БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ МЕТОДЕ „СРЕДНИХ" ДЛЯ КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Георги Е. Караджов

В этой работе изложены результаты, связанные с изучением интерполяционных свойств одного класса квазинормированных (кв. н.) пространств. Для нормированных пространств Лионс и Питре [1, 2] ввели K- и J-методы „средних". В работах [3, 4, 5] K-метод (дискретный и недискретный) переносится на случай кв. н. пространств. Дискретный J-метод не обобщается. Это связано с отсутствием свойства аддитивности (квазинорма лишь квазисубаддитивна [3]). С другой стороны, для многих важных кв. н. пространств (например L_p, l_p; пространства Лоренца $L^{q,p}$, $l^{q,p}$; пространства вполне непрерывных операторов S_p, $S^{q,p}$; пространства Харди H^p, $0<p<\infty$, $0<q<\infty$) некоторая положительная степень квазинормы субаддитивна. Это позволяет обобщить дискретный J-метод на случай таких пространств. При этом сохраняются все понятия и теоремы (исключая идеи двойственности), установленные в [1, 2, 6, 8, 9]. Отметим, что приводимые ниже теоремы об интерполяции полилинейных отображений, об интерполяции между фактор-пространствами и о коммутативности двух интерполяционных функторов даже в случае банаховых пространств не покрываются известными ранее результатами.

§ 1. ДИСКРЕТЫЙ J-МЕТОД „СРЕДНИХ" ДЛЯ p-БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $p>0$. Линейное топологическое пространство F назовем p-нормированным, если на нем можно задать две эквивалентные* неотрицательные функции $f\to\|f\|_F$, $f\to\|f\|_{pF}$, аннулирующиеся лишь при $f=0$ и такие, что

$$\|f_1+f_2\|_{pF}^p\le\|f_1\|_{pF}^p+\|f_2\|_{pF}^p,\quad \|-f\|_{pF}=\|f\|_{pF},\quad \|\lambda f\|_F=|\lambda|\,\|f\|_F\ (\lambda\text{—число}).$$

Нормированное пространство 1-нормировано; p-нормированное пространство кв. н. Понятие p-нормированного пространства эквивалентно понятию линейного метрического пространства с метрикой, эквивалентной положительно однородной функции степени p. Полное p-нормированное пространство назовем p-банаховым.

Будем говорить, что пара (F_i) $(i=0, 1)$ — p_i-банаховых пространств совместна, если существует линейное топологическое отделимое простран-

* $C_1\|f\|_F\le\|f\|_{pF}\le C_2\|f\|_F$, $C_i>0$, $f\in F$; короче $\|\cdot\|_F\asymp\|\cdot\|_{pF}$.

ство $\mathfrak{F}$ такое, что $F_0, F_1 \subset \mathfrak{F}$, $F_0 \cap F_1 \neq \Lambda$ ($\subset$ — линейное и непрерывное вложение). Тогда

$$F_0 + F_1 = \{f \in \mathfrak{F};\ f = f_0 + f_1,\ f_i \in F_i\ (i=0, 1)\}$$

является полным линейным метрическим пространством с метрикой $\|f-g\|_{F_0+F_1}$, где

(1) $$\|f\|_{F_0+F_1} = \{\inf(\|f_0\|^{p_0}_{p_0F_0} + \|f_1\|^{p_1}_{p_1F_1});\ f=f_0+f_1,\ f_i\in F_i\ (i=0, 1)\}.$$

Пусть

$$e^{(i-\theta)n} f_n \in l^{r_i}(F_i),\ 0<r_i\leq\infty,\ 0<\theta<1\ (i=0, 1).$$

Тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\|f_n\|_{F_0+F_1} \leq c[\|e^{-\theta n}f_n\|^{p_0}_{l^{r_0}(F_0)} + \|e^{(1-\theta)n} f_n\|^{p_1}_{l^{r_1}(F_1)}].$$

Поэтому ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится в F_0+F_1 и имеет смысл определение

$$F_{\theta r_0 r_1} = (F_0, F_1)_{\theta r_0 r_1} = \left\{ f\in F_0+F_1;\ f=\sum_{-\infty}^{\infty} f_n,\ e^{(i-\theta)n} f_n \in l^{r_i}(F_i)\ (i=0, 1)\right\}.$$

Предложение 1. Пространство $F_{\theta r_0 r_1}$ q-банахово относительно следующих двух функций:

(2)
$$\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} = \inf \max_{i=0,1} \|e^{(i-\theta)n} f_n\|_{l^{r_i}(F_i)},$$
$$\|f\|^q_{qF_{\theta r_0 r_1}} = \inf[\|e^{-\theta n} f_n\|^{q_0}_{l^{r_0}(p_0F_0)} + \|e^{(1-\theta)n}f_n\|^{q_1}_{l^{r_1}(p_1F_1)}],$$
$$1/q = (1-\theta)q_0+\theta q_1,\ q_i = \min(p_i, r_i)\ (i=0, 1),$$

где inf берется по всем представлениям элемента f в виде

(3) $$f=\sum_{-\infty}^{\infty} f_n,\ e^{(i-\theta)n}f_n\in l^{r_i}(F_i)\ (i=0, 1).$$

(По определению $\|e^{-\theta n} f_n\|_{l^{r_0}(p_0F_0)} = \left(\sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta n r_0}\|f_n\|^{r_0}_{p_0F_0}\right)^{1/r_0}$). Для доказательства предложения достаточно проверить, что

$$\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \|f\|_{qF_{\theta r_0 r_1}}.$$

В одну сторону это вытекает из следующих двух соотношений:

$$\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \inf \|e^{-\theta n} f_n\|^{1-\theta}_{l^{r_0}(F_0)} \|e^{(1-\theta)n} f_n\|^{\theta}_{l^{r_1}(F_1)},\quad a_0^{1-\theta}a_1^{\theta} \leq (a_0^{q_0}+a_1^{q_1})^{1/q},\ a_0>0, a_1>0.$$

Наоборот, если f элемент вида (3), то $f=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_{n+k}$ и

$$e^{(i-\theta)n} f_{n+k} \|_{l^{r_i}(p_i F_i)}^{q_i} = e^{(\theta-i)kq_i} \; e^{(i-\theta)n} f_n \|_{l^{r_i}(p_i F_i)}^{q_i} \; (i=0, 1).$$

Остается подставить это в (2) и выбрать k подходящим образом (минимизируя).

