БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

МНОГООБРАЗИЯ ГРУПП С МАЛЬЦЕВСКИМИ СВОБОДНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Георги Г. Генов

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, которые рассматриваются в этой работе, относятся как к теории многообразий групп, так и к теории точных операций на классе групп. Говорят, что на некотором абстрактном классе групп $\mathfrak{X}$ задана точная операция $\circ$, если введен закон, по которому каждому семейству групп G_ν $(\nu \in I)$ из $\mathfrak{X}$ сопоставляется „произведение" $G = \prod\limits_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ — с точностью до изоморфизма однозначным образом определенная группа G, содержащаяся в $\mathfrak{X}$ и порождающаяся своими подгруппами, соответственно изоморфными группам G_ν. Точная операция $\circ$, определенная на абстрактном классе групп $\mathfrak{X}$, называется мальцевской, если она удовлетворяет постулату Мальцева, то есть для любого произведения $G = \prod\limits_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ и для любых подгрупп A_ν в $G_\nu (A_\nu \in \mathfrak{X}, \nu \in I)$, подгруппа в G, порожденная образами всех A_ν, естественно изоморфна группе $\prod\limits_{\nu \in I}^{\circ} A_\nu$ ([8], стр. 475).

Вербальные операции ([10], 18.31, стр. 56), рассматриваемые на классе всех групп, являются мальцевскими только в случаях прямого и свободного умножений [12]. Но вербальное умножение, отвечающее многообразию групп $\mathfrak{B}$ и рассматриваемое только внутри этого многообразия, является свободной операцией многообразия $\mathfrak{B}$ ([10], 18. 42, стр. 59). Поэтому естественно рассматривать многообразия групп, свободные операции которых являются мальцевскими. Такие многообразия мы называем мальцевскими (см. определение 2.1). Эта статья полностью посвящена изучению таких многообразий.

Впервые мальцевские многообразия изучались А. Ю. Ольшанским в работе [11].

Понятия, введенные в книге [10], мы считаем знакомыми читателю.

В первом параграфе мы приводим ряд необходимых результатов и определений.

Центральным в настоящей работе является § 2. В нем полностью решен вопрос о том, когда мальцевское собственное многообразие групп является разложимым многообразием. Основной результат этого параграфа — теорема 2.8 — утверждает, что произведение двух собственных многообразий групп $\mathfrak{V}\mathfrak{U}$ является мальцевским многообразием тогда и только тогда, когда многообразия $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ являются мальцевскими и пересекаются по тривиальному многообразию (то есть по многообразию групп, состоящему из одной единичной группы). Таким образом, любое мальцевское многообразие групп конечной экспоненты разлагается в конечное произведение неразложимых мальцевских многообразий, попарно пересекающихся по тривиальному многообразию (следствие 2.10). В частности, последний результат дал нам возможность обобщить теорему 1 из работы [11]. С другой стороны, если $\mathfrak{V}$ — мальцевское многообразие экспоненты нуль, то $\mathfrak{V}$ является неразложимым многообразием (следствие 2.9). Эти результаты полностью сводят описание всех мальцевских многообразий к описанию всех неразложимых мальцевских многообразий.

В § 3 рассматриваются мальцевские многообразия групп конечной экспоненты. Доказана теорема 3.2, которая выясняет, в некоторой мере, как устроено любое мальцевское разрешимое многообразие конечной экспоненты. В частности, из этой теоремы вытекает, что длина разрешимости такого многообразия не превосходит числа различных простых делителей его экспоненты. Кроме того, в § 3 доказывается, что если $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_l$ — произвольные многообразия групп, попарно пересекающиеся по тривиальному многообразию, то многообразие групп $\mathfrak{V}=\mathfrak{V}_1 \vee \mathfrak{V}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{V}_l$ является мальцевским тогда и только тогда, когда многообразия $\mathfrak{V}_i (i=1, \ldots, l)$ — мальцевские (см. теорему 3.6). Эти результаты дали нам возможность построить первые примеры неразложимых неабелевых мальцевских многообразий конечной экспоненты.

Наконец, в § 4 рассматривается следующий вопрос: если $\mathfrak{V}$ — любое мальцевское многообразие групп, то существует ли в $\mathfrak{V}$ точная ассоциативная мальцевская операция, отличная от прямого и свободного умножения многообразия $\mathfrak{V}$? В случае, когда $\mathfrak{V}$ есть многообразие всех групп, указанный вопрос совпадает с проблемой Мальцева о точных операциях на классе всех групп ([7], 2.8, стр. 26). Эта проблема, поскольку известно автору, остается пока открытой. Но вопрос, поставленный выше, получает положительный ответ для ряда многообразий групп конечной экспоненты (см. следствие 4.2).

В настоящей статье будут использоваться следующие обозначения:

$$[x, y] \quad x^{-1}y^{-1}xy;$$

E — единичная группа;

X_∞ — абсолютно свободная группа, свободно порожденная бесконечным счетным множеством $\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$;

$\{B_\nu, \nu \in I\}^G$ — нормальный делитель в G, порожденный подмножествами B_ν;

$\{B_\nu, \nu \in I\}_G$ — подгруппа в G, порожденная подмножествами B_ν;

A^G — нормальный делитель, порожденный в группе G ее подгруппой A;

$[G_1, G_2]$ — взаимный коммутант подгрупп G_1 и G_2;

$N \lhd G$ — подгруппа N есть нормальный делитель в группе G:

U, V — вербальные подгруппы группы X_∞;

$V(G)$ — вербальная подгруппа группы G, определенная вербальной подгруппой V группы G;
$\mathfrak{X}$ — абстрактный класс групп;
$\mathfrak{G}$ — тривиальное многообразие групп, состоящее из одной единичной группы;
$\mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \mathfrak{U}$ — многообразия групп;
$\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп;
$\mathfrak{A}_n$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты n;
$\mathrm{var}(G)$ — многообразие групп, порожденное группой G;
Π°, $\circ$ — знак точной операции;
$\Pi^*, \Pi^{\times}$ — знак свободного и прямого умножения соответственно;
$\mathfrak{B}\Pi$ — вербальная операция, соответствующая многообразию групп $\mathfrak{B}$;
G^*H — свободное произведение групп G и H;
$G\times H$ — прямое произведение групп G и H;
$G\mathrm{wr}H$ — дискретное сплетение групп G и H;
$G\mathrm{wr}_V H$ — вербальное V-сплетение групп G и H;
$\mathrm{Ker}\,\varphi$ — ядро гомоморфизма φ;
(m, n) — наибольший общий делитель целых чисел m и n;

§ 1. НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Через X_∞ будем обозначать абсолютно свободную группу, свободно порожденную бесконечным счетным множеством $\{x_1, x_2, \ldots$ Известно ([10], 14.31, стр. 27), что между многообразиями групп и вполне инвариантными (вербальными) подгруппами в X_∞ существует взаимно однозначное соответствие. Мы часто будем пользоваться этим соответствием, причем условимся относительно обозначений, что многообразию $\mathfrak{B}$ соответствует вербальная подгруппа V в X_∞, а многообразию $\mathfrak{U}$ — вербальная подгруппа U. Следуя [10], мы будем обозначать через $\mathfrak{B}\Pi$ вербальную операцию, отвечающую многообразию групп $\mathfrak{B}$ ([10], 18.31, стр. 56).

В работе [5] О. Н. Головин предложил классификацию точных операций, положив в ее основу систему некоторых „постулатов“. Приведем определения тех из них, которые понадобятся нам в дальнейшем:

Пусть Π° — точная операция, определенная на некотором абстрактном классе групп $\mathfrak{X}$.

