БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ ХИПЕРКОМПЛЕКСИТЕ ОТ ЛИНЕЙНИ АВТОДУАЛНИ ПОДПРОСТРАНСТВА НА БИПЛАНАРНОТО ПРОСТРАНСТВО ОТ ХИПЕРБОЛИЧЕН ТИП

Георги Ганчев

В [1] се изгражда диференциалната геометрия на еднопараметрични системи от n-мерни подпространства в бипланарното пространство B^{2n+1} от хиперболичен тип, което се третира като обобщение на двуосното хиперболично пространство. Аналог на понятието „права“ в двуосното пространство е „n-мерно линейно подпространство“ в B^{2n+1}. Автодуалните n-мерни линейни подпространства в бипланарното пространство образуват съвкупност, зависеща от $p=(n+1)^2$ параметъра. В настоящата работа разглеждаме въпроси от диференциалната геометрия на $p-1$-параметрични системи от n-мерни линейни подпространства в B^{2n+1}, които наричаме хиперкомплекси. В § 1 се занимаваме с построяването на полуканоничен репер за всеки елемент от хиперкомплекса. В § 2, като имаме пред вид [3], даваме аналогия между намерените диференциално-геометрични обекти от първи ред за хиперкомплекс и съответните обекти за еднопараметричната система от n-мерни подпространства, която наричаме хиперрой.

§ 1. ПОЛУКАНОНИЧЕН РЕПЕР НА ХИПЕРКОМПЛЕКС

J и K са абсолютните n-мерни подпространства на бипланарното хиперболично пространство B^{2n+1}. Ще разгледаме проективни координатни системи $Q=(A_0, \ldots, A_n; B_0, \ldots B_n; E)$ със следното свойство: точките $A_i+B_i (i=0, 1, \ldots, n)$ лежат в J, точките $B_i (i=0, 1, \ldots, n)$ лежат в K. Проективните координатни системи от този вид ще наричаме B-репери. Семейството на B-реперите зависи от $2n^2+4n+1$ параметъра. За индексите, които ще използваме по-нататък, важи

$$h, i, j, k=0, 1, \ldots, n; \quad r, s, l, m=1, \ldots, n. \tag{1}$$

Да отнесем пространството B^{2n+1} спрямо фиксиран B-репер $Q^0=(A_0^0, \ldots, A_n^0; B_0^0, \ldots, B_n^0; E^0)$. Една точка P от B^{2n+1} има спрямо Q^0 хомогенни координати $(x^0, \ldots, x^n; y^0, \ldots y^n)$. Произволна колинеация ω, запазваща J и K, има спрямо Q^0 следното представяне в хомогенни точкови координати:

$$(2) \qquad \omega: \begin{aligned} \varrho x^i &= a^i_j x^j, \\ \varrho y^i &= (a^i_j - b^i_j)x^j + b^i_j y^j, \end{aligned}$$

като $\det \| a^i_j \|, \det \| b^i_j \| \neq 0$, $\varrho \neq 0$.

При така избраното семейство на B-реперите формулите за инфинитезималните преобразования на върховете на B-репера Q имат вида

$$(3) \qquad \begin{aligned} dA_i &= \omega^j_i A_j + (\omega^j_i - \theta^j_i)B_j, \\ dB_i &= \theta^j_i B_j, \end{aligned}$$

където ω^j_i и θ^j_i са линейни диференциални форми. Структурните уравнения на бипланарното пространство, изразяващи условията за пълната интегрируемост на диференциалната система (3), са следните:

$$(4) \qquad D\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k, \quad D\theta^j_i = \theta^k_i \wedge \theta^j_k.$$

Хиперкомплекс от n-равнини дефинираме като гладка $n(n+2)$-параметрична система от n-равнини P^n. Една n-равнина ще определяме с $n+1$ линейно независими точки $G_i(x^0_i, \dots, x^n_i; y^0_i, \dots, y^n_i)$. Тогава един хиперкомплекс H от P^n се представя с уравненията

$$(5) \qquad H: x^j_i = f^j_i(u^1, \dots, u^{p-1}), \quad y^j_i = g^j_i(u^1, \dots, u^{p-1}),$$