Теорема 1. Пусть (A_i), (B_i) совместные пары p_i, q_i-банаховых пространств соответственно ($i=0, 1$) и отображение $T: A_i \to B_i$ линейно и непрерывно. Тогда сужение $T: A_{\theta r_0 r_1} \to B_{\theta r_0 r_1}$, $0<\theta<1$, $0<r_0, r_1<\infty$, линейно и непрерывно и

$$\|Ta\|_{B_{\theta r_0 r_1}} \leq C \|T\|_{A_0\to B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1\to B_1}^{\theta} \|a\|_{A_{\theta r_0 r_1}}, \; a \in A_{\theta r_0 r_1}.$$

Теорема 2. Если (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств ($i=0, 1$) и $1/r_0+1/r_1>0$, то $F_0 \cap F_1$ плотно в $F_{\theta r_0 r_1}$.

Относительно доказательства этих двух теорем см. [1].

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ K- И J-МЕТОДОВ „СРЕДНИХ“

Следующие две теоремы определяют K-метод, соответственно дискретный и недискретный.

Теорема 1. Если (F_i) совместная пара p_i — банаховых пространств, то

(1) $$(F_0, F_1)_{\theta r_0 r_1} = \{f \in F_0+F_1;\; f = f_{0n}+f_{1n},\; n=0, \pm 1, \ldots,$$
$$e^{(i-\theta)n} f_{in} \in l^{r_i}(F_i) \; (i=0, 1)\}$$

и

(2) $$\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \inf \max_{i=0,1} \|e^{(i-\theta)n} f_{in}\|_{l^{r_i}(F_i)}, \; 0<r_0, r_1 \leq \infty.$$

Доказательство (ср. [1]). Если $f \in (F_0, F_1)_{\theta r_0 r_1}$, то

$$f=\sum_n f_n, \; e^{(i-\theta)n} f_n \in l^{r_i}(F_i) \; (i=0, 1).$$

Положим $f_{0n}=\sum_{-\infty}^{n} f_k$, $f_{1n}=\sum_{n+1}^{\infty} f_k$. Тогда $f=f_{0n}+f_{1n}$, $n=0, \pm 1, \ldots$ (в F_0+F_1) и $\|f_{0n}\|_{p_0 F_0}^{p_0} \leq \sum_{-\infty}^{0} \|f_{n+m}\|_{p_0 F_0}^{p_0}$. Эсли $p_0<r_0$, то по неравенству Минковского

$$\left(\sum_n e^{-\theta n r_0} \|f_{0n}\|_{p_0 F_0}^{r_0}\right)^{p_0/r_0} \leq C \|e^{-\theta n} f_n\|_{l^{r_0}(F_0)}^{p_0}$$

и следовательно $\|e^{-\theta n} f_{0n}\|_{l^{r_0}(F_0)} \leq C \|e^{-\theta n} f_n\|_{l^{r_0}(F_0)}$. Случай $p_0 \geq r_0$ проще. Надо воспользоваться неравенством $(a+b)^q \leq a^q+b^q$, $a, b>0$, $0<q\leq 1$. Отсюда следует оценка (2) в одну сторону.

Наоборот, если $f=f_{0n}+f_{1n}$, $n=0, \pm 1, \ldots$, $e^{(i-\theta)n} f_{in} \in l^{r_i}(F_i)$ $(i=0, 1)$, то тогда для $f_n=f_{0,n+1}-f_{0n}=f_{1,n}-f_{1,n+1}$ имеем $f_n \in F_0 \cap F_1$ и

$$\sum_n \|f_n\|_{F_0+F_1} \leq C[\|e^{-\theta n} f_{0n}\|^{p_0}_{l^{r_0}(F_0)} + \|e^{(1-\theta)n} f_{1n}\|^{p_1}_{l^{r_1}(F_1)}].$$

Следовательно $\sum_n f_n = \tilde{f}$ в F_0+F_1. Остается показать, что $\tilde{f}=f$. Однако $\tilde{f}=\sum_{-\infty}^{0} f_n + \sum_{1}^{\infty} f_n = f - \lim_{N\to\infty} f_{0,-N} - \lim_{M\to\infty} f_{1,M+1}$. Так как $\|f_{in}\|_{F_i} \leq Ce^{(\theta-i)n}$ $(i=0,1)$, то $\tilde{f}=f$. С другой стороны, очевидно, $e^{(i-\theta)n} f_n \in l^{r_i}(F_i)$ $(i=0, 1)$. Теорема доказана.

Теорема 2. В условиях теоремы 1

$$(3) \qquad (F_0, F_1)_{\theta r_0 r_1} = \left\{ f \in F_0+F_1;\ \|f\|^r_{(F_0,F_1)\theta r} = \int_0^\infty t^{-\theta r} K^r(t,f;F_0,F_1)\frac{dt}{t} \right\},$$

где $1/r=(1-\theta)/r_0+\theta/r_1$ и

$$K(t,f;F_0,F_1)=\{\inf(\|f_0\|_{F_0}+t\|f_1\|_{F_1});\ f=f_0+f_1, f_i\in F_i\ (i=0,1)\}.$$

При этом $\|f\|_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \|f\|_{(F_0,F_1)_{\theta r}}$.

Доказательство (ср. [2], [3], [4]). Положим для $f\in F_0+F_1$ (см. [4]) $(0<t<\infty)$:

$$L(t,f;F_0,F_1)=\inf\{(\|f_0\|^{r_0}_{F_0}+t\|f_1\|^{r_1}_{F_1});\ f=f_0+f_1, f_i\in F_i\ (i=0,1)\},$$

и воспользуемся следующей леммой, которую докажем несколько позднее.

Лемма 1. Если $f\in(F_0,F_1)_{\theta r_0 r_1}$, то при $t=e^{(1-\theta)nr_1+r_0 n\theta}$

$$L(t,f;F_0,F_1)=\{\inf(\|f_{0n}\|^{r_0}_{F_0}+\|f_{1n}\|^{r_1}_{F_1});\ f=f_{0n}+f_{1n},\ e^{(i-\theta)n}f_{in}\in l^{r_i}(F_i)\ (i=0,1)\}.$$

Пусть $W_f=\{(f_{0n},f_{1n});\ f=f_{0n}+f_{1n},\ e^{(i-\theta)n}f_{in}\in l^{r_i}(F_i)\ (i=0,1)\}$.

Легко видеть (см. доказательство предложения 1, § 1), что

$$\|f\|^r_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \inf_{W_f}[\|e^{-\theta n}f_{0n}\|^{r_0}_{l^{r_0}(F_0)}+\|e^{(1-\theta)n}f_{1n}\|^{r_1}_{l^{r_1}F(1)}].$$

Отсюда

$$\|f\|^r_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \sum_{-\infty}^{\infty} \inf_{W_f}[\|e^{-\theta n}f_{0n}\|^{r_0}_{F_0}+\|e^{(1-\theta)n}f_{1n}\|^{r_1}_{F_1}]$$

и следовательно

$$\|f\|^r_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \sum_n e^{-\theta n r_0} L(t,f;F_0,F_1),\quad t=e^{(1-\theta)nr_1+\theta n r_0}.$$

Положим $1-\eta=(1-\theta)r/r_0$, $\eta=\theta r/r_1$. Тогда

$$\|f\|^r_{F_{\theta r_0 r_1}} \asymp \sum_n e^{-\eta n}L(e^n,f;F_0,F_1) \asymp \int_0^\infty t^{-\eta}L(t,f;F_0,F_1)\frac{dt}{t}.$$

Однако (см. [4]) $\int_0^\infty t^{-\eta}L(t,f;F_0,F_1)\frac{dt}{t} \asymp \|f\|^r_{(F_0,F_1)_{\theta r}}$.