II-2* (постулат Маклейна). Пусть G_ν и H_ν $(\nu\in I)$ — два равномощные набора групп из $\mathfrak{X}$. Если $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$ $(\nu\in I)$ — произвольные эпиморфизмы то существует эпиморфизм $\varphi: G=\prod\limits_{\nu\in I}^{\circ} G_\nu \quad \prod\limits_{\nu\in I}^{\circ} H_\nu$ склеенный из всех эпиморфизмов φ_ν (то есть $\varphi\big|_{G_\nu}=\varphi_\nu$) и такой, что $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{\mathrm{Ker}\,\varphi_\nu, \nu\in I\}^G$.

III-3 (постулат локализуемости). Если $G_\nu = \prod\limits_{\nu\in I}^{\circ} G_\nu$ — произвольное Π°-произведение групп G_ν из $\mathfrak{X}$, а J — произвольное подмножество в I, то $\{G_\nu, \nu\in J\}_G=\prod\limits_{\nu\in J}^{\circ} G_\nu$.

III-5 (постулат ассоциативности). Если G_ν $(\nu\in I)$ — произвольное множество групп из $\mathfrak{X}$, а множество индексов I разбито на непересекающиеся подмножества $I \quad \bigcup\limits_{\mu \in J} I_\mu$, то группы $\prod\limits_{\nu \in I}{}^{\circ} G_\nu$ и $\prod\limits_{\mu \in J}{}^{\circ} \Big(\prod\limits_{\nu \in I_\mu}{}^{\circ} G_\nu \Big)$ являются естественно изоморфными.

Напомним, что вербальные операции являются ассоциативными маклейновскими, то есть они удовлетворяют постулатам II-2* и III-5 ([9]), но на классе всех групп все они, за исключением прямого и свободного умножения, не являются мальцевскими ([12]).

В статье будут использоваться следующие результаты:

1.1 Лемма. Пусть точная правильная операция $\circ$, определенная на классе групп $\mathfrak{X}$, является ассоциативной операцией. Операция $\circ$ является мальцевской операцией тогда и только тогда, когда она, рассматриваемая как бинарная операция, является мальцевской.

Доказательство. Необходимость условия леммы очевидна.

Допустим, что на любых двух сомножителях операция — мальцевская. Индукцией по числу сомножителей, используя ассоциативность, легко доказывается, что $\circ$ — мальцевская на любом конечном числе сомножителей. Пусть G_ν $(\nu \in I)$ — любой набор произвольных групп из $\mathfrak{X}$, а A_ν — любая подгруппа в G_ν, содержащаяся в $\mathfrak{X}$ $(\nu \in I)$. Обозначим через F группу $\prod\limits_{\nu \in I}{}^{*} G_\nu$, а через A — подгруппу $\{A_\nu, \nu \in I\}_F \quad \Pi^* A_\nu$ Пусть $\varphi : F$

$G = \prod\limits_{\nu \in I}{}^{\circ} G_\nu$ и $\psi : A \to H = \prod\limits_{\nu \in I}{}^{\circ} A_\nu$ — естественные эпиморфизмы. Естественный изоморфизм между группами $\{A_\nu, \nu \in I\}_G$ и H существует тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\operatorname{Ker} \psi \quad \operatorname{Ker} \varphi \cap A$. Пусть $f \in \operatorname{Ker} \psi$. Тогда $f \in B = \{A_{\nu_i}, i \quad 1, \ldots, m\} \subseteq \{G_{\nu_i}, i = 1, \ldots, m\} = D$. Но операция $\circ$ — правильная локализуемая, а на любом конечном числе сомножителей — мальцевская. Поэтому элемент f содержится в $B \cap \operatorname{Ker} \psi \quad B \cap D \cap \operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} \varphi$, то есть $\operatorname{Ker} \psi \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \cap A$. Обратно, пусть $g \in \operatorname{Ker} \varphi \cap A$. Тогда $g \in B_1 = \{A_{\nu_j}, j = 1, \ldots, n\} \subseteq \{G_{\nu_j}, j = 1, \ldots, n\} \quad D_1$ и, следовательно, элемент g содержится в $\operatorname{Ker} \varphi \cap B_1 = (\operatorname{Ker} \varphi \cap D_1) \cap B_1 \quad \operatorname{Ker} \psi \cap B_1 \subseteq \operatorname{Ker} \psi$. Таким образом, имеет место и обратное включение $\operatorname{Ker} \varphi \cap A \subset \operatorname{Ker} \psi$. Лемма 1.1 доказана.

1.2 ([13], § 2). Подгруппа B произвольной группы G называется ретрактом, если существует эндоморфизм φ группы G со следующими двумя свойствами: a) $G\varphi = B$, b) $\varphi^2 \quad \varphi$.

1.3 ([13]). Если $\mathbf{V}$ — любая вербальная подгруппа в X_∞, G — произвольная группа, $\mathbf{B}$ — любой ретракт в G, то имеет место равенство $V(G) \cap B = V(B)$.

1.4 ([3], теорема, стр. 255). Если R и S — нормальные делители неабелевой свободной группы F, а V — любая нееденичная вербальная подгруппа X_∞, то $V(R) \supseteq V(S)$ влечет $R \supseteq S$.

1.5 ([10], 22.32, стр. 73). Пусть B — свободная группа бесконечного ранга многообразия $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{U}$ — многообразие групп, порожденное группой A. Тогда группа $A \operatorname{wr} B$ порождает многообразие $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$.

1.6 ([10], 21.72, стр. 69). Если многообразие групп $\mathfrak{B}$ является собственным многообразием, отличным от тривиального многообразия (состоящего из одной единичной группы), то $\mathfrak{B}$ является произведением конечного числа неразложимых многообразий.

1.7 ([10], 23.32, стр. 85). Если многообразия $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_k$ и $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_l$ неразложимы и отличны от многообразия всех групп и от тривиального многообразия, то $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_k = \mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_l$ влечет за собой $k=l$ и $\mathfrak{U}_i=\mathfrak{V}_i$ при $i=1, 2, \ldots, k$.

1.8 ([10], 24.33, стр. 87). Если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — собственные многообразия групп, пересекающиеся по тривиальному многообразию, то каждое подмногообразие многообразия $[\mathfrak{U}, \mathfrak{V}]$, не содержащееся ни в $\mathfrak{U}$, ни в $\mathfrak{V}$, неразложимо. В частности, $[\mathfrak{U}, \mathfrak{V}]$ и $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{V}$ при этих предположениях неразложимы.

1.9 ([10], 42.41, стр. 158). Пусть $F = A * B$, A и B — произвольные группы, а N — любой нормальный делитель в F. Тогда подгруппа $N \cap A$ является свободным сомножителем в N.

1.10 ([11], теорема 2, стр. 60). Если $\mathfrak{V}$ разрешимое многообразие, экспонента которого равна нулю или степени простого числа, и если для свободного умножения в многообразии $\mathfrak{V}$ выполняется постулат Мальцева, то $\mathfrak{V}$ — абелево многообразие.

1.11 ([14], стр. 151). Пусть $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие групп, а $\mathbf{V}$ — соответствующая ему вербальная подгруппа в X_∞. Вербальным V-сплетением группы A с группой B называется расщепляющееся расширение группы $K = \mathfrak{V}\prod_{b \in B} A_{(b)}$ (где $A_{(b)} \simeq A$) при помощи группы B, в котором элементы $b \in B$ индуцируют автоморфизмы в K, определяемые условиями: $b^{-1}a_{(b_0)}b = a_{(b_0 b)}$ для всех b_0, $b \in B$. Обозначать его будем $A \operatorname{wr}_V B$.

