортонормальным. Здесь же даются эксплицитные формулы (1) из § 2 для ортогонализации базиса. Возможно, что эти формулы уже известны, но попытки найти их в литературе оказались безуспешными.

В § 3 дается характеристика эйнштейновых многообразий, а именно доказывается следующая теорема:

Пусть M является n-мерным римановым многообразием и число s — фиксировано, причем $1 \leq s \leq n-1$. Следующие два утверждения эквивалентны: а) кривизна Ричи является постоянной и б) разница кривизны произвольного s-мерного линейного подпространства и его $(n-s)$-мерного линейного ортогонального дополнения — постоянная величина. Эта теорема обобщает один результат из [6], относящийся к $n=4$, $s=2$.

В § 4 доказывается следующая теорема:

Пусть M — полное, связное риманово многообразие димeнсии n и пусть кривизна Ричи удовлетворяет условию

$$\varrho_{E^m}(v) \geqq mh > 0 \quad (h - \text{const})$$

для всех единичных векторов v, всех m-мерных линейных подпространств E^m в M_p, для которых $v \perp E^m$ и для всех точек p многообразия (m фиксировано и $1 < m \quad n-1$). Тогда для расстояния d между любыми двумя точками p_1, p_2 многообразия M действительно:

$$d(p_1, p_2) \leqq \frac{\pi}{\sqrt{h}}.$$

В частности, диаметр многообразия ограничен сверху, $d(M) < \pi/\sqrt{h}$, и многообразие компактно.

При $m=1$ и $m=n-1$ получаются известные теоремы Боне и Майерса.

В § 5 дается новая геометрическая характеристика многообразия с постоянной римановой кривизной. Доказывается следующая теорема:

M является многообразием с постоянной римановой кривизной только тогда, когда оно является римановым многообразием с постоянной кривизной Ричи порядка m. При этом m фиксировано и $2 \quad m \leq n-1$.

Наконец в § 6 найдено некоторыми методами, развитыми в [7], формула (7) о кривизне Ричи относительно произвольной площадки При $m=1$ результат известен из [7].

VERALLGEMEINERUNG DER RIEMANNSCHEN KRÜMMUNG UND EINIGE ANWENDUNGEN

Grozjo Stanilov

(*Zusammenfassung*)

M wird als n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit angenommen die mit dem Zusammenhang von Levi — Civita versehen ist. R ist der Krümmungstensor, $\langle\ ,\ \rangle$ ist das Skalarprodukt der Mannigfaltigkeit.

Im Artikel werden Grundbegriffe aus der klassischen Riemannschen Geometrie verallgemeinert: Riemannsche Krümmung einer zweidimensionalen Ebene im Tangentialraum, Ricci-Krümmung für eine vorgegebene Richtung. Im § 1 wird eine gegenseitige Invariante zweier beliebigen linearen Unterräume des Tangentialraumes der Mannigfaltigkeit M eingeführt und indem man spezielle lineare Unterräume wählt, kommt man zu den bereits seit der Zeit Riemanns und Gaußens bekannten Größen.

Es seien E^m, E^k zwei beliebige lineare Unterräume des Tangentialraumes M_p in Punkt p der Mannigfaltigkeit M. Der Krümmungstensor R bietet die Möglichkeit die lineare Abbildung in M_p zu definieren: $T: M_p \to M_p$, indem $T(u) = R(u, v)w$ benutzt wird. Dann ist $P_{E^m} \circ T$ die lineare Abbildung von E^m in E^m, indem P_{E^m} die orthogonale Projektion von M_p auf E^m ist. Die Spur dieser Abbildung ist mit