Теорема доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $A = \inf\{(\|f_{0n}\|^{r_0}_{F_0} + t\|f_{1n}\|^{r_1}_{F_1}); (f_{0n}, f_{1n}) \in W_f\}$, $t = e^{(1-\theta)nr_1+\theta nr_0}$. Надо доказать, что $L(t, f; F_0, F_1) = A$. Очевидно неравенство $\leq$. Допустим, что $L(t, f; F_0, F_1) < A$. Тогда, по определению функци L, для любого $n = 0, \pm 1, \ldots$ найдется разложение $f = g_{0n} + g_{1n}$ с $\|g_{0n}\|^{r_0}_{F_0} + t\|g_{1n}\|^{r_1}_{F_1} < A$. Пусть $(f_{0n}, f_{1n}) \in W_f$. Тогда

$$\|g_{0n}\|^{r_0}_{F_0} + t\|g_{1n}\|^{r_1}_{F_1} < \|f_{0n}\|^{r_0}_{F_0} + t\|f_{1n}\|^{r_1}_{F_1}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Положим $B = \{n;\ \|f_{0n}\|^{r_0}_{F_0} \geq t\|f_{1n}\|^{r_1}_{F_1}\}$. Легко видеть, что $\|g_{0n}\|^{r_0}_{F_0} < 2t\|f_{1n}\|^{r_1}_{F_1}$, $\|g_{1n}\|^{r_1}_{F_1} < 2\|f_{1n}\|^{r_1}_{F_1}$, если $n \in B$; $\|g_{0n}\|^{r_0}_{F_0} < 2\|f_{0n}\|^{r_0}_{F_0}$, $t\|g_{1n}\|^{r_1}_{F_1} < 2\|f_{0n}\|^{r_0}_{F_0}$, если $n \notin B$. Отсюда $(g_{0n}, g_{1n}) \in W_f$ и следовательно $A \leq \|g_{0n}\|^{r_0}_{F_0} + t\|g_{1n}\|^{r_1}_{F_1}$. Противоречие! Лемма доказана.

Замечание 1. Правые части формул (1) и (3) имеют смысл и эквивалентны и тогда, когда (F_i) лишь кв. н. пространства (см. [4, 5]).

§ 3. ТЕОРЕМА О ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Теорема 1. Пусть (A_i), (B_i), (C_i), совместные пары a_i, b_i, p_i-банаховых пространств соответственно и отображение $T: A_i \times B_i \to C_i$ билинейно и непрерывно ($i = 0, 1$). Положим $1/s_i = 1/p_i - 1/q_i + 1/r_i$; $s_i, q_i, r_i \geq p_i$. Тогда $T: (A_0 + A_1) \times B_0 \cap B_1 \to C_0 + C_1$ и

(1) $$\|T(a, b)\|_{C_{\theta s_0 s_1}} \leq C\|a\|_{A_{\theta q_0 q_1}}\|b\|_{B_{\theta r_0 r_1}}, \quad a \in A_{\theta q_0 q_1},\ b \in B_0 \cap B_1.$$

Замечание 1. Если $1/r_0 - 1/r_1 > 0$, то (по теореме 2, § 1) отображение T допускает продолжение по непрерывности $\tilde{T}: A_{\theta q_0 q_1} \times B_{\theta r_0 r_1} \to C_{\theta s_0 s_1}$ со сохранением оценки (1).

Замечание 2. Аналогичная теорема имеет место и для полилинейных отображений.

Доказательство теоремы (ср. [1]) Если $a \in A_{\theta q_0 q_1}$, $b \in B_0 \cap B_1$ то (из определения) $a = \sum_n a_n$, $b = \sum_n b_n$, $e^{(i-\theta)n} a_n \in l^{q_i}(A_i)$, $e^{(i-\theta)n} b_n \in l^{r_i}(B_i)$.

($i = 0, 1$). Положим $c_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T(a_m, b_{n-m})$. Продолжим отображение T (не меняя обозначение) линейно с сохранением непрерывности так, чтобы $T: (A_0 + A_1) \times B_0 \cap B_1 \to C_0 + C_1$. Тогда $T(a, b)$ имеет смысл и $T(a, b) \in C_0 + C_1$. Докажем, что ряд $\sum_n c_n$ сходится в $C_0 + C_1$ и его сумма совпадает с $T(a, b)$. По свойству непрерывности

(2) $$\|T(a_m, b_{n-m})\|_{C_i} \leq C\|a_m\|_{A_i}\|b_{n-m}\|_{B_i} \quad (i = 0, 1).$$

Пусть

$$\alpha_{in} = e^{(i-\theta)np_i}\|a_n\|^{p_i}_{A_i}, \quad \beta_{in} = e^{(i-\theta)np_i}\|b_n\|^{p_i}_{B_i}.$$

Тогда, поскольку C_i p_i-банахово пространство, из (2) имеем

(3) $$e^{(i-\theta)np_i}\|c_n\|^{p_i}_{C_i} \leq C^{p_i}\sum_m \alpha_{im} \cdot \beta_{i,n-m}.$$

Положим

$$q'_i = q_i/p_i,\ r'_i = r_i/p_i,\ s'_i = s_i/p_i \quad (i=0,1).$$

Тогда

$$1/s'_i + 1 = 1/q'_i + 1/r'_i,\ q'_i,\ r'_i,\ s'_i \geqq 1.$$

По известному неравенству Юнга для оценки свертки из (3) следует, что

$$\| e^{(i-\theta)n} c_n \|^{p_i}_{l^{s_i}(C_i)} \leqq C^{p_i} \| e^{(i-\theta)n} a_n \|^{p_i}_{l^{q_i}(A_i)} \| e^{(i-\theta)n} b_n \|^{p_i}_{l^{r_i}(B_i)} \qquad (i=0,1).$$

Следовательно, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n = c$ в $C_0 + C_1$ и

(4) $$\|c\|_{C_{\theta s_0 s_1}} \leqq c \max_{i=0,1} \left[\| e^{(i-\theta)n} a_n \|_{l^{q_i}(A_i)} \| e^{(i-\theta)n} b_n \|_{l^{r_i}(B_i)} \right].$$

Теперь покажем, что $c = T(a, b)$. Действительно, $T(a_m, b_{n-m}) \in C_0 \cap C_1$ и поэтому