където функциите f^j_i, g^j_i са реални достатъчен брой пъти непрекъснато диференцируеми в област $V \subset \mathbb{R}^{p-1}$. Ще предполагаме, че n-равнините на хиперкомплекса нямат общи точки с J и K. Това означава, че системите $A_0+B_0, \dots, A_n+B_n, G_0, \dots, G_n$ и $B_0, \dots, B_n, G_0, \dots, G_n$ се състоят от линейно независими точки. От последното получаваме, че необходимото и достатъчно условие хиперкомплексът H да няма общи точки с абсолютните подпространства е

$$(6) \qquad \det \| x^j_i \| \neq 0, \quad \det \| x^j_i - y^j_i \| \neq 0.$$

Нека P^n е произволна n-равнина от H. Разглеждаме онези B-репери, за които точките $A_0, \dots, A_n$ лежат в P^n. Семейството на B-реперите от този вид наричаме B-репери от първи ред за P^n. При действието на стационарната подгрупа на P^n точките $A_i + dA_i$ лежат върху P^n. От (3) получаваме, че формите

$$(7) \qquad \varphi^j_i = \omega^j_i - \theta^j_i$$

се анулират при неподвижна n-равнина P^n и следователно съдържат диференциалите само на главните параметри $u^1, \dots, u^{p-1}$. Понеже формите φ^j_i са $p = (n+1)^2$ на брой, между тях съществува линейна връзка, която записваме във вида

$$(8) \qquad a^i_j \varphi^j_i = 0,$$

като $a^0_0 = -1$. Равенството (8) е диференциалното уравнение на хиперкомплекса H спрямо репер от първи ред.

Семейството на B-реперите от първи ред зависи от $p-1$ главни параметъра $u^1, \ldots, u^{p-1}$ и от n^2+3n+1 вторични параметъра. Нека π_i^j е значението на формата ω_i^j при изменението само на вторичните параметри. От (7) следва, че при постоянни главни параметри значението на формата θ_i^j е също π_i^j. Означаваме с δ символа за диференциране по вторичните параметри. Като диференцираме външно (8) и приложим лемата на Картан, получаваме

$$
\begin{aligned}
&\psi_0^s = \lambda_{0r}^{s0}\varphi_0^r + \lambda_{00}^{sr}\varphi_r^0 + \lambda_{0m}^{sr}\varphi_r^m, \\
(9) \qquad &\psi_s^0 = \lambda_{sr}^{00}\varphi_0^r + \lambda_{s0}^{0r}\varphi_r^0 + \lambda_{sm}^{0r}\varphi_r^m, \\
&\psi_s^r = \lambda_{sm}^{r0}\varphi_0^m + \lambda_{s0}^{rm}\varphi_m^0 + \lambda_{sl}^{rm}\varphi_m^l,
\end{aligned}
$$

където

$$
\begin{aligned}
&\psi_0^s = da_0^s + a_0^s(a_0^r\omega_r^0 - a_r^0\theta_0^r) + a_0^r\omega_r^s - a_r^s\theta_0^r - a_0^s\theta_0^0 - \omega_0^s, \\
(10) \qquad &\psi_s^0 = da_s^0 + a_s^0(a_0^r\omega_r^0 - a_r^0\theta_0^r) + a_s^r\omega_r^0 - a_r^0\theta_s^r + a_s^0\omega_0^0 + \theta_s^0, \\
&\psi_s^r = da_s^r + a_s^r(a_0^m\omega_m^0 - a_m^0\theta_0^m) + a_s^m\omega_m^r - a_m^r\theta_s^m + a_s^0\omega_0^r - a_0^r\theta_s^0.
\end{aligned}
$$

За коефициентите в (9) са изпълнени условията

$$
\begin{aligned}
(11) \qquad &\lambda_{0r}^{s0} = \lambda_{0s}^{r0}, \quad \lambda_{00}^{sr} = \lambda_{rs}^{00}, \quad \lambda_{0m}^{sr} = \lambda_{rs}^{m0}, \\
&\lambda_{s0}^{0r} = \lambda_{r0}^{0s}, \quad \lambda_{sm}^{0r} = \lambda_{r0}^{ms}, \quad \lambda_{sl}^{rm} = \lambda_{mr}^{ls}.
\end{aligned}
$$