1.12 ([4], лемма 4.4, стр. 78). Пусть группа G имеет бесконечный порядок, группа $H \neq E$, а нормальный делитель Q группы G имеет бесконечный индекс в G. Тогда в группе $K = GV(C)H = F/V(C_F)$, где $F = G * H$, $C_F = [G, H]$ и $V = X_\infty$, найдется подгруппа M, являющаяся свободной группой бесконечного ранга многообразия $\mathfrak{V}$ и такая, что подгруппа $\{M, Q\}_K = M \operatorname{wr}_V Q$.

1.13 ([6], лемма 5.5, стр. 47). Пусть $F = A * B$, где A и B — произвольные группы, а $H \triangleleft A$, $K \triangleleft B$ с трансверсалями (то есть с полными системами представителей смежных классов) S и $T (1 \in S, 1 \in T)$ в A и B соответственно. Естественные эпиморфизмы A на A/H и B на B/K склеиваются в эпиморфизм F на $(A/H) \times (B/K)$ и ядро L этого эпиморфизма имеет вид $L = D * G * M$, где $(i) M$ свободно порождена всеми $[s, t]$, $1 \neq s \in S$, $1 \neq t \in T$ и $(ii) D = \prod_{t \in T}^{*} t^{-1}Ht$, $G = \prod_{s \in S}^{*} s^{-1}Ks$.

1.14 Лемма. Пусть $F = A * B$, где A и B — произвольные группы, а $H \triangleleft A$, $K \triangleleft B$ с трансверсалями S и T $(1 \in S, 1 \in T)$ в A и B соответственно. Если R такой нормальный делитель в F, что $R \cap A = H$, $R \cap B = K$ и R содержится в нормальном делителе $L = \{K, H, [A, B]\}_F$, а $Q (1 \in Q)$ — произвольная трансверсаль подгруппы $R \cap M$ в M (где M — подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[s, t]$ $s \in S$, $t \in T$), то R разлагается в свободное произведение следующего вида:

$$R = \prod_{q \in Q}^{*} q^{-1}Pq * (R \cap M), \tag{1}$$

где $P = \prod_{t \in T}^{*} t^{-1}Ht * \prod_{s \in S}^{*} s^{-1}Ks$.

Доказательство. По лемме 1.13 имеем $L=P*M$. Но нормальный делитель R содержится в L и содержит в себе подгруппу P. Применяя второй раз лемму 1.13, мы получаем (1).

1.15. Лемма. Пусть G_1 и G_2 — две произвольные группы, а A_i — любая подгруппа в G_i $(i=1, 2)$. Обозначим через F свободное произведение $G_1 * G_2$, а через A — подгруппу $\{A_1, A_2\}_F = A_1 * A_2$. Пусть U — произвольная вербальная подгруппа в X_∞, а S и T — такие трансверсали $U(G_1)$ в G_1 и $U(G_2)$ в G_2, что множества $S_1 = S \cap A_1$ и $T_1 = T \cap A_2$ являются трансверсалями подгруппы $A_1 \cap U(G_1)$ и $A_2 \cap U(G_2)$ в A_1 и A_2 соответственно. Пусть еще $M=\{[s, t], s\in S, t\in T\}$, $M_1=\{[s_1, t_1], s_1\in S_1, t_1 \in T_1\}$, а Q $(1\in Q)$ — такая трансверсаль подгруппы $V(F)\cap M$ в M, что $Q_1 = Q \cap M_1$ — трансверсаль подгруппы $V(F)\cap M_1$ в M_1. Тогда имеют место следующие два равенства:

$$U(F)=\prod_{q\in Q}^{*} q^{-1}Pq * (U(F)\cap M), \tag{2}$$

где $P=\prod\limits_{t\in T} t^{-1}U(G_1)t * \prod\limits_{s\in S} s^{-1}U(G_2)s$,

и

$$U(F)\cap A=\prod_{q_1\in Q_1} q_1^{-1}P_1q_1 * (U(F)\cap M_1), \tag{3}$$

где $P_1=\prod\limits_{t_1\in T_1}^{*} t_1^{-1}(U(G_1)\cap A_1)t_1 * \prod\limits_{s_1\in S_1}^{*} s_1^{-1}(U(G_2)\cap A_2)s_1$.

Кроме того, подгруппа $U(F)\cap M_1$ является свободным сомножителем в группе $U(F)\cap M$.

Равенства (2) и (3) следуют непосредственно из леммы 1.14, а последнее утверждение вытекает из предложения 1.9, так как подгруппа M_1 является свободным сомножителем в M.

§ 2. МАЛЬЦЕВСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ГРУПП

Определение 2.1 ([11]). Пусть $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие групп. Если свободная (вербальная) операция $\mathfrak{V}\Pi$ многообразия $\mathfrak{V}$ является мальцевской операцией на $\mathfrak{V}$, то многообразие $\mathfrak{V}$ будем называть мальцевским.

Очевидно, что многообразие всех групп и любое абелево многообразие являются мальцевскими. Первые примеры мальцевских многообразий иного вида даны в работе [11].

В этом параграфе мы дадим полный ответ на вопрос о том, когда произведение собственных многообразий групп является мальцевским многообразием.

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ — два многообразия, пересекающиеся по тривиальному многообразию, а G — произвольная группа из многообразия $\mathfrak{V}\mathfrak{U}$. Если A — любая подгруппа в G, то имеет место равенство $U(G)\cap A=U(A)$.

Доказательство. Включение $U(A) \subseteq A \cap U(G)$ очевидно. Но подгруппа $U(G)$ содержится в $\mathfrak{V}$, а тогда и $A \cap U(G)$ содержится в $\mathfrak{V}$. Поэтому фактор-группа $A \cap U(G)/U(A)$ содержится в $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U}$, то есть она является единичной группой и $A \cap U(G) = U(A)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3 Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ — произвольные собственные многообразия групп. Для того, чтобы свободная операция $\mathfrak{M}\Pi$ многообразия $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}\mathfrak{U}$ совпадала на многообразии $\mathfrak{V}$ с его свободной операцией $\mathfrak{V}\Pi$, необходимо и достаточно, чтобы многообразия $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ пересекались по тривиальному многообразию.

Доказательство. Пусть $G_\nu\ (\nu \in I)$ — произвольное множество групп из многообразия $\mathfrak{V}$, а $F = \prod\limits_{\nu \in I} {}^{*}G_\nu$. Если $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, то $U(F) = F$ и поэтому выполняется равенство $V(U(F)) \cap C_F = V(F) \cap C_F$, где $C_F = [G_\nu, \nu \in I]^F$. Но это показывает, что операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{V}\Pi$ совпадают на многообразии $\mathfrak{V}$.