(5) $$\sum_{n,m} \| T(a_m, b_{n-m}) \|_{C_0+C_1} \leqq \sum_{n=-\infty}^{0} \sum_m \| T(a_m, b_{n-m}) \|^{p_0}_{C_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_m \| T(a_m, b_{n-m}) \|^{p_1}_{C_1}.$$

Зарабатывая множители $e^{-\theta n p_0}$ и $e^{(1-\theta)n p_1}$ соответственно (в правой части (5)) и применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\sum_{n,m} \| T(a_m, b_{n-m}) \|_{C_0+C_1} \leqq C \Big[\Big\| \sum_m \alpha_{0m} \cdot \beta_{0,n-m} \Big\|_{l^{s'_0}} + \Big\| \sum_m \alpha_{1,m} \cdot \beta_{1,n-m} \Big\|_{l^{s'_1}} \Big].$$

Как и раньше, отсюда вытекает, что

(6) $$\sum_{n,m} \| T(a_m, b_{n-m}) \|_{C_0+C_1} < \infty.$$

Определим на $C_0 + C_1$ следующую квазинорму:

$$\| f \|_{C_0+C_1} = \{ \inf (\| f_0 \|_{C_0} + \| f_1 \|_{C_1}); f = f_0 + f_1,\ f_i \in C_i\ (i=0,1) \},$$

и заметим, что $\| f_n - f \|_{C_0+C_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ тогда и только тогда, когда $| f_n - f |_{C_0+C_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Далее

$$\| T(\tilde{a}, \tilde{b}) \|_{C_0+C_1} \leqq C \| \tilde{a} \|_{A_0 \cap A_1} \| \tilde{b} \|_{B_0+B_1},\quad \tilde{a} \in A_0 \cap A_1,\ \tilde{b} \in B_0 \cap B_1.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{n=-M}^{N} T(a_m, b_{n-m}) - T(a_m, b) \right\|_{C_0+C_1} \leqq C \| a_m \|_{A_0 \cap A_1} \left\| b - \sum_{n=-M}^{N} b_{n-m} \right\|_{B_0+B_1}$$

и так как $b \quad \sum_n b_n$ в B_0+B_1, то (согласно последнему замечанию и (6))

(7) $$\sum_{n,m} T(a_m, b_n \quad m) \quad \sum_m \sum_n T(a_m, b_n \quad m) \quad \sum_m T(a_m, b).$$

Аналогично имеем $\sum_m T(a_m, b) \quad T(a, b)$. Отсюда, из определения c и (7) следует, что $c \quad T(a, b)$. Подставляя это в левой части (4) и переходя к inf в правой части, завершаем доказательство теоремы.

§ 4. РЕИТЕРАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ „СРЕДНИХ"

Пусть (F_i) совместная пара кв. н. пространств. По определению, кв. н. пространство $F \supset F_0 \cap F_1$ принадлежит классу $J_\theta(F_0, F_1)$, если $(0<\theta \quad 1)$

(1) $$a_F \quad C \; a^{1-\theta}_{F_0} \; a^{\theta}_{F_1} \quad a \in F_0 \cap F \quad C \quad C(\theta).$$

Пример 1. $(F_0, F_1)_{\theta r} \in J_\theta(F_0, F_1)$ $(0<\theta \quad 1,\ 0<r \quad \infty)$; $F_i \in J_i(F_0, F_1)$ $(i \quad 0, 1)$ и кв. н. пространство $F \in J_i(F_0, F_1) \quad F_i \subset F$ $(i \quad 0, 1)$.

Предложение 1. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств и r-банахово пространство F, такое, что $F_0 \cap F_1 \subset F \subset F_0 + F_1$. Тогда $F \in J_\theta(F_0, F_1) \Leftrightarrow (F_0, F_1)_{\theta r} \subset F$ $(0<\theta<1)$.

Доказательство (ср. [1]). Из определения класса J_θ и примера 1 следует соотношение $\quad$ Наоборот, если $a \in (F_0, F_1)_{\theta r}$, то $a \quad \sum_n a_n$ и $e^{(i-\theta)n} a_n \in l^r(F_i)$ $(i \quad 0, 1)$. Так как $a_n \in F_0 \cap F_1$ и $F \in J_\theta(F_0, F_1)$, то

$$a_n{}_F \quad C \; a_n{}^{1-\theta}_{F_0} \; a_n{}^{\theta}_{F_1}$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера, получаем

(2) $$|a_n{}_{l^r(F)} \leq C \quad e^{-\theta n} a_n{}^{1-\theta}_{l^r(F_0)} \quad e^{(1-\theta)n} a_n{}^{\theta}_{l^r(F_1)}.$$

Следовательно, ряд $\sum_n a_n$ сходится в F и так как $F \subset F_0 + F_1$, то $\sum_n a_n \quad a$. Тогда из (2) имеем

$$a|^r_{F} \quad \sum_n \quad a_n{}^r_F \leq C^r \max_{i=0,1} \quad e^{(i-\theta)n} a_n{}^r_{l^r(F_i)}.$$

Остается перейти к inf в правой части.

По определению, кв. н. пространство $F \subset F_0 \quad F_1$ принадлежит классу $K_\theta(F_0, F_1)$, если для любых $a \in F$ и $t>0$ существует разложение $a \quad a_{0t} + a_{1t}$, $a_{it} \in F_i$, такое, что $(0 \leq \theta \leq 1)$

(3) $$a_{0t}{}_{F_0} \quad Ct^\theta \quad a_F, \quad a_{1t} \quad Ct^{\theta-1} \quad a_F, \; C \quad C(\theta).$$

Пример 2. $(F_0, F_1)_{\theta\infty} \in K_\theta(F_0, F_1)$, $0<\theta<1$; $F_i \in K_i(F_0, F_1)$ и кв. н. пространство $F \in K_i(F_0, F_1) \Leftrightarrow F \subset F_i$ $(i \quad 0, 1)$.

Предложение 2. Пусть (F_i) совместная пара кв. н. пространств и кв. н. пространство $F \subset F_0 + F_1$. Тогда $(0<\theta<1)$ $F \in K_\theta(F_0, F_1) \Longleftrightarrow F \subset (F_0, F_1)_{\theta\infty}$.

Доказательство (ср. [1]). Достаточно рассмотреть случай ∞. Если $a \in F$, то $a = a_{0t} + a_{1t}$ и $t^{i-\theta} \|a_{it}\|_{F_i} \leq C \|a\|_F$ ($i = 0, 1$), $0 < t < \infty$. Следовательно $t^{-\theta} K(t, a; F_0, F_1) \leq C \|a\|_F$, т. е. $\|a\|_{(F_0, F_1)_{\theta\infty}} \leq C \|a\|_F$.