$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) := \mathrm{tr}\,(P_{E^m} \circ T)$$

bezeichnet und wenn wir von der Gleichung

$$\underset{2}{S}_{E^m}(v, w) = \langle \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}(v), w \rangle,$$

ausgehen, erhalten wir eine neue Abbildung $\overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}$ von M_p in M_p. Die Größe

$$K(E^m, E^k) = \mathrm{tr}\left(P_{E^k} \circ \overset{1}{\underset{1}{S}}_{E^m}\right)$$

wird die gegenseitige Invariante der linearen Unterräume E^m, E^k im Punkt p genannt. Sie ist eine symmetrische Funktion der Unterräume. Hier gilt die Darstellung (5) von § 1, indem $u_1, \ldots, u_m$, $v_1, \ldots v_k$ orthonormale Basen von E^m und E^k sind. Wenn die beiden Unterräume E^m, E^k zusammenfallen, dann hat man nach Definition $K(E^m) := \frac{1}{2} K(E^m, E^m)$. Diese Größe wird die Krümmung des m-dimensionalen Unterraumes E^m von M_p genannt. Wenn $m = 2$, dann wird die Riemannsche Krümmung für eine 2-dimensionale Ebene erhalten, und wenn $E^m = M_p$, dann erhält man die Skalarkrümmung der Mannigfaltigkeit.

Die Größe $\varrho_{E^m}(v) := K(E^m, E^1)$ wird Ricci-Krümmung für die Richtung v in Bezug auf den Unterraum E^m genannt. Bei $E^m = M_p$ erhält man die gewöhnliche Ricci-Krümmung.

Im § 2 werden für die eingeführten Größen $\varrho_{E^m}(v)$, $K(E^m, E^k)$ die Ausdrücke (8) und (10) gefunden, in der Annahme, daß die Unterräume E^m und E^k auf beliebige und nicht auf unbedingt orthonormale Basen bezogen werden. Parallel dazu werden auch die expliziten Formeln (1) von § 2 zur Orthogonalisation der Basis angeführt (diese Formeln sollten bekannt sein, doch konnten wir sie in der Literatur nicht feststellen).

Im § 3 wird eine Charakteristik der Einstein-Mannigfaltigkeiten gegeben. Und zwar wird hier das folgende Theorem bewiesen:

Nehmen wir an, daß M eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, und daß die Zahl s fixiert ist, indem $1 \leq s \leq n-1$. Die nachfolgenden zwei Behauptungen sind äquivalent: a) die Ricci-Krümmung ist konstant und b) die Differenz zwischen der Krümmung eines beliebigen s-dimensionalen Unterraumes und seiner $(n-s)$-dimensionalen linearen orthogonalen Ergänzung ist eine konstante Größe. Dieses Theorem verallgemeinert ein Ergebnis von [6], das sich auf $n=4$, $s=2$ bezieht.

In § 4 wird folgendes Theorem bewiesen:

Es sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und die Ricci-Krümmung erfülle die Bedingung

$$\varrho_{E^m}(v) \geq mh > 0 \quad (h \text{ — const})$$

für alle einzelnen Vektoren v, alle m-dimensionalen linearen Unterräume E^m des M_p, für welche $v \perp E^m$ und für alle Punkte p der Mannigfaltigkeit (m fixiert und $1 \leq m \leq n-1$). Dann gilt für die Distanz d zwischen zwei beliebigen Punkten p_1, p_2 der Mannigfaltigkeit M

$$d(p_1, p_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{h}}$$

Speziell ist der Diameter der Mannigfaltigkeit von oben durch $d(M) \leq \pi/\sqrt{h}$ begrenzt und die Mannigfaltigkeit ist kompakt.

Bei $m=1$ und $m=n-1$ werden die bekannten Theoreme von Bonnet und Meyers erhalten.

In § 5 wird eine neue geometrische Charakteristik der Mannigfaltigkeiten mit konstanter Riemannscher Krümmung gegeben. Folgendes Theorem wird bewiesen:

M ist eine Mannigfaltigkeit mit konstanter Riemannscher Krümmung genau dann, wenn sie eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Ricci-Krümmung der Ordnung m ist. Dabei ist m fixiert und $2 \leq m \leq n-1$.

Zum Schluß ist anhand von gewissen Methoden, die in [7] entwickelt sind, die Darstellung (7) der Ricci-Krümmung in Bezug auf eine beliebige dimensionale Ebene gefunden. Bei $m=1$ ist das Ergebnis aus [7] bekannt.