Допустим теперь, что $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U} \neq \mathfrak{E}$ и что операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{V}\Pi$ совпадают на многообразии $\mathfrak{V}$. Пусть G_1, Q и H — свободные группы бесконечных рангов многообразия $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U}$, а $G = G_1 \times Q$. Обозначим через R свободное произведение $G * H$. Так как группы G и H содержатся в многообразии $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U}$, то $U(R)$ содержится в $G_R = [G, H]$. Следовательно, $\mathfrak{M}\Pi$—произведение групп G и H можно дофакторизовать до группы $K = GV(C)H = R/V(C_R)$. Но из совпадения операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{V}\Pi$ на $\mathfrak{V}$ следует, что $\mathfrak{M}\Pi$ — произведение групп G и H содержится в $\mathfrak{V}$, а тогда и группа K должна содержаться в $\mathfrak{V}$. Таким образом, в многообразии $\mathfrak{V}$ будет содержаться и группа $M \operatorname{wr}_1 Q$, где M — свободная группа бесконечного ранга многообразия $\mathfrak{V}$ (см. лемму 1.12). Но, по теореме 1.5, выполняются равенства $\operatorname{var}(M \operatorname{wr}_1 Q) = \operatorname{var}(M \operatorname{wr} Q) = \operatorname{var}(M)(\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U}) = \mathfrak{V}(\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U})$ и поэтому имеем $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U})$. Так как многообразие $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U}$ не совпадает с тривиальным многообразием, то последнее равенство противоречит утверждению теоремы 1.7. Полученное противоречие показывает, что операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{V}\Pi$ не совпадают в случае, когда $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U} \neq \mathfrak{E}$. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть $\mathfrak{V}$ — произвольное мальцевское многообразие групп, $G_\nu\ (\nu \in I)$ — любое множество произвольных групп из $\mathfrak{V}$, а A_ν — произвольные подгруппы в $G_\nu\ (\nu \in I)$. Если G — любая группа, B — любой ретракт в G, $F = \prod\limits_{\nu \in I} {}^{*}G_\nu * G$ и $H = \{B, A_\nu, \nu \in I\}_F = \prod\limits_{\nu \in I} {}^{*}A_\nu * B$, то имеет место равенство

$$V(F) \cap H = V(H). \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через F_1 подгруппу $\{B, G_\nu, \nu \in I\}_F$. Так как подгруппа F_1 является ретрактом в F, то по лемме 1.3 выполняются равенства $V(F) \cap H = V(F) \cap F_1 \cap H = V(F_1) \cap H$ и, для доказательства леммы, нам нужно установить, что выполняется равенство

$$V(H) = V(F_1) \cap H. \tag{5}$$

Из мальцевости свободного умножения групп непосредственно следует равенство

$$V(B)^{F_1} \cap H = V(B)^H. \tag{6}$$

Пусть $\varphi : F_1 \to F_1/V(B)^{F_1}$ — естественный эпиморфизм. Из мальцевости операции $\mathfrak{V}\Pi$ на многообразии $\mathfrak{V}$ вытекает равенство

(7) $$V(F_1\varphi)\cap H\varphi = V(H\varphi).$$

Пусть $f\in V(F_1)\cap H$. Тогда из (7) получается $f\varphi\in(V(F_1)\cap H)\varphi\subseteq V(F_1)\varphi\cap H\varphi=V(F_1\varphi)\cap H\varphi=V(H)\varphi$ и, следовательно, $f=f_1f_2$, где $f_1\in V(H)$, а $f_2\in H\cap \operatorname{Ker}\varphi=H\cap V(B)^{F_1}=V(B)^H\subseteq V(H)$ (см. равенство (6)). Так мы получаем, что $f\in V(H)$ и включение $V(F_1)\cap H\subseteq V(H)$ доказано. Обратное включение очевидно. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольное мальцевское многообразие, а $\mathfrak{U}$ — любое многообразие групп. Пусть еще G_1 и G_2 — две произвольные группы из многообразия $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$, а A_1 и A_2 — любые подгруппы, соответственно в G_1 и G_2. Если $F=G_1 * G_2$ и $A=\{A_1, A_2\}_F=A_1 * A_2$, то имеет место равенство

(8) $$V(U(F))\cap A=V(U(F)\cap A).$$

Доказательство. Пусть S_1, $T_1(1\in S_1,\ 1\in T_1)$ — произвольные трансверсали подгрупп $U(G_1)\cap A_1$ в A_1 и $U(G_2)\cap A_2$ в A_2 соответственно. Дополним S_1 и T_1 до получения трансверсалей S и T подгрупп $U(G_1)$ и $U(G_2)$ в G_1 и G_2. Обозначим через M подгруппу $\{[s,t],\ s\in S,\ t\in T\}_F$, а через M_1 — подгруппу $\{[s_1,t_1], s_1\in S_1, t_1\in T_1\}$. Пусть $Q_1(1\in Q_1)$ — произвольная трансверсаль подгруппы $U(F)\cap M_1$ в M_1, а Q является трансверсалью подгруппы $U(F)\cap M$ в M и содержит в себе Q_1. Тогда трансверсали S, T и Q удовлетворяют условиям леммы 1.15 и для подгрупп $U(F)$ и $U(F)\cap A$ имеют место равенства (2) и (3). По лемме 1.15 подгруппа $U(F)\cap M_1$ является ретрактом в $U(F)\cap M$. Кроме того, подгруппы $U(G_1)$ и $U(G_2)$ содержатся в мальцевском многообразии $\mathfrak{B}$. Тогда, по лемме 2.4 имеют место равенства $V(U(F))\cap A=V(U(F))\cap(A\cap U(F))=V(U(F)\cap A)$ и лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.6. Если произведение двух собственных многообразий групп $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ — мальцевское многообразие, то многообразия $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{U}$ являются мальцевскими и пересекаются по тривиальному многообразию.

Доказательство. Докажем сначала, что операция $\mathfrak{M}\Pi$ совпадает на многообразии $\mathfrak{B}$ с его свободной операцией $\mathfrak{B}\Pi$. Пусть G и H — свободные группы бесконечных рангов многообразия $\mathfrak{M}$. Положим $F=G * H$. Из леммы 1.15 следует, что подгруппа $\{U(G), U(H)\}$ является свободным сомножителем в группе $U(F)$ и поэтому, имеем $V(U(F))\cap\{U(G), U(H)\}=V(\{U(G), U(H)\})$ (см. лемму 1.3). Из последнего равенства и из мальцевости операции $\mathfrak{M}\Pi$ следует, что операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{B}\Pi$ перемножают одинаковым образом группы $U(G)$ и $U(H)$. Но $U(G)$ и $U(H)$ — свободные группы бесконечных рангов многообразия $\mathfrak{B}$, а операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{B}\Pi$ — ассоциативные маклейновские. Поэтому, операции $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{B}\Pi$ совпадают на любом множестве произвольных групп из $\mathfrak{B}$. Из доказанного совпадения двух операций $\mathfrak{M}\Pi$ и $\mathfrak{B}\Pi$ на многообразии $\mathfrak{B}$ следует, во первых, что $\mathfrak{B}$ — мальцевское многообразие, и во вторых, что многообразия $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{U}$ пересекаются по тривиальному многообразию (лемма 2.3).

