БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ОБОБЩЕНИЕ НА МЕТОДА НА ПОТЕНЦИАЛНИТЕ ФУНКЦИИ И ЕДНО НЕГОВО ПРИЛОЖЕНИЕ

Мария Шишкова

1. За всички задачи за разпознаване на образи е характерно, че въз основа на наблюдавано множество сигнали X трябва да се вземе определено решение, зависещо от наблюдавания сигнал. Тази зависимост може да бъде описана с някаква функция $z=f(x)$, наречена решаваща функция.

В [1—6] задачата за обучение за разпознаване на образи се свежда към задача за възстановяване на решаващата функция $f(x)$, зададена на пространството X, по случайно наблюдавани точки.

Нека пространството X е образувано от две непресичащи се множества A и B.

Предполагаме, че в X съществува функция $f(x)$ такава, че

$$\operatorname{sgn} f(x)=\begin{cases}+1, & x\in A,\\ -1, & x\in B.\end{cases}$$

Тази функция наричаме **разделяща функция**. В процеса на обучение се наблюдават точки от A и B. Подмножеството $N=\{x_1, x_2, \dots\}$ на пространството X наричаме **обучаваща редица**, ако x_i, $i=1, 2, \dots$, се появяват случайно и независимо с неизвестна, еднаква плътност на вероятността $P(x)$.

За всяка точка се съобщава към кое множество принадлежи.

Така се получава редицата $L=\{z_1, z_2, \dots z_n, \dots\}$, $z_i=\operatorname{sgn} f(x_i)$, наречена **обучение**.

Ако N_n и L_n са първите n елемента на N и L, задача на алгоритъма за обучение са явява намирането на функцията $f_n(x)$, зависеща от x, N_n и L_n и в някакъв смисъл асимптотически доближаваща се до $f(x)$.

В [2—5] е предложен следният алгоритъм за решаване на тази задача, основан на така наречения от авторите метод на потенциалните функции.

За $f(x)$ се предполага, че

$$f(x)=\sum_i c_i\varphi_i(x), \quad x\in X;$$

$\varphi_i(x)$, $i=1, 2, 3, \dots$, е ортонормирана или въобще пълна система от функция.

Тогава

$$f(x)=\sum_{y} f(y)\sum_{i}\varphi_i(y)\varphi_i(x),$$

където y взема всички стойности на сигнала x.

Авторите въвеждат потенциалната функция

$$K(x,y)=\sum \lambda_i^2\varphi_i(y)\varphi_i(x), \tag{1}$$

където реалните числа λ_i са избрани така, че $K(x,y)$ да бъде ограничена.

Апроксимацията на функцията $f(x)$ въз основа на данните, получавани при обучението, се осъществява с помощта на рекурентните съотношения

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+r_{n+1}K(x,x_{n+1})=\sum_{1}^{n} r_i(x_i)\,K(x,x_i), \tag{2}$$

$$f_0(x)=0, \tag{3}$$

$$r_{n+1}=\operatorname{sgn} f(x_{n+1})-\operatorname{sgn} f_n(x_{n+1}). \tag{4}$$

За този алгоритъм при предположение, че е изпълнено (1), в [5] е доказана теорема за сходимост.

2. Тук е направено едно обобщение на алгоритъма на потенциалните функции чрез използване на положително определена функция като потенциална функция $K(x,y)$. Ще докажем теорема за сходимост на алгоритъма, подобна на тази в [5]. Означаваме с $H(K)$ Хилбертовото пространство с възпроизвеждащо ядро, генерирано от функцията $K(x,y)$ [7] — [8]. Идеята на доказателството е подобна на [5].

Теорема. Нека в пространството X са дадени непресичащите се множества A и B и положително определената функция $K(x,y)$, $(x,y)\in X\times X$, $|K(x,y)|\leq K$, такива, че:

1) съществува разделяща функция $f(x)$ в $H(K)$ и удовлетворяваща условието

$$f(x)\begin{cases} >0, & x\in A,\\ <0, & x\in B;\end{cases}$$

множеството C от точки x, за които $f(x)=0$, не принадлежи нито към A, нито към B $(A\cup B\cup C=X)$;

2) появяванията на точки от обучаващата редица са независими събития, определени с плътност на вероятността $p(x)$.

Тогава алгоритъмът (2), (3), (4) определя $f(x)$ в такъв смисъл, че

$$\int_X |\operatorname{sgn} f(x)-\operatorname{sgn} f_n(x)|\, p(x)\,dx\to 0$$

във вероятностен смисъл.