От (9) и (10) при изменение само на вторичните параметри получаваме

$$
\begin{aligned}
&\delta a_0^s = a_0^s(a_r^0\pi_0^r - a_0^r\pi_r^0) - a_0^r\pi_r^s + a_i^s\pi_0^i + \pi_0^s, \\
(12) \qquad &\delta a_s^0 = a_s^0(a_r^0\pi_0^r - a_0^r\pi_r^0) + a_r^0\pi_s^r - a_s^i\pi_i^0 - \pi_s^0, \\
&\delta a_s^r = a_s^r(a_m^0\pi_0^m - a_0^m\pi_m^0) + a_i^r\pi_s^i - a_s^i\pi_i^r.
\end{aligned}
$$

Да разгледаме една фиксирана $n+1$-равнина P^{n+1}, минаваща през P^n. Нека тя се представя чрез линейно независимите уравнения

$$(13) \qquad c_i^s x^i + d_i^s y^i = 0.$$

Условието n-равнините от околност на P^n в хиперкомплекса H да лежат в P^{n+1} дава следните $n(n+1)$ връзки между параметрите $u^1, \ldots, u^{p-1}$:

$$(14) \qquad c_i^s x_j^i + d_i^s y_j^i = 0.$$

Следователно в общия случай n-равнините от околност на P^n в H, лежащи в P^{n+1}, образуват гладка n-параметрична система S^n. Нека точката P е носителят на допирателната звезда от n-равнини към S^n в n-равнината P^n. Ще намерим аналитичен израз на съответствието

$$(15) \qquad \pi(P^n) \cdot P^{n+1} \to P.$$

P^{n+1} пресича K точно в една точка M. Нека M $t^i B_i$. Определяме P^{n+1} с точките $A_0, \ldots, A_n$ и M. За грасмановите координати (P^{n+1}) на P^{n+1} ще имаме

$$(16) \qquad (P^{n+1}) = t^i(A_0 \dots A_n B_i).$$

От (16) и (3) се получава

$$(17) \qquad d(P^{n+1}) = (dt^i + t^i(\omega_0^0 + \dots + \omega_n^n) + t^j\theta_j^i)(A_0 \dots A_n B_i)$$
$$+ t^i\varphi_0^j(B_j A_1 \dots A_n B_i) + \dots + t^i\varphi_n^j(A_0 A_1 \dots B_j B_i).$$

Поне едно от числата t^i не е нула. Нека $t^0 \neq 0$. Тогава (16) се записва във вида

$$(18) \qquad (A_0 \dots A_n B_0) = \frac{1}{t^0}(P^{n+1}) - \frac{t^s}{t^0}(A_0 \dots A_n B_s).$$

Изразяваме условието $n+1$-равнината P^{n+1} да е неподвижна. Като вземем пред вид (18), от (17) получаваме

$$(19) \qquad dt^s + t^j\theta_j^s - \frac{t^s}{t^0}(dt^0 + t^j\theta_j^0) = 0,$$
$$t^0\varphi_i^j - t^j\varphi_i^0 = 0.$$

Равенствата (8) и (19) ни дават n^2+n+1 връзки между главните форми φ_i^j. Останалите n независими форми са главните форми на n-параметричната система S^n от n-равнини в P^{n+1}. За грасмановите координати (P^n) на n-равнината P^n, определена с точките $A_0, \dots, A_n$, имаме $(P^n) = (A_0 \dots A_n)$. В такъв случай n-равнината $(P^n) + d(P^n)$ ще опише тангенциалната звезда на S^n в P^n. Като вземем пред вид (3), получаваме

$$(20) \qquad (P^n) + d(P^n) = (1 + \omega_0^0 + \dots + \omega_n^n)(A_0 \dots A_n) + \varphi_0^i(B_i A_1 \dots A_n)$$
$$+ \dots + \varphi_n^i(A_0 A_1 \dots B_i).$$

Стойността на координатата $1 + \omega_0^0 + \dots + \omega_n^n$ за P^n е 1. Следователно $1 + \omega_0^0 + \dots + \omega_n^n \neq 0$ в околност на точката от V, за която се получава P^n. От тази координата получаваме следните базисни точки за $(P^n) + d(P^n)$ [2]:

$$(21) \qquad A_i = (1 + \omega_0^0 + \dots + \omega_n^n)A_i + \varphi_i^j B_j.$$

Понеже формите φ_i^j удовлетворяват (19), то (21) придобива вида

$$(22) \qquad A_i = (1 + \omega_0^0 + \dots + \omega_n^n)A_i + \frac{1}{t^0}\varphi_i^0 M.$$