Докажем теперь, что из мальцевости операции $\mathfrak{B}\Pi$ на $\mathfrak{M}$ следует мальцевость операции $\mathfrak{U}\Pi$ на многообразии $\mathfrak{U}$. Пусть G_1 и G_2 — две произвольные неединичные группы из $\mathfrak{U}$, а A_1 и A_2 — произвольные неединичные подгруппы в G_1 и G_2 соответственно. Обозначим через R группу $G_1 * G_2$, а через A — подгруппу $\{A_1, A_2\}_R=A_1 * A_2$. По лемме 2.5 имеет место равенство $V(U(R))\cap A=V(U(R)\cap A)$. Но из мальцевости операции

$\mathfrak{M}\Pi$ следует, что выполнено равенство $V(U(R))\cap A = V(U(A))$ и мы получаем

$$(9) \qquad V(U(R)\cap A) = V(U(A)).$$

Если A_1 или A_2 не изоморфна группе второго порядка, то, поскольку $U(R)\cap A$ и $U(A)$ — нормальные делители в неабелевой абсолютно свободной группе $C_A = [A_1, A_2]$, равенство (9) влечет за собой (теорема 1.4) равенство

$$(10) \qquad U(R)\cap A = U(A).$$

Равенство (10) имеет место и в случае, когда A_1 и A_2 — циклические группы второго порядка. Действительно, пусть B — неединичная группа, содержащаяся в многообразии $\mathfrak{U}$. Обозначим через D $\mathfrak{U}\Pi$ — произведение групп G_2 и B, через D_1 — подгруппу $\{A_2, B\}_D$ и через L — свободное произведение $G_1 * D$. По доказанному, имеем равенство $U(L)\cap\{A_1, D_1\} = U(\{A_1, D_1\})$. Тогда $U(R)\cap A = U(L)\cap\{A_1, D_1\}\cap A = U(\{A_1, D_1\})\cap A = U(A)$ (мы считаем, что $R\subset L$). Последнее равенство получается из леммы 1.3, так как A является ретрактом в группе $\{A_1, D_1\}$. Таким образом, равенство (10) всегда имеет место, то есть мы доказали, что операция $\mathfrak{U}\Pi$, рассматриваемая как бинарная операция, является мальцевской. По лемме 1.1, операция $\mathfrak{U}\Pi$ — мальцевская и на любом числе сомножителей, то есть $\mathfrak{U}$ является мальцевским многообразием. Теорема 2.6 доказана.

Теорема 2.7. Если мальцевские многообразия $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{U}$ пересекаются по тривиальному многообразию, то многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ является мальцевским многообразием.

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 — произвольные группы, содержащиеся в многообразии $\mathfrak{M}$, а $A_1 \subseteq G_1$ и $A_2 \subseteq G_2$ — любые подгруппы. Обозначим через F группу $G_1 * G_2$, через A — подгруппу $\{A_1, A_2\}_F = A_1 * A_2$.

Докажем сначала, что имеет место равенство

$$(11) \qquad U(F)\cap A = U(A).$$

Пусть $\varphi : F \to (G_1/U(G_1)) * (G_2/U(G_2))$ — естественный эпиморфизм. Так как $\mathfrak{U}$ — мальцевское многообразие, то выполняется равенство $U(F\varphi)\cap A\varphi = U(A\varphi) = U(A)\varphi$. Пусть $f\in U(F)\cap A$. Тогда имеем $f\varphi\in (U(F)\cap A)\varphi \subseteq U(F)\varphi \cap A\varphi = U(A)\varphi$, то есть $f = f_1 f_2$, где $f_1 \in U(A)$, а $f_2 \in \operatorname{Ker}\varphi\cap A$. Но из мальцевости свободного умножения следует равенство $\operatorname{Ker}\varphi\cap A = \{U(G_1)\cap A_1, U(G_2)\cap A_2\}^A$, а по лемме 2.2 $U(G_i)\cap A_i = U(A_i)$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi\cap A = \{U(A_1), U(A_2)\}^A \subseteq U(A)$ и поэтому $f_2\in U(A)$, то есть $f\in U(A)$. Мы доказали включение $U(F)\cap A \subseteq U(A)$. Обратное включение очевидно. Равенство (11) доказано.

Из равенства (11) и из леммы 2.6 получаются равенства

$$(12) \qquad V(U(F))\cap A = V(U(F)\cap A) = V(U(A)).$$

Но тогда имеют место и равенства

$$(13) \qquad (V(U(F))\cap C_F)\cap A = V(U(A))\cap(C_F\cap A) = V(U(A))\cap C_A,$$

где $C_F = [G_1, G_2]^F = [G_1, G_2]$ и $C_A = [A_1, A_2]$.

Равенства (13) показывают, что операция $\mathfrak{M}\Pi$ является мальцевской на любой паре групп из $\mathfrak{M}$. По лемме 1.1, операция $\mathfrak{M}\Pi$ — мальцевская и на любом числе сомножителей из $\mathfrak{M}$, то есть $\mathfrak{M}$ является мальцевским многообразием. Теорема 2.7 доказана.

Теоремы 2.6 и 2.7 объединяются в следующую теорему.

Теорема 2.8. Произведение двух собственных многообразий групп $\mathfrak{V}\mathfrak{U}$ является мальцевским многообразием тогда и только тогда, когда $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ являются мальцевскими многообразиями и пересекаются по тривиальному многообразию (состоящему из одной единичной группы).

Важным следствием из теоремы 2.8 является

Следствие 2.9. Любое собственное мальцевское многообразие экспоненты нуль является неразложимым многообразием.

Здесь следует отметить, что, в силу результата О. Н. Мацедонской ([1], теорема 11, стр. 1223), описание всех мальцевских многобразий групп экспоненты нуль связано с проблемой описания всех совершенных операций на классе всех групп ([5]). Пока единственными известными примерами таких многообразий являются многообразие всех групп и многообразие всех абелевых групп. Во всяком случае, если $\mathfrak{V}$ — мальцевское многообразие экспоненты нуль, отличное от указанных двух многообразий, то, в силу предыдущего следствия и теоремы 2 из работы [11] (см. 1.10), многообразие $\mathfrak{V}$ должно быть неразложимым и неразрешимым.

Из теорем 1.6 и 2.8 вытекает

Следствие 2.10. Если $\mathfrak{V}$ — любое мальцевское многообразие групп конечной экспоненты, то $\mathfrak{V}$ разлагается в произведение конечного числа неразложимых мальцевских многообразий, которые попарно пересекаются по тривиальному многообразию.

Таким образом, теорема 2.8 полностью сводит описание всех мальцевских многообразий групп к описанию всех неразложимых мальцевских многообразий.

Следующее следствие обобщает теорему 1 из работы [11]:

Следствие 2.11. Пусть $\mathfrak{A}_{n_i}$ — абелево многообразие групп экспоненты n_i $(i=1,\ 2,\quad l)$, а $\mathfrak{V}=\mathfrak{A}_{n_1}\mathfrak{A}_{n_2}\quad\mathfrak{A}_{n_l}$. Многообразие $\mathfrak{V}$ тогда и только тогда является мальцевским многообразием, когда числа n_i $(i=1,\ 2,\ ..,\ l)$ являются попарно взаимно простыми.

Естественно, здесь встает вопрос о том, не исчерпываются ли абелевыми многообразиями все неразложимые мальцевские многообразия конечной экспоненты. К сожалению, ответ отрицателен. В следующем параграфе мы дадим примеры неразложимых неабелевых мальцевских многообразий конечной экспоненты (см. примеры 3.9 и 3.10).

§ 3. О МАЛЬЦЕВСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП КОНЕЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Через $C[n]$ будем обозначать циклическую группу порядка n.

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{V}$ — произвольное многообразие групп, а p и q — простые числа, быть может и совпадающие. Если операция $\mathfrak{V}\Pi$ перемножает прямым образом группы $C[p]$ и $C[q]$, а G — любая группа, порождающаяся своими p-элементами и H — любая группа, порождающаяся своими q-элементами, то операция $\mathfrak{V}\Pi$ перемножает прямым образом группы G и H.