Доказателство. Функцията $f_n(x)$, получена чрез (2), също принадлежи на $H(K)$, затова можем да означим

$$a_n=\|f(x)-f_n(x)\|, \tag{5}$$

От свойствата на Хилбертовото пространство с възпроизвеждащо ядро имаме, че

$$(K(x,\, x_{n+1}),\ K(x,\, x_{n+1})) = K(x_{n+1},\, x_{n+1}), \tag{6}$$

$$(f(x)-f_n(x),\ K(x,\, x_{n+1})) = f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}). \tag{7}$$

От (2), (5), (6) и (7) получаваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \| f(x)-f_{n+1}(x) \|^2 = \| f(x)-f_n(x)-r_{n+1}(x_{n+1})K(x,\, x_{n+1}) \|^2 \\ &= \| f(x)-f_n(x) \|^2 - 2r_{n+1}(x_{n+1})(f(x)-f_n(x),\ K(x,\, x_{n+1})) \\ &\quad + r^2_{n+1}(x_{n+1})(K(x,\, x_{n+1}),\ K(x,\, x_{n+1})). \end{aligned}$$

Следователно

$$a_{n+1} = a_n - 2r_{n+1}(x_{n+1})[f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1})] + r^2_{n+1}(x_{n+1})\, K(x_{n+1},\, x_{n+1}). \tag{8}$$

По-нататък доказателството следва както в [5].

Тази теорема позволява да се покаже, че разделящата функция се получава въз основа на средното разстояние до разделяните множества. Разстоянието зависи от потенциалната функция.

Да определим в пространството X разстояние по следния начин:

$$\varrho(x_1,\, x_2) = \| K(t,\, x_1) - K(t,\, x_2) \|$$

следователно

$$K(x_1,\, x_2) = \frac{1}{2}\, [K(x_1,\, x_1) + K(x_2,\, x_2) - \varrho^2(x_1,\, x_2)]. \tag{9}$$

Поставяйки (9) в (2), получаваме

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)\, K(x,\, x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)[K(x,\, x) + K(x_i,\, x_i) - \varrho^2(x,\, x_i)] \\ &= \frac{K(x,\, x)}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)\, K(x_i,\, x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)\, \varrho^2(x,\, x_i). \end{aligned}$$

Изразите

$$B_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i), \qquad B_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)\, K(x_i,\, x_i)$$

зависят само от обучаващата редица.

Следователно

$$f_n(x) = B_1 K(x,\, x) + B_2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)\, \varrho^2(x,\, x_i).$$

3. Изложеният метод на потенциалните функции беше използван за прогнозиране времето на безотказна работа на полупроводникови прибори.

Съществуващите в момента методи за определяне надеждността на полупроводникови прибори позволяват да се получи „групова“ оценка на количествените показатели на тяхната надеждност. Понякога това не е достатъчно, а е необходима индивидуална оценка на всеки конкретен елемент.

Основната идея за прогнозиране с разпознаване се заключва в намиране на връзката между поведението на параметрите на изучаваните изделия и параметрите на еднотипни изделия, които са приминали предварителни изпитания и за които вече е известно времето за изправна работа [9].

Всички транзистори се разделят на две класи — A и B. Към класа A са отнесени тези, за които времето за изправна работа $t > T_и$, към класа B — тези, за които $t < T_и$. Имаме съвкупност от n транзистора, преминали изпитанията, за които знаем към кой клас принадлежат:

$$N_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$
$$L_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\};$$

z_i показва към кой клас принадлежи x_i.

Нека всеки от тези n транзистора се характеризира с k параметъра

$$x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ако параметрите $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}\}$ в даден момент съдържат информация за дълготрайността z_i, може да предположим, че съществува зависимост $z_i = f(x_i)$, която позволява по известни стойности на параметрите да предскажем срока за безотказна работа на прибора. Затова задачата за индивидуално прогнозиране може да се постави като задача за възстановяване на функцията $f(x)$. Обаче тъй като за транзисторите броят на параметрите е от порядъка на 10, а броят n на приборите x_i, за които е известна стойността, не е много голям, не е възможно да се възстанови функцията по описания алгоритъм. Това налага да използваме модификация на метода на потенциалните функции..

Като потенциална функция $K(x, y)$ избираме

$$K(x, y) = \frac{a}{\beta + R^2(x, y)}, \tag{10}$$

където $R(x, y)$ е евклидовото разстояние между точките x и y, а a и β са подходящо избрани константи. Функцията $K(x, y)$ се явява мярка на близост между точките в пространството X. Тогава полагаме

$$f_0(x) = \sum_{x_s \in A} K(x, x_s) - \sum_{x_q \in B} K(x, x_q)$$

и построяваме функцията $f_n(x)$ по рекурентната зависимост

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + r_n K(x, x_n),$$
$$r_n = \frac{1}{2}[\operatorname{sgn} f(x_n) - \operatorname{sgn} f_{n-1}(x_n)].$$

Така след като сме разгледали всички n точки от обучаващата редица, получаваме

$$f_n^1(x) = f_0(x) + \sum_{x_s \in A}{}' K(x, x_s) - \sum_{x_q \in B}{}' K(x, x_q).$$

Сумирането се извършва само по тези $x_s \in A$ и $x_q \in B$, които са били разпознати неправилно.