Положим $P_\theta(F_0, F_1) = J_\theta(F_0, F_1) \cap K_\theta(F_0, F_1)$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Из предложений 1, 2 непосредственно вытекает

Теорема 1. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств и r-банахово пространство F такое, что $F_0 \cap F_1 \subset F \subset F_0 + F_1$. Тогда $(0 < \theta < 1)$

$$F \in P_\theta(F_0, F_1) \Leftrightarrow (F_0, F_1)_{\theta r} \subset F \subset (F_0, F_1)_{\theta\infty}.$$

Теперь сформулируем несколько результатов, относящиеся к свойству реитерации (см. [1]).

Теорема 2. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств и r_i-банаховы пространства $G_i \in J_{\theta_i}(F_0, F_1)$ $(0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1)$ образуют совместную пару. Тогда

$$(F_0, F_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, r} \subset (G_0, G_1)_{\eta r}, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < r \leq \infty.$$

Доказательство (ср. [1]). Пусть $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. Если

$$a \in (F_0, F_1)_{\theta r}, \text{ то } a = \sum_n a_n, \quad e^{(i-\theta)n} a_n \in l^r(F_i) \quad (i = 0, 1).$$

Положим $\xi_i = \theta_i - \theta = (i - \eta)(\theta_1 - \theta_0)$ $(i = 0, 1)$. Из соотношений

$$\|a_n\|_{G_i} \leq C \|a_n\|_{F_0}^{1-\theta_i} \|a_n\|_{F_1}^{\theta_i} \quad (i = 0, 1)$$

с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\text{(4)} \qquad \|e^{\xi_i n} a_n\|_{l^r(G_i)} \leq C \|e^{-\theta n} a_n\|_{l^r(F_0)}^{1-\theta_i} \|e^{(1-\theta)n} a_n\|_{l^r(F_1)}^{\theta_i} \quad (i = 0, 1).$$

Отсюда, используя свойство однородности (относительно η, см. [1]) вытекает, что левую часть в (4) можно заменить на $\|e^{(i-\eta)n} a_n\|_{l^r(G_i)}$. Следовательно, $a \in (G_0, G_1)_{\eta r}$ и $\|a\|_{(G_0, G_1)_{\eta r}} \leq C \|a\|_{(F_0, F_1)_{\theta r}}$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть (F_i) совместная пара кв. н. пространств и кв. н. пространства $G_i \in K_{\theta_i}(F_0, F_1)$, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$. Тогда

$$(G_0, G_1)_{\eta r} \subset (F_0, F_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, r}, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < r \leq \infty.$$

Доказательство, проведенное в [1] для банаховых пространств, годится и для кв. н. пространств.

Из теорем 2 и 3 вытекает реитерационная

Теорема 4. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств и r_i-банаховы пространства $G_i \in P_{\theta_i}(F_0, F_1)$, $0 \leq \theta_0 \neq \theta_1 \leq 1$. Тогда

$$(G_0, G_1)_{\eta r} = (F_0, F_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, r}, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < r \leq \infty.$$

Сформулированные результаты относятся к случаю $\theta_0 \neq \theta_1$. Для исследования случая $\theta_0 = \theta_1$, необходимо следующее построение. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, и $e^{(i-\theta)n} a_n \in l^{q,r}(F_i)$, т. е. $e^{(i-\theta)n} \|a_n\|_{F_i} \in l^{q,r}$. Напомним, что $l^{q,r}$ есть пространство Лоренца числовых последовательностей $a = \{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ с квазинормой $\|a\|_{l^{q,r}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{rq-1} a_n^*$, где $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ есть перестановка чисел $\{ \|a_n\| \}_{-\infty}^{\infty}$ в невозрастающем порядке. Легко видеть (ср. [5]), что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{F_0+F_1} \le C[\|e^{-\theta n}a_n\|_{l^{q,r}(F_0)}^{p_0} + \|e^{(1-\theta)n}a_n\|_{l^{q,r}(F_1)}^{p_1}].$$

Следовательно, имеет смысл определение (ср. [5])

$$(F_0, F_1)_\theta^{qr} = \left\{a \in F_0 + F_1;\ a = \sum a_n,\ \|e^{(i-\theta)n} a_n\|_{F_i} \in l^{q,r}\ (i = 0, 1)\right\}.$$

Это естественно p-банахово пространство с

$$1/p = (1-\theta)/\min(p_0, r) + \theta/\min(p_1, r).$$

Теорема 5. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств, $p_i < q < \infty$, $p_i \le r \le \infty$ $(i = 0, 1)$; $0 < \alpha, \theta < 1$. Тогда $(q_0 \ne q_1)$

$$((F_0, F_1)_{\theta q_0}, (F_0, F_1)_{\theta q_1})_{\alpha r} = (F_0, F_1)_\theta^{qr},\quad 1/q = (1-\alpha)/q_0 + \alpha/q_1.$$

Доказательство. Вложение $\supset$ доказывается по схеме, предложенной в [5] ($0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$). Надо только всюду недискретный метод заменить на дискретный. Для доказательства обратного вложения нужна следующая

Лемма 1. В условиях теоремы 5

$$(F_0, F_1)_\theta^{qr} = \{a \in F_0 + F_1;\ e^{-\theta n} K(e^n, a; F_0, F_1) \in l^{q,r}\}.$$

При этом

$$\|a\|_{(F_0, F_1)_\theta^{qr}} \asymp \|e^{-\theta n} K(e^n, a; F_0, F_1)\|_{l^{q,r}}.$$

Прежде чем доказывать лемму, покажем как из нее выводится теорема 5. Рассмотрим отображение $T: a \to \{e^{-\theta n} K(e^n, a; F_0, F_1)\}_{-\infty}^{\infty}$; T действует линейно и непрерывно из $(F_0, F_1)_{\theta q_i}$ в l^{q_i} $(i = 0, 1)$ и по теореме 1, § 1,

$$T: ((F_0, F_1)_{\theta q_0}, (F_0, F_1)_{\theta q_1})_{\alpha r} \to (l^{q_0}, l^{q_1})_{\alpha r}.$$

Остается заметить, что $(l^{q_0}, l^{q_1})_{\alpha r} = l^{q,r}$ (см. [3, 6]). Теперь докажем лемму. Если $a \in (F_0, F_1)_\theta^{qr}$, то $a = \sum_n a_n$ и $\|e^{(i-\theta)n} a_n\|_{F_i} \in l^{q,r}$ $(i = 0, 1)$.