Доказательство. Условимся обозначать операцию $\mathfrak{V}\Pi$ через $\bigcirc$. Рассмотрим группу $K=C[p^m]\bigcirc C[q^n]$, где m и n — любые натуральные числа. Индукцией по числу $t=m+n$ докажем, что $K=C[p^m]\times C[q^n]$. Если $t=2$, то, по условию $K=C[p]\times C[q]$. Пусть $t>2$. Без ограничения общности допустим, что $n>1$. Пусть $C[p^m]=\{x\}$, $C[q^n]=\{y\}$. Так как $m+1<t=m+n$, то элемент $y^{q^{n-1}}$ содержится в центре группы K. Пусть $\varphi: K\to K/\{y^{q^{n-1}}\}=C[p^m]\bigcirc C[q^{n-1}]=C[p^m]\times C[q^{n-1}]$ — естественный эпиморфизм. Тогда мы получаем включение $[K,K]\subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$. Но $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{y^{q^{n-1}}\}\subseteq C[q^n]$ и $C[q^n]$ пересекается по единице с коммутантом $[K,K]$. Следовательно, $[K,K]=E$, а $K=C[p^m]\times C[q^n]$. Утверждение леммы вытекает очевидным образом из доказанного.

Теорема 3.2. Пусть $\mathfrak{V}$ — любое мальцевское разрешимое многообразие групп конечной экспоненты $n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\dots p_m^{s_m}$, где p_i $(i=1,2,\dots,m)$ — различные простые числа, а $s_i\geq 1$ — натуральные числа. Тогда существует такое разложение числа $n=k_1k_2\dots k_t$ на попарно взаимно простые натуральные множители k_i, что, если F — свободная группа счетного ранга многообразия $\mathfrak{V}$, то следующий ряд:

$$F\supset F^{k_1}\supset F^{k_1k_2}\supset\dots\supset F^{k_1k_2\dots k_{t-1}}\supset F^n=E$$

является разрешимым рядом, а многообразия $\mathfrak{V}_i=\mathrm{var}(F/F^{k_1k_2\dots k_i})$ $(i=1,2,\dots,t)$ являются мальцевскими.

Доказательство. Обозначим через $l+1$ длину разрешимости многообразия $\mathfrak{V}$. Тогда $F^{(l)}$ — последний неединичный член ряда коммутантов в F. Если в $F^{(l)}$ содержится элемент f порядка p_j $(1\leq j\leq m)$, то в $F^{(l)}$ найдется такой элемент g порядка p_j, что элементы f и g записываются на непересекающихся множествах свободных образующих группы F. Из мальцевости и ассоциативности операции $\mathfrak{V}\Pi$ следует, что операция $\mathfrak{V}\Pi$ перемножает прямым образом группы $\{f\}$ и $\{g\}$. По лемме 3.1, любые два p_j-элемента в F коммутируют. Если в $F^{(l)}$ содержится и элемент порядка p_i $(i\neq j)$, то аналогично получаем, что в F любой p_j-элемент коммутирует с любым p_i-элементом. Пусть k_t — минимальное из всех натуральных чисел, делящих n и таких, что $r=n/k_t$ — число, взаимно простое с экспонентой группы $F^{(l)}$. Тогда по доказанному подгруппа F^r является абелевым нормальным делителем в F, содержит в себе $F^{(l)}$ и состоит из всех элементов группы F, порядки которых делят числа k_t.

Рассмотрим многообразие $\mathfrak{V}_{t-1}=\mathrm{var}(F/F^r)$. Докажем, что $\mathfrak{V}$ — мальцевское многообразие. Пусть G_1, G_2 — две произвольные группы из $\mathfrak{V}_{t-1}$, $A_1\subseteq G_1$ и $A_2\subseteq G_2$ — произвольные подгруппы, а $G=\mathfrak{V}\prod\limits_{i=1,2}G_i$ и $A=\{A_1,A_2\}_G=\mathfrak{V}\prod\limits_{i=1,2}A_i$. Так как подгруппа G^r совпадает с множеством всех элементов в G, порядки которых делят числа k_t, то $G^r\cap A=A^r$, то есть в группе $G/G^r\cong\mathfrak{V}_{t-1}\prod\limits_{i=1,2}G_i$ подгруппа $\{A_1,A_2\}$ естественно изоморфна группе $\mathfrak{V}_{t-1}\prod\limits_{i=1,2}A_i$. Следовательно, ассоциативная операция $\mathfrak{V}_{t-1}\Pi$ является мальцевской на любой паре групп из $\mathfrak{V}_{t-1}$. По лемме 1.1, операция $\mathfrak{V}_{t-1}\Pi$ — мальцевская на многообразии $\mathfrak{V}_{t-1}$ и $\mathfrak{V}_{t-1}$ — мальцевское многообразие.

Доказательство теоремы заканчивается индукцией по длине разрешимости многообразия.

Следствие 3.3. Если $\mathfrak{V}$ — любое мальцевское разрешимое многообразие групп конечной экспоненты, то длина разрешимости многообразия $\mathfrak{V}$ не превосходит числа различных простых делителей его экспоненты.

Следствие 3.4 ([11], теорема 2, стр. 60). Если $\mathfrak{V}$ — любое разрешимое мальцевское многообразие, экспонента которого равна степени простого числа, то $\mathfrak{V}$ является абелевым многообразием.

Лемма 3.5. Если многообразия групп $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ пересекаются по единичному многобразию, то группа G содержится в многобразии $\mathfrak{M}=\mathfrak{V}\vee\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G разлагается в прямое произведение $G=U(G)\times V(G)$. Кроме того, если A — любая подгруппа группы G из $\mathfrak{M}$, то имеют место равенства $V(A)=V(G)\cap A$, $U(A)=U(G)\cap A$.

Доказательство. Группа G содержится в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $U(G)\cap V(G)=E$. Но для любой группы G, при наших предположениях, выполняется равенство $G=U(G)\cdot V(G)$ и первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение вытекает из леммы 2.2, так как $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{V}\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{U}\mathfrak{V}$. Лемма доказана.

Теорема 3.6. Пусть $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_l$ — любое конечное множество многообразий групп, попарно пересекающихся по тривиальному многообразию, а $\mathfrak{M}=\mathfrak{V}_1\vee\mathfrak{V}_2\vee\ldots\vee\mathfrak{V}_l$. Многообразие $\mathfrak{V}$ тогда и только тогда является мальцевским многообразием, когда многообразия $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_l$ являются мальцевскими.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать теорему для случая, когда $l=2$. Мы рассмотрим этот случай. Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{V}\vee\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{V}, \mathfrak{U}$ — собственные многообразия, пересекающиеся по тривиальному многообразию, а G_1 и G_2 — две произвольные группы из $\mathfrak{M}$. Обозначим через F свободное произведение $G_1 * G_2$, а через G группу $\mathfrak{M}\prod_{i=1,2} G_i$. По лемме 3.5, имеем $G_i=U(G_i)\times V(G_i)$ $(i=1, 2)$. Кроме того, из условия леммы вытекают равенства $V(V(G_i))=V(G_i)$ и $U(U(G_i))=U(G_i)$ $(i=1, 2)$. Следовательно, группа G естественно изоморфна группе $H=\mathfrak{V}\prod_{i=1,2} U(G_i)\times \mathfrak{U}\prod_{i=1,2} V(G_i)$.

Если $A_1\subset G_1$, $A_2\subset G_2$ — любые подгруппы, то по лемме 3.5 $A_i\cap U(G_i)=U(A_i)$ и $A_i\cap V(G_i)=V(A_i)$ $(i=1,2)$. Тогда группа $\{A_1, A_2\}_G$ естественно изоморфна группе $\{A_1, A_2\}_H=\{U(A_1), U(A_2)\}\times\{V(A_1), V(A_2)\}$. Из этого непосредственно получается, что многообразие $\mathfrak{M}$ — мальцевское тогда и только тогда, когда многообразия $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ — мальцевские. Теорема 3.6 доказана.

Следствие 3.7. Если $\mathfrak{N}$ — любое нильпотентное мальцевское многообразие групп, то $\mathfrak{N}$ является абелевым многообразием.