Ще търсим точка $P = q^i A_i$ в P^n, която да лежи във всяка n-равнина, определена с точките (21). От (19) и (22) следва, че условието за това е

$$(23) \qquad q^i\varphi_i^0 = 0.$$

От равенствата (19) за уравнението (8) получаваме

$$(24) \qquad (a_j^i t^j)\varphi_i^0 = 0.$$

За хиперкомплекса H ще предположим, че

$$(25) \qquad \det|a_j^i| \neq 0.$$

При това условие поне едно от числата $a^i_j t^j$ не е нула. Нека $a^0_j t^j \neq 0$. От (24) следва

$$\varphi^0_0 = -\frac{a^s_j t^j}{a^0_j t^j}\varphi^0_s. \tag{26}$$

Заместваме φ^0_0 в (23) и получаваме

$$\left(q^s - \frac{a^s_j t^j}{a^0_j t^j} q^0\right)\varphi^0_s = 0, \tag{27}$$

откъдето поради линейната независимост на формите φ^0_s следва

$$\varrho q^i = a^i_j t^j, \quad \varrho \neq 0. \tag{28}$$

Получените формули (28) представляват аналитичен израз на съответствието π спрямо B-репера Q. С това при условието (25) установихме следната

Теорема 1. Съответствието $\pi(P^n)$: $P^{n+1} \rightarrow P$ е проективност.

Съответствието π ще наричаме нормална проективност. Разбира се, π може да се разглежда и като проективност между K и P^n: $\pi(M) = P$.

Нека сега $P = q^i A_i$ е произволна точка от P^n. Да означим с $\tau(P) = M$ прободната точка на единствената трансверзала на J и K, минаваща през P, с K. Ако $M = t^i B_i$, за координатите t^i намираме $\varrho t^i = q^i$, $\varrho \neq 0$. Нека $\pi(M) = \bar{P} = \bar{q}^i A_i$. Като вземем пред вид (19), можем да формулираме

Теорема 2. Във всяка n-равнина p^n от хиперкомплекса H при условието (25) се индуцира проективност

$$\sigma = \pi \circ \tau: P \rightarrow \bar{P}, \tag{29}$$

която има следното представяне спрямо Q:

$$\sigma: \varrho \bar{q}^i = a^i_j q^j, \quad \varrho \neq 0, \tag{30}$$

Характеристичното уравнение на матрицата (a^j_i) е

$$(-1)^{n+1}\lambda^{n+1} + (-1)^n S_1 \lambda^n + \cdots + S_{n+1} = 0, \tag{31}$$

където

$$S_r = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \begin{vmatrix} a^{i_1}_{i_1} & a^{i_2}_{i_1} \ldots a^{i_r}_{i_1} \\ a^{i_1}_{i_2} & a^{i_2}_{i_2} \ldots a^{i_r}_{i_2} \\ \cdot & \\ a^{i_1}_{i_r} & a^{i_2}_{i_r} \ldots a^{i_r}_{i_r} \end{vmatrix}, \quad S_{n+1} = \det|a^j_i|$$

Понеже (a^j_i) е матрица на геометрично определената проективност σ, то следните n функции са абсолютни инварианти от първия ред за хиперкомплекса

(32) $$I_r = \frac{(S_r)^{n+1}}{(S_{n+1})^r}$$

По аналогия с [1] всяка двойна точка на проективността σ ще наричаме възлова точка на P^n. Ако проективността $\sigma = \pi \circ \tau$ има точно $n+1$ линейно независими двойни реални точки, H ще наричаме хиперкомплекс от хиперболичен тип. Хиперкомплексът H е точно тогава от хиперболичен тип, когато уравнението (31) има $n+1$ различни реални корена за всяко P^n.

Ще предполагаме, че H е от хиперболичен тип. Избираме за върхове A_i на B-репера Q възловите точки на P^n. С това върховете A_i, B_i на Q са напълно определени. Q ще наричаме полуканоничен репер за P^n. Семейството на полуканоничните репери зависи от $2n+1$ вторични параметъра, които определят положението на единичната точка E.