Положим $a_{0n} = \sum_{-\infty}^{n} a_k$, $a_{1n} = \sum_{n+1}^{\infty} a_k$. Тогда $a = a_{0n} + a_{1n}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, и

$$e^{(i-\theta)n} \|a_{in}\|_{F_i} \le a'^{\,1/p_i}_{in};\quad a'_{0n} = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-\theta(n+k)p_0} \|a_{n+k}\|_{F_0}^{p_0} e^{\theta k p_0},$$

(5)

$$a'_{1n} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(1-\theta)(n+k)p_1} \|a_{n+k}\|_{F_1}^{p_1} e^{-(1-\theta)k p_1}.$$

Следовательно

(6) $$e^{-\theta n}K(e^n, a; F_0, F_1) \leq \|a_{0n}\|^{1/p_0} + \|a_{1n}\|^{1/p_1}.$$

С помощью соотношений

$$\|\|a_{0n}\|^{1/p_0}\|_{l^{q,r}} = \|\|a_{0n}\|\|^{1/p_0}_{l^{q/p_0, r/p_0}}$$

и

$$\left\|\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k}\cdot\beta_k\right\}_{n=-\infty}^{\infty}\right\|_{l^{m,n}} \leq C\|\{a_n\}\|_{l^{m,n}}\|\{\beta_n\}\|_{l^1}$$

($1<m<\infty$, $1\leq n\leq\infty$) из (5) и (6) получаем

$$\|e^{-\theta n}K(e^n, a; F_0, F_1)\|_{l^{q,r}} \leq C\max_{i=0,1}\|e^{(i-\theta)n}a_n\|_{l^{q,r}(F_i)}.$$

Наборот, для любого $n=0, \pm 1, \ldots$ существует разложение $a=a_{0n}+a_{1n}$ такое, что

$$\|a_{0n}\|_{F_0}+e^n\|a_{1n}\|_{F_1}\leq 2K(e^n, a; F_0, F_1).$$

Следовательно $e^{(i-\theta)n}\|a_{in}\|_{F_i}\in l^{q,r}$ ($i=0, 1$). Далее надо положить $a_n=a_{1,n+1}-a_{0,n}=a_{1,n}-a_{1,n+1}$ и заметить, что ряд $\sum_n a_n$ сходится в F_0+F_1 и его сумма равна a (так как $l^{q,r}\subset l_\infty$, то $\|a_{in}\|_{F_i}\leq Ce^{(\theta-i)n}$ ($i=0, 1$)). Лемма доказана.

Следующая теорема является интерполяционной типа теоремы Марцинкевича. Для банаховых пространств она доказана Лионсом и Питре [1]. Аналогичная теорема (в более конкретной ситуации) приведена К. К. Головкиным (см. [7]).

Теорема 6. Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств и r_i-банаховы пространства $X_i\in J_{\theta_i}(F_0, F_1)$ ($0\leq\theta_0<\theta<\theta_1\leq 1$) образуют совместную пару. Пусть (G_i) совместная пара кв. н. пространств и кв. н. пространства $Y_i\in K_{\theta_i'}(G_0, G_1)$ ($0\leq\theta_0'<\theta'<\theta_1'\leq 1$). Тогда, если $T: X_i\to Y_i$ линейное и непрерывное отображение с нормой M_i ($i=0, 1$), то

$$T:(F_0, F_1)_{\theta r}\to(G_0, G_1)_{\theta', r} \text{ с нормой } \leq CM_0^{1-\eta}M_1^{\eta},$$

где $\eta=(\theta-\theta_0)/(\theta_1-\theta_0)=(\theta'-\theta_0')/(\theta_1'-\theta_0')$.

Доказательство. По теореме 2 $(F_0, F_1)_{\theta r}\subset(X_0, X_1)_{\eta r}$ и по теореме 3 $(Y_0, Y_1)_{\eta r}\subset(G_0, G_1)_{\theta' r}$. Остается заметить, что (по теореме 1, § 1)

$$T:(X_0, X_1)_{\eta r}\to(Y_0, Y_1)_{\eta r} \text{ с нормой } \leq CM_0^{1-\eta}M_1^{\eta}.$$

§ 5. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И КОМПАКТНОСТИ

Предложение 1 (ср. [1]). Если (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств, r_i-банаховы пространства $X_i\in J_{\theta i}(F_0, F_1)$ образуют совместную пару ($0\leq\theta_0<\theta<\theta_1\leq 1$) и кв. н. пространство $X\in K_\theta(F_0, F_1)$, то $X\subset X_0+X_1$.

Действительно, по предложению 2, § 4 $X\subset(F_0, F_1)_{\theta\infty}$; по теореме 2, § 4 $(F_0, F_1)_{\theta\infty}\subset(X_0, X_1)_{\eta\infty}$, $\theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1$ и, наконец $(X_0, X_1)_{\eta\infty}\subset X_0+X_1$.

Предложение 2 (ср. [1]). Если (F_i) совместная пара кв. н. пространств, кв. н. пространства $X_i \in K_{\theta_i}(F_0, F_1)$ $(0 \leq \theta_0 < \theta < \theta_1 \leq 1)$ и r-банахово пространство $X \in J_\theta(F_0, F_1)$, то $X_0 \cap X_1 \subset X$.

Действительно, $X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\eta r}$, $0 < \eta < 1$; по теореме 3, § 4 $(X_0, X_1)_{\eta r} \subset (F_0, F_1)_{\theta r}$, $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$ и, наконец, по предложению 1, § 4 $(F_0, F_1)_{\theta r} \subset X$. Из предложений 1, 2 следует.

Теорема 1. Если (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств, r_i-банаховы пространства $X_i \in P_{\theta_i}(F_0, F_1)$ и r-банахово пространство $X \in P_\theta(F_0, F_1)$ $(0 \leq \theta_0 < \theta < \theta_1 \leq 1)$, то

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

Теперь сформулируем соответствующие результаты для того случая, когда $F_0 \subset F_1$.

Предложение 1' (ср. [1]). Если F_i p_i-банаховы пространства, $F_0 \subset F_1$, r-банахово пространство $X_1 \in J_{\theta_1}(F_0, F_1)$ и кв. н. пространство $X \in K_\theta(F_0, F_1)$ $(0 < \theta < \theta_1 \leq 1)$, то $X \subset X_1$.

Действительно, $F_1 \in J_0(F_0, F_1)$ и, следовательно, по теореме 2, § 4 $(F_0, F_1)_{\eta\theta_1, \infty} \subset (F_0, X_1)_{\eta, \infty}$, $0 < \eta < 1$. Далее, по предложению 1, § 4 $(F_0, F_1)_{\theta, r} \subset X_1$ и т. к. $F_0 \subset F_1$, то $F_0 \subset X_1$, т. е. $(F_0, F_1)_{1\theta} \subset X_1$. Пусть $\eta\theta_1 = \theta$. Тогда, по предложению 2 $X \subset (F_0, F_1)_{\theta\infty} \subset X_1$.

Предложение 2' (ср. [1]). Если F_i p_i-банаховы пространства, $F_0 \subset F_1$, кв. н. пространство $X_0 \in K_{\theta_0}(F_0, F_1)$ и r-банахово пространство $X \in J_\theta(F_0, F_1)$ $(0 \leq \theta_0 < \theta \leq 1)$, то $X_0 \subset X$.