Доказательство. Если многообразие $\mathfrak{N}$ имеет нулевую экспоненту, то утверждение следствия доказано А. Ю. Ольшанским (см. теорему 1.10).

Пусть $\mathfrak{N}$ имеет конечную экспоненту $n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\ldots p_l^{s_l}$, где p_i $(i=1, 2, \ldots, l)$ — различные простые числа. Тогда, очевидно, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\vee\mathfrak{N}_2\vee\ldots\vee\mathfrak{N}_l$, где $\mathfrak{N}_i$ — максимальное подмногообразие в $\mathfrak{N}$ экспоненты $p_i^{s_i}$ $(i=1,$

$2, \ldots, l$), и утверждение следствия вытекает из теоремы 3.6 и из следствия 3.4.

Лемма 3.8. Пусть $\mathfrak{A}_m$ и $\mathfrak{A}_n$ — абелевые многообразия, экспоненты которых равны m и n соответственно. Если натуральные числа m и n — взаимно простые, то любое собственное подмногообразие $\mathfrak{B}$ экспоненты $m.n$ многообразия $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$ является неразложимым.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_i$ — многообразие экспоненты k_i $(i=1, 2)$. По условию выполняется равенство $mn = k_1k_2$. Допустим, что $(n, k_1)=d \neq 1$ и обозначим через r целое число dk_2/n. Тогда многообразие $\mathfrak{M}$ должно содержать многообразие $\mathfrak{A}_d\mathfrak{A}_r$. Но это неверно, так как n-ная степень любой группы из $\mathfrak{M}$ имеет экспоненту, делящую число m, а в многобразии $\mathfrak{A}_d\mathfrak{A}_r$ не все группы обладают этим свойством. Следовательно, числа n и k_1 являются взаимно простыми. Допустим теперь, что целое число $s = k_2/n$ отлично от единицы. Тогда в $\mathfrak{M}$ должна содержаться многообразие $\mathfrak{A}_{k_1}\mathfrak{A}_s$, что невозможно по тем же самым причинам. Следовательно, $m=k_1$ и $n = k_2$. Но тогда многообразие $\mathfrak{B}$ совпадает с многобразием $\mathfrak{M}$, что противоречит условию леммы. Лемма 3.8 доказана.

Теперь мы в состоянии привести первые примеры неразложимых неабелевых мальцевских многообразий.

Пример 3.9. Пусть $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_l$ — конечное множество многообразий групп, являющихся произведениями абелевых многообразий конечных попарно взаимно простых экспонент. Пусть еще многообразия $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$ имеют попарно взаимно простые экспоненты. Тогда многообразие $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_l$ является неразложимым мальцевским многообразием конечной экспоненты. Если в разложении хотя бы одного из многообразий $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ участвуют два или больше нетривиальных абелевых многообразий, то $\mathfrak{B}$ — неразложимое неабелево мальцевское многообразие групп. Действительно, из следствия 2.11 вытекает, что многообразия $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_l$ являются мальцевскими, а тогда, по теореме 3.6, многообразие $\mathfrak{B}$ мальцевское. Неразложимость многообразия $\mathfrak{B}$ получается из теоремы 1.8. Если многообразие $\mathfrak{B}_j$ $(1 \leq j \leq l)$ есть произведение не менее двух абелевых нетривиальных многообразий, то $\mathfrak{B}_j$ — неабелево, а тогда и многообразие $\mathfrak{B}$ — неабелево; В частности, многообразие $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{A}_k$, где $m>1$, $n>1$, $k>1$ — натуральные попарно взаимно простые числа, является неабелевым неразложимым мальцевским многообразием.

Пример 3.10. Пусть натуральные числа k, s и n больше единицы и являются попарно взаимно простыми. Обозначим через $\mathfrak{B}$ многообразие $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$, где $m = k.s$, а через F свободную группу счетного ранга многообразия $\mathfrak{B}$. Тогда многообразие $\mathfrak{M} = \operatorname{var}(F/[F, F]^s)$ является неразложимым неабелевым мальцевским многообразием.

Действительно, экспонента многообразия $\mathfrak{M}$ равна $m.n$ и $\mathfrak{M}$ — собственное неабелево подмногообразие многообразия $\mathfrak{B}$. По лемме 3.8, многообразие $\mathfrak{M}$ — неразложимо. Докажем, что $\mathfrak{M}$ является мальцевским многообразием. Пусть G_1, G_2 — произвольные группы в $\mathfrak{M}$, $A_1 \subseteq G_1$, $A_2 \subseteq G_2$ — произвольные подгруппы. Обозначим через G группу $\mathfrak{B}\prod\limits_{i=1,2} G_i$, а через A — подгруппу $\{A_1, A_2\}_G = \mathfrak{B}\prod\limits_{i=1,2} A_i$ (см. следствие 2.11). Коммутант $[G, G]$ группы G является абелевой группой, которая разлагается в прямое произведение $[G_1, G_1]\times[G_2, G_2]\times]G_1, G_2]$, где коммутанты $[G_i, G_i]$ $(i=1, 2)$ имеют экспоненты, делящие числа s. Тогда выполняется равенство $[G, G]^s = [G_1, G_2]^s$. Аналогично имеем $[A, A]^s = [A_1, A_2]^s$. Кроме того, имеем очевидное равенство $[G_1, G_2] \cap A = [A_1, A_2]$. Используя эти равенства, мы получаем, что $[G, G]^s \cap A = [G_1, G_2]^s \cap A \quad [G_1, G_2]^s \cap [A_1, A_2] \quad [A_1, A_2]^s$. Последнее равенство получается из того, что группа $[G_1, G_2]$ — абелева экспоненты, делящей числа $m \quad ks$, а k и s — взаимно простые. Следовательно, в группе $G/[G, G]^s = \mathfrak{M}\prod_{i=1,2} G_i$ подгруппа $\{A_1, A_2\}$ естественно изоморфна группе $A/[A, A]^s = \mathfrak{M}\prod_{i=1,2} A_i$. По лемме 1.1 операция $\mathfrak{M}\Pi$ — мальцевская на многообразии $\mathfrak{M}$, то есть $\mathfrak{M}$ — мальцевское многообразие.

§ 4. ПРОБЛЕМА МАЛЬЦЕВА О ТОЧНЫХ ОПЕРАЦИЯХ НА СОБСТВЕННОМ МНОГООБРАЗИИ ГРУПП

Пусть $\mathfrak{B}$ — любое мальцевское многообразие групп. В этом параграфе мы рассмотрим следующий вопрос: существует ли в $\mathfrak{B}$ точная ассоциативная мальцевская операция, отличная от прямого и свободного умножения многообразия $\mathfrak{B}$? Если $\mathfrak{B}$ — любое абелево многообразие, то, очевидно, ответ отрицателен. С другой стороны, если $\mathfrak{B}$ — многообразие всех групп, то этот вопрос совпадает с проблемой Мальцева о точных операциях ([7], 2.8, стр. 26). Поскольку известно автору настоящей работы, эта проблема остается пока открытой.

Следующая теорема дает положительный ответ на указанный вопрос для ряда мальцевских многообразий конечной экспоненты.

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{A}_m$ и $\mathfrak{A}_n$ — абелевы многообразия групп со взаимно простыми экспонентами m и n $(m, n > 1)$. Тогда, если k — число различных простых делителей числа m, то в многообразии $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$ существуют по крайней мере 2^k различных точных ассоциативных мальцевских операций.