Същата процедура можем да повторим още веднъж, приемайки $f_0^2(x)=f_n^1(x)$ и т. н., докато всички транзистори от обучаващата редица се разпознаят правилно или броят на неправилно разпознатите транзистори стане по-малък от отнапред избрано число.

Процесът на разпознаване се заключава в следното. Координатите на новопоявилата се точка x се поставят в така получената разделяща функция.

Ако $f_n(x)>0$, то $x\in A$.
Ако $f_n(x)<0$, то $x\in B$.

Ако $f_n(x)=0$, не може да се вземе никакво решение за принадлежността на точката x към един от класовете.

Оценката на вероятността на правилно разпознаване, т. е. че по стойностите на параметрите на транзисторите в момента t правилно ще се прогнозира поведението им в момента $T_{\text{н}}$, се дава с отношението

$$P_t=\frac{m(t)}{N},$$

където $m(t)$ е броят на правилните класификации за всички N транзистори при разпознаване в момента t.

Ако всичко казано досега се направи за няколко момента от $t=0$ до $t=T_{\text{н}}$, може да се построи зависимост между t и P_t. Определянето на времето t за нови изпитания се прави по тази зависимост с помощта на зададено минимално ниво на вероятността за правилно разпознаване [9].

По описания метод бяха обработени данни от експеримент, извършен над транзистори тип SFT 306. За обучаваща редица бяха взети по 30 транзистора от клас A и клас B. Техните параметри бяха измервани в интервали от 0 до 1000 часа през 25 часа. Обучаващата редица беше избрана така, че да отразява характерните откази, параметрите, които се измерват, да носят най-голяма информация за състоянието на транзисторите.

При прието минимално ниво на вероятността на правилно разпознаване 80% се получи, че по числените стойности на параметрите на транзистора при $t=200$ часа може да се прогнозира неговото поведение до 1000 часа. При контролна редица от 80 транзистора се получи $P_{t=200}=83\%$. Увеличаване на обема на обучаващия набор би довело до повишаване вероятността на правилно разпознаване.

Резултатите показват, че този метод би могъл да се използва, когато сравнително малката вероятност на правилно разпознаване не е свързана със сериозни последствия. Тази грешка при разпознаването се дължи на това, че образите в пространството на признаците се пресичат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башкиров, О. А., Э. М. Браверман, П. Б. Мучник. Алгоритмы обучения машин распознаванию зрительных образов, основанные на использование потенциальных функций. — Автоматика и телемеханика, 25, 1964, № 5, 692—695.
2. Айзерман, М. А., Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр. Теоретические основы метода потенциальных функций в задаче об обучении автоматов разделению

входных ситуаций на классы. — Автоматика и телемеханика, 25, 1964, № 6, 917—935.
3. Айзерман, М. А., Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр. Вероятностная задача об обучении автоматов распознаванию классов и метод потенциальных функций. — Автоматика и телемеханика, 25, 1964, № 9, 1307—1323.
4. Айзерман, М. А., Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр. Метод потенциальных функций в задаче о восстановлении характеристики функционального преобразователя по случайно наблюдаемым точкам. — Автоматика и телемеханика, 25, 1964, № 12, 1705—1720.
5. Браверман Э. М. О методе потенциальных функций. — Автоматика и телемеханика, 25, 1965, № 12, 2205—2213.
6. Айзерман, М. А., Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр. Проблемы обучения машин распознаванию внешних ситуаций. В: Сб. Самообучающихся автоматических систем. Москва, 1966, с. 3—8.
7. Петерсен, И. Ф. Восстановление функций с воспроизводящим ядром. Автоматика и телемеханика, 29, 1969, № 6, 95—98.
8. Аронщайн, Н. Теория воспроизводящих ядер. — Сб. Математика — периодический сборник переводов иностранных статей, 1963.
9. Покровский, Ф. Н., Б. В. Крылов. Применение статистического распознавания для ускоренных испытаний полупроводниковых приборов на надежность. — Обмен опытом в электронной промышленности, 1969, № 8.

Постъпила на 29. 11. 1971 г.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ОДНО ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Мария Шишкова

(*Резюме*)

Обобщается метод потенциальных функций для распознавания образов и доказывается теорема о сходимости алгоритма. Приводятся результаты применения метода к прогнозированию надежности полупроводниковых приборов.

GENERALIZATION OF THE METHOD OF THE POTENTIAL FUNCTIONS AND AN APPLICATION OF IT

Maria Šiškova

(*Summary*)

A generalization of the method of the potential functions used for recognition of images is given and a theorem for the convergence of the algorithm is proved. The results obtained when applying the method to forecasting the reliability of transistor apparatuses are given.