Действительно, $F_1 \in K_1(F_0, F_1)$ и по предложению 2, $X_0 \cap F_1 \subset X$. По предложению 2, § 4 $X_0 \subset (F_0, F_1)_{\theta_0\infty} \subset F_1$, т. е. $X_0 \subset X$.

Из предложения 2' следует

Теорема 2. В условиях теремы 1, если $F_0 \subset F_1$, то

$$X_0 \subset X \subset X_1.$$

Теорема 3 (ср. [1]). Пусть (F_i) совместная пара квазибанаховых (кв. б.) пространств (т. е. полные кв. н. пространства), кв. б. пространство $A \in J_\theta(F_0, F_1)$ $(0 < \theta < 1)$ и B кв. н. пространство. Тогда, если $T: B \to F_0$ линейно и компактно и $T: B \to F_1$ линейно и непрерывно, то $T: B \to A$ линейно и компактно.

Теорема 4 (ср. [1]). Пусть (F_i) совместная пара кв. б. пространств, кв. н. пространство $A \in K_\theta(F_0, F_1)$, $0 < \theta < 1$, и B — кв. б. пространство. Тогда, если $T: F_0 \to B$ линейно и компактно, $T: F_1 \to B$ линейно и непрерывно, то $T: A \to B$ линейно и компактно.

Теоремы 3, 4 доказываются по схеме, указанной в [1].

Теорема 5 (ср. [1]). Пусть (F_i) p_i-банаховы пространства такие, что $F_0 \subset F_1$ компактно, кв. н. пространство $X_0 \in K_{\theta_0}(F_0, F_1)$ и r-банахово пространство $X_1 \in J_{\theta_1}(F_0, F_1)$ $(0 \leq \theta_0 < \theta_1 < 1)$. Тогда $X_0 \subset X_1$ компактно.

Доказательство. Пусть I тождественное отображение в F_1. Тогда $I: F_0 \to F_1$ компактно и $I: F_1 \to F_1$ непрерывно. По теореме 4 $I: X_0 \to F_1$ компактно и $I: X_0 \to X_0$ непрерывно. Если бы $X_1 \in J_\eta(F_1, X_0)$ для некоторого η, $0 \leq \eta < 1$, то по теореме 3 получили бы, что $I: X_0 \to X_1$ компактно (и тогда теорема доказана). Докажем, что $X_1 \in J_\eta(F_1, X_0)$ при $\eta =$

$(1-\theta_1)/(1-\theta_0)$. Но $F_1 \in K_1(F_0, F_1)$ и $X_0 \in K_{\theta_0}(F_0, F_1)$, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < 1$. Следовательно, по теореме 3, § 4 $(F_1, X_0)_{\eta r} \subset (F_0, F_1)_{\theta, r}$. Далее $X_1 \in J_{\theta_1}(F_0, F_1)$ и поэтому, по предложению 1, § 4 $(F_0, F_1)_{\theta, r} \subset X_1$, т. е. $(F_1, X_0)_{\eta r} \subset X_1$ и снова по предложению 1, § 4 $X_1 \in J_\eta(F_1, X_0)$. Теорема доказана.

Для формулировки следующей теоремы необходимы некоторые новые определения. Пусть (G_i) совместная пара кв. б. пространств. По определению (см. [8]) она удовлетворяет гипотезу (H), если для любого компактного множества $K \subset G_0$ существует константа $C>0$ и множество $\mathcal{P}$ линейных операторов $P: G_0+G_1 \to G_0+G_1$ таких, что $P: G_i \to G_0 \cap G_1$, $\|P\|_{G_i \to G_i} \leq C\,(i=0,1)$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется $P \in \mathcal{P}$ такой, что $\|Pa-a\|_{G_0} < \varepsilon$, $a \in K$.

Далее, если (F_i) еще одна совместная пара кв. б. пространств, то Φ_θ $(0 \leq \theta < 1)$ называется интерполяционным функтором тогда и только тогда, когда кв. б. пространства $\Phi_\theta(F_0, F_1)$ и $\Phi_\theta(G_0, G_1)$ обладают следующим свойством: для любого линейного оператора $T: F_0+F_1 \to G_0+G_1$, такого, что $T: F_i \to G_i$ непрерывно с нормой M_i $(i=0,1)$ будет $T: \Phi_\theta(F_0, F_1) \to \Phi_\theta(G_0, G_1)$ непрерывно с нормой $M \leq CM_0^{1-\theta}M_1^\theta$.

Теорема 6 (ср. [8, 9]). Пусть (F_i), (G_i) совместные пары кв. б. пространств, $\Phi_\theta(0 \leq \theta < 1)$ интерполяционный функтор, $\Phi_\theta(F_0, F_1) \in K_\theta(F_0, F_1)$ и пара (G_i) удовлетворяет гипотезу (H). Тогда, если $T: F_0 \to G_0$ линейно и компактно, $T: F_1 \to G_1$ линейно и непрерывно, то $T: \Phi_\theta(F_0, F_1) \to \Phi_\theta(G_0, G_1)$ компактно (схема доказательства указана в [8]).

Теорема 7 (ср. [10]). Если (F_i) совместная пара p-банаховых пространств; (G_i) совместная пара кв. б пространств и $T: F_i \to G_i$ линейно и компактно $(i=0, 1)$, то $T: (F_0, F_1)_{\theta r} \to (G_0, G_1)_{\theta r}$ компактно $(0<\theta<1$, $p \leq r < \infty)$.

Для доказательства отметим лишь то, что имеет смысл определение $(F_0, F_1)_{i, p}$ $(i=0, 1)$. В остальном доказательство проводится по схеме, указанной в [10].

§ 6. О КОММУТАТИВНОСТИ ФУНКТОРА „СРЕДНИХ" С ДРУГИМИ ФУНКТОРАМИ

Сначала рассмотрим функтор фактор пространства.

Теорема 1 (ср. [11]). Пусть (F_i) совместная пара p_i-банаховых пространств и $N \subset F_1 \subset F_0$ линейное подпространство, замкнутое в F_0. Тогда

(1) $$(F_0/N, F_1/N)_{\theta r} = (F_0, F_1)_{\theta r}/N, \quad 0<\theta<1, \quad 0<r \leq \infty.$$

В случае банаховых пространств эта теорема доказана Ю. И. Петуниным [11] (при $r=\infty$ лишь при некоторых дополнительных ограничениях на пару (F_i)).