Да изразим условието A_i да е двойна при проективността σ. От уравненията (30) получаваме $a_i^j = 0$, $i \; j$. Като вземем пред вид (29), можем да формулираме

Теорема 3. Необходимото и достатъчно условие върховете B_i и A_i на B-репера от първи ред Q да са съответни при нормалната проективност е

(33) $$a_i^j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

От (9) получаваме, че за полуканоничен репер са в сила формулите

(34) $$\begin{aligned} -\omega_0^s - a_s^s\theta_0^s &= \lambda_{0m}^{s0}\varphi_0^m + \lambda_{00}^{sm}\varphi_m^0 + \lambda_{0m}^{sl}\varphi_l^m, \\ a_s^s\omega_s^0 + \theta_s^0 &= \lambda_{sm}^{00}\varphi_0^m + \lambda_{s0}^{0m}\varphi_m^0 + \lambda_{sm}^{0l}\varphi_l^m, \\ a_s^s\omega_s^r - a_r^r\theta_s^r &= \lambda_{sm}^{r0}\varphi_0^m + \lambda_{s0}^{rm}\varphi_m^0 + \lambda_{sm}^{rl}\varphi_l^m, \\ da_s^s + a_s^s\varphi_s^s &= \lambda_{sm}^{s0}\varphi_0^m + \lambda_{s0}^{sm}\varphi_m^0 + \lambda_{sm}^{sl}\varphi_l^m, \end{aligned}$$

където s и r са фиксирани, $s \neq r$ и коефициентите в десните страни удовлетворяват условията (11). От (10) получаваме при фиксирано s

(35) $$\delta a_s^s = 0,$$

т. е. функциите a_s^s са абсолютни инварианти.

§ 2. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ПЪРВИТЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОКОЛНОСТИ НА ХИПЕРКОМПЛЕКС И ХИПЕРРОЙ

Една гладка еднопараметрична система от n-мерни равнини ще наричаме хиперрой. Ще използваме B-реперите, въведени в § 1. Спрямо B-репер от първи ред Q диференциалните уравнения на хиперроя са

(36) $$\varphi_i^j = a_i^j \varphi_0^0,$$

като $\bar{a}_0^0 = 1$. За индексите важи (1).

Чрез външно диференциране на (36) и прилагане лемата на Картан получаваме формулите, които дават вариациите на функциите a_i^j при изменение само на параметрите, преобразуващи семейството на B-реперите от първи ред в себе си:

$$\begin{aligned}
&\delta\bar{a}_0^s=\bar{a}_0^s(\bar{a}_0^r\pi_r^0-\bar{a}_r^0\pi_0^r)+\bar{a}_i^s\pi_0^i-\bar{a}_0^r\pi_r^s-\pi_0^s,\\
(37)\qquad &\delta\bar{a}_s^0=\bar{a}_s^0(\bar{a}_0^r\pi_r^0-\bar{a}_r^0\pi_0^r)+\bar{a}_r^0\pi_s^r-\bar{a}_s^i\pi_i^0+\pi_s^0,\\
&\delta\bar{a}_s^r=\bar{a}_s^r(\bar{a}_0^m\pi_m^0-\bar{a}_m^0\pi_0^m)+\bar{a}_i^r\pi_s^i-\bar{a}_s^i\pi_i^r.
\end{aligned}$$

От (12) и (37) следва, че установената в [3] аналогия в случая има вида

$$(38)\qquad a_i^j\longleftrightarrow-\bar{a}_i^j.$$

За хиперроя ще направим предположението

$$(39)\qquad \det|\bar{a}_i^j|\neq 0.$$

Разглеждаме функциите

$$(40)\qquad \bar{S}_r=\sum_{i_1<\dots<i_r}\begin{vmatrix}\bar{a}_{i_1}^{i_1} & \bar{a}_{i_1}^{i_2} & \dots & \bar{a}_{i_1}^{i_r}\\ \bar{a}_{i_2}^{i_1} & \bar{a}_{i_2}^{i_2} & \dots & \bar{a}_{i_2}^{i_r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \bar{a}_{i_r}^{i_1} & \bar{a}_{i_r}^{i_2} & \dots & \bar{a}_{i_r}^{i_r}\end{vmatrix},\qquad \bar{S}_{n+1}=\det\bar{a}_i^j$$

Функциите

$$(41)\qquad \bar{I}_r=\frac{(\bar{S}_r)^{n+1}}{(\bar{S}_{n+1})^r}$$

са равни с точност до знак на резултата от заместването (38) в (32) Следователно $\bar{I}_r$ са абсолютни инварианти от първи ред за хиперроя. Ще покажем, че $\bar{I}_r$ могат да се получат по аналогичен начин, както I_r.