Доказательство. Пусть $m = ls$, где натуральные числа l и s являются взаимно простыми. Обозначим через $\mathfrak{B}$ подмногообразие $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_n$ многобразия $\mathfrak{M}$. Мы докажем, что операция $\mathfrak{B}\Pi$ является мальцевской на всем многообразии $\mathfrak{M}$. Ясно, что операция $\mathfrak{B}\Pi$ является фактор-операцией от операции $\mathfrak{M}\Pi$. Пусть G_1, G_2 — произвольные группы из $\mathfrak{M}$, $A_1 \subset G_1$, $A_2 \subseteq G_2$ — любые подгруппы. Обозначим через G группу $\mathfrak{M}\prod_{i=1,2} G_i$, а через A — подгруппу $\{A_1, A_2\}_G = \mathfrak{M}\prod_{i=1,2} A_i$ (см. следствие 2.11). Подгруппа G^n группы G — абелева и состоит из всех элементов группы G, порядки которых делят число m. Пусть $m \quad p_1^{t_1} p_2^{t_2} \quad p_k^{t_k}$, где p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — различные простые числа. Без ограничения общности мы можем считать, что $l = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_v^{t_v}$ $(0 \leq v \leq k)$. Тогда $G^n = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$, где P_i — примарная p_i — подгруппа группы G. Если V — вербальная подгруппа в X. отвечающая многообразию $\mathfrak{B}$, то $V(G) = (G^n)^s) = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_v$. Следовательно, группа $H = \mathfrak{B}\prod_{i=1,2} G_i$, естественно, изоморфна группе $G/(P_1 \times \ldots \times$

$P_v)\cap C_G$, где $C_G=[G_1, G_2]$. Кроме того, имеют место равенства $A\cap C_G=[A_1, A_2]=C_A$ и $A\cap V(G) = A\cap(P_1\times \ldots \times P_v)=Q_1\times Q_2\times \ldots \times Q_v$, где $Q_i = A\cap P_i$ — примарная p_i-подгруппа группы A ($i=1, 2, \ldots, v$). Следовательно, подгруппа $\{A_1, A_2\}_H$ естественно изоморфна группе $A/V(A)\cap C_A = \mathfrak{B}\prod_{i=1,2} A_i$. Поскольку операция $\mathfrak{B}\Pi$ — ассоциативна, то мы доказали (см. лемму 1.1), что она является мальцевской на многообразии $\mathfrak{B}$.

Пусть $m = k_1 s_1 = k_2 s_2$, где $(k_1, s_1) = 1$, $(k_2, s_2)=1$ и $s_1 \neq s_2$. Обозначим через $\mathfrak{B}_i$ многообразие $\mathfrak{A}_{s_i}\mathfrak{A}_n$ ($i=1, 2$). Тогда операции $\mathfrak{B}_1\Pi$ и $\mathfrak{B}_2\Pi$ перемножают различным образом циклические группы порядка n и, следовательно, они не совпадают на многообразии $\mathfrak{M}$.

Но подмногобразия в $\mathfrak{M}$, имеющие указанный выше вид, составляют множество из 2^k элементов. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.2. Если натуральные числа m и n больше единицы и являются взаимно простыми, а число m делится хотя бы на два различных простых числа, то в многобразии $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$ существует точная ассоциативная мальцевская операция, отличная от прямого и свободного умножений многообразия $\mathfrak{M}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов, С. А., О. Н. Мацедонская. О правильных операциях, удовлетворяющих постулату Мальцева. — Сибирск. матем. ж., **7**, 1966, № 6, 1216—1229.
2. Бронштейн, М. А. О точных операциях на классе групп. — Сибирск. матем. ж., **7**, 1966, № 6, 1250—1258.
3. Бронштейн, М. А. О вербальных подгруппах свободных групп. — Докл. АН СССР, **177**, 1967, № 2, 225—257.
4. Генов, Г. К. К теории операций на классе всех групп. — Тр. Моск. матем. о-ва, **25**, 1971, 59—82.
5. Головин, О. Н. Функторные операции на классе всех групп. — Докл. АН СССР, **149**, 1963, № 1, 12—15.
6. Gruenberg, K. W. Residual properties of infinite soluble groups. — Proc. London Math. Soc., **7**, 1957, 1957, No. 25, 29—62.
7 Кауровская тетрадь. Издание третье, дополненное. Новосибирск, 1969.
8. Курош, А. Г. Теория групп. М., 1967.
9. Moran, S. Associative operations on groups I. — Proc. London Math. Soc., **3**, 1956, No. 6, 581—596.
10. Нейман, Х. Многообразия групп. М., 1969.
11. Ольшанский, А. Ю. Два замечания о многообразиях групп. — Вестн. Моск. унив. 1971, № 2, 58—63.
12. Шмелькин, А. Л. К теории правильных произведений групп. — Матем. сб., **51**, 1960, № 3, 227—292.
13. Шмелькин, А. Л. Нильпотентные произведения и нильпотентные группы баз кручения. — Сибирск. матем. ж., **3**, 1962, № 4, 625—640.
14. Шмелькин, А. Л. Сплетения и многообразия групп. — Изв. АН СССР, Сер. матем., **29**, 1965, 149—170.

Поступила 17. II. 1972 г.

МНОГООБРАЗИЯ НА ГРУПИ С МАЛЦЕВСКИ СВОБОДНИ ОПЕРАЦИИ

Георги Генов

(*Резюме*)

В работата се изследват многообразия на групи, свободните (вербалните) операции на които удовлетворяват в границите на своите многообразия постулата на Малцев. Първите резултати за такива многообразия бяха получени неотдавна от А. Ю. Олшански. Указаният тип многообразия се наричат малцевски.

Основен резултат на настоящата работа е следната теорема: Произведение на две собствени многообразия на групи е малцевско многообразие тогава и само тогава, когато сънножителите са малцевски и се пресичат два по два по тривиалното многообразие. Като следствие се получава, че всяко собствено малцевско многообразие с нулева експонента е неразложимо, а всяко малцевско многообразие с крайна експонента се разлага в произведение на краен брой малцевски многообразия, които две по две се пресичат по тривиалното многообразие. Друго следствие е следното обобщение на един от резултатите на А. Ю. Олшански Произведение на абелеви многообразия на групи е малцевско многообразие тогава и само тогава, когато сънножителите имат два по два взаимно прости експоненти.

За разрешимите малцевски многообразия с краен експонент се доказва теорема, от която се получава следното твърдение: Дължината на разрешимост на произволно разрешимо малцевско многообразие с краен експонент не превишава броя на различните прости делители на неговия експонент.

Строят се първи примери на неразложими неабелеви малцевски многообразия на групи.

VARIETIES OF GROUPS WITH MALCEV FREE OPERATIONS

Georgi Genov

(*Summary*)

In this article are investigated varieties of groups, whose free (verbal) operations satisfy the postulate of Malcev in the frame of their varieties. Recently A. J. Olshanski got the first results about this kind of varieties. The above mentioned varieties are called malcev.

The main result of this article is the following theorem: A product of two proper varieties of groups is malcev if and only if the different products are malcev and they intersect each other in the trivial variety. As a corollary the following result is obtained: Every proper malcev variety

with exponent zero is indecomposable and every malcev variety with finite exponent decomposes into finite product of malcev varieties and they intersect each other in the trivial variety. Another corollary is a generalization of a result of Olshansky: Product of abelian varieties of groups is malcev variety if and only if the different products have each other mutually prime exponents.

A theorem is proved for the soluble malcev varieties with finite exponent from which the following result is obtained: The length of solubility of any soluble malcev variety with finite exponent is less or equal to the number of different prime divisors of his exponent.

Examples of indecomposable non-abelian malcev varieties of groups are built.