Доказательство. Пусть $W(F)=\{(a_n);\ e^{(i-\theta)n}a_n \in l^r(F_i)\ (i=0, 1)\}$ и $\tau: F_i \to F_i/N$ — канонический гомоморфизм $(i=0, 1)$. Следуя Ю. И. Петунина, рассмотрим следующие отображения:

$$\varphi: W(F) \to W(F/N), \quad \varphi((a_n))=(\tau a_n),$$

$$\psi: W(F/N) \to S(F/N), \quad \psi((\tau a_n))=\sum_n \tau a_n,$$

$$\varphi_1 : S(F) \to S(F),\ \varphi_1((a_n)) = \sum_n a_n,$$

$$\psi_1 : S(F) \to S(F)\ N,\ \psi_1(a) = \pi a,$$

где $S(F) = (F_0, F_1)_{\theta r}$, $S(F\ N) = (F_0\ N,\ F_1\ N)_{\theta r}$.

Легко видеть (см. [11]), что соотношение (1) следует из

Лемма 1. Отображение φ: $W(F) \to W(F\ N)$ является линейным непрерывным, действующем на всем $W(F\ N)$.

Доказательство. Очевидно φ линейно и непрерывно. Докажем, что φ действует „на“. Пусть $(b_n) \in W(F\ N)$, т. е. $e^{(i-\theta)n} \| b_n \|_{F_i\ N} \in l^r (0<r<\infty$, $i = 0, 1)$ и $\varrho_n = e^{2\theta n}$, если $n \geq 0$, и $\varrho_n = e^{-2(1-\theta)n}$, если $n < 0$. Тогда для любого $n = 0, \pm 1, \ldots$ можно найти элементы $y_n \in F_0$, $z_n \in F_1$ такие, что $\pi y_n = \pi z_n = b_n$ и

(2) $$\| y_n \|_F \leq \| b_n \|_{F\ N} + \varrho_n, \quad \| z_n \|_F \leq \| b_n \|_{F\ N} + \varrho_n .$$

Далее, $y_n - z_n \in N$ и, следовательно, $y_n \in F_1$. Отметим, что $\| a \|_{F_0} \asymp \| a \|_{F_1}$ для любого $a \in N$ (теорема Банаха). Поэтому

(3) $$\| y_n \|_F \leq C \| z_n \|_F + C \| y_n - z_n \|_{F_1} \leq C \| b_n \|_{F\ N} + C\varrho_n + C \| y_n - z_n \|_{F_0} .$$

Так как $F_1 \subset F_0$, то $F_1\ N \subset F_0\ N$. Отсюда, из (2) и (3) получаем

(4) $$\| y_n \|_F \leq C(\| b_n \|_{F\ N} + \varrho_n), \quad \| y_n \|_F \leq \| b_n \|_{F\ N} + \varrho_n .$$

Остается заметить, что $e^{(i-\theta)n} \varrho_n \in l^r$ $(i = 0, 1)$, $0<r$

Следующая теорема выделяет класс пространств, для которых соотношение (1) имеет место без дополнительного ограничения $(F_1 \subset F_0)$ на пару (F).

Будем говорить, что $F(E)$ есть кв. н. решетка функций $f(x)$, $x \in S$, если для каждого $x \in S$ $f(x) \in E$ и $\| f_1(x) \|_E \leq \| f_2(x) \|_E$ $x \in S$ влечет $\| f_1 \|_{F(E)} \leq \| f_2 \|_{F(E)}$.

Теорема 2. Пусть $(F_i = F_i(E))$ совместна пара p_i-банаховых решеток и $N \subset F_0 \cap F_1$ линейное подпространство, замкнутое в $F_0 + F_1$. Тогда

$$(F_0\ N,\ F_1\ N)_{\theta r} = (F_0, F_1)_{\theta r}\ N,\ 0<\theta<1,\ 0<r\leq\infty .$$

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 1 лишь следующим. Если (y_n), (z_n) уже найдены, положим

$$a_n(x) = \begin{cases} y_n(x), & x \in S_n = \{x;\ \| y_n(x) \|_E \leq \| z_n(x) \|_E\}, \\ z_n(x), & x \in S \setminus S_n . \end{cases}$$

Тогда $\| a_n \|_{F_i} \leq \min(\| y_n \|_{F_i}, \| z_n \|_{F_i})$ $(i = 0, 1)$. Отсюда следует (4).

Для формулировки следующего результата необходимо знать, что такое комплексный интерполяционный функтор (см., например, [13, 14]).

Пусть (F_k) совместная пара банаховых пространств. Рассмотрим пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(F_0, F_1)$ функций f, заданных в полосе $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$ с значениями в $F_0 + F_1$ таких, что они ограничены и непрерывны в замкнутой полосе $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$, аналитичны в открытой полосе $0<\mathrm{Re}\, z<1$ и их сужения на $\mathrm{Re}\, z = k$ непрерывны и ограничены с значениями в $F_k (k=0, 1)$. Тогда комплексный функтор определяется следующим образом:

$$[F_0, F_1]_\theta = \{a \in F_0+F_1;\ a=f(\theta), \text{ где } f \in \mathcal{F}(F_0, F_1)\}.$$

Это банахово пространство относительно нормой

$$\|a\|_{[F_0, F_1]_\theta} = \inf\{\max(\sup_{-\infty<t<\infty}\|f(it)\|_{F_0}, \sup_{-\infty<t<\infty}\|f(1+it)\|_{F_1});\ f\in\mathcal{F}, f(\theta)=a\}.$$

В работе [15] Лионсом доказано следующее вложение. Если (F_i) совместная пара банаховых пространств, то

$$(5)\qquad (F_0, F_1)_{(1-\alpha)\theta_0+\alpha\theta_1, r} \subset [(F_0, F_1)_{\theta_0 r}, (F_0, F_1)_{\theta_1 r}]_\alpha$$
$$(0<\alpha<1,\ 0<\theta_0, \theta_1<1,\ 1\le r<\infty).$$

Интересно было бы доказать это вложение и для того случая, когда в правой части (5) r меняется.

Мы докажем, что имеет место обратное вложение.

Теорема 3. Если (F_i) совместная пара банаховых пространств, то

$$(6)\qquad [(F_0, F_1)_{\theta_0 r_0}, (F_0, F_1)_{\theta_1 r_1}]_\alpha \subset (F_0, F_1)_{(1-\alpha)\theta_0+\alpha\theta_1, r},$$

где $0<\alpha<1$, $0<\theta_0, \theta_1<1$, $1\le r_0, r_1\le\infty$, $1/r=(1-\alpha)/r_0+\alpha/r_1$.

Доказательство. Если $a \in$ пространству в левой части (6), то найдется функция $f\in\mathcal{F}((F_0, F_1)_{\theta_0 r_0}, (F_0, F_1)_{\theta_1 r_1})$ такая, что $a=f(\alpha)$. По формуле Коши для полосы $0\le \mathrm{Re}\, z\le 1$ имеем

$$(7)\qquad f(\sigma+i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(it)M_{0\sigma}(\tau-t)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty} f(1+it)M_{1\sigma}(\tau-t)\,dt,$$