Нека $P=t^iA_i$ е произволна точка от P^n, а P^{n+1} — тангенциалната $n+1$-равнина към хиперроя в точката P. Ще намерим аналитичен израз на съответствието

$$(42)\qquad \pi: P\longrightarrow P^{n+1}.$$

За грасмановите координати на $n+1$-равнината P^{n+1}, определена чрез $A_0,\dots,A_n$, dP, като вземем пред вид (3) и (36), получаваме

$$(43)\qquad (P^{n+1})=(A_0\dots A_n dP)=t^i\bar{a}_i^j(A_0\dots A_nB_j).$$

Нека пресечната точка на P^{n+1} с K е $M=q^iB_i$. От (43) получаваме

$$(44)\qquad \varrho q^i=\bar{a}_j^i t^j.$$

Полученото представяне ни дава

Т е о р е м а 4. Съответствието π: $P\longrightarrow P^{n+1}$ е проективност.

Аналогично на π ще наречем $\bar{\pi}$ нормална проективност. Като вземем пред вид (28) и (44), можем да формулираме

Теорема 5. Чрез замяната (38) от представянето на нормалната проективност за хиперкомплекс спрямо B-репер от първи ред се получава представяне на нормалната проективност за хиперрой спрямо B-репер от първи ред.

От (44) получаваме тълкуване на инвариантността на $\bar{I}_r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б. Върху един аналог в нечетномерно проективно пространство на двуосната геометрия. — Годишник на Соф. унив., Мат. фак., **60**, 1965/66, 33—60.
2. Ходж В., Д. Пидо. Методы алгебраической геометрии, т. 1. Москва, 1954.
3. Stanilov, G. Dualitätsprinzip in der Differentialgeometrie von Räumen mit projektiver Struktur. — Доклады БАН, **23**, 1970, № 5, 473—475.

Постъпила на 10. I. 1972 г.

О ГИПЕРКОМПЛЕКСАХ ЛИНЕЙНЫХ АВТОДУАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ БИПЛАНАРНОГО ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Георги Ганчев

(*Резюме*)

Геометрия Клейна бипланарного пространства B^{2n+1} образована группой колинеаций $2n+1$-мерного проективного пространства, которые оставляют инвариантными две не пересекающиеся n-плоскости J и K.

В работе изучаются $n(n+2)$-параметрические системы n-плоскостей, которые называются гиперкомплексами. Применяются системы координат $Q=(A_0, \dots, A_n;\ B_0, \dots B_n, E)$, для которых точки $A_i+B_i (i=0, \dots, n)$ лежат в J, а $B_i (i=0, \dots, n)$ лежат в K. В § 1 доказывается, что соответствие (15) является проективностью. Устанавливаются абсолютные инварианты (32). Для гиперкомплекса, для которого проективность (30) имеет $n+1$ действительные линейно независимые двойные точки, построен полуканонический репер. В § 2 констатирована аналогия между дифференциально-геометричными объектами (15), (32) гиперкомплекса и (42), (41) однопараметричной системы n-плоскостей.

ON THE HYPERCOMPLEXES OF LINEAR AUTODUAL SUBSPACES OF THE BIPLANAR SPACE OF HYPERBOLIC TYPE

Georgi Gančev

(*Summary*)

The Klein's geometry of the biplanary space B^{2n+1} is generated from the group of collineations in the $2n+1$-dimensional projective space leaving invariant two n-planes J and K without common points.

$n(n+2)$-parametric systems of n-planes called hypercomplexes are considered in the paper. The coordinate systems $Q=(A_0, \ldots, A_n; B_0, \ldots, B_n; E)$ for which the points A_i+B_i $(i=0, \ldots, n)$ lie in J and $B_i (i=0, \ldots, n)$ in K are used.

In § 1 it is proved that the correspondence (15) is a projectivity. The absolute invariants (32) are found. A semicanonical frame is built for a hypercomplex for which the projectivity (30) has $n+1$ real linearly independent double points. In paragraph (2) the analogy between the differential objects (15), (32) in case of a hypercomplex and (42), (41) in case of a one-parametric system of n-planes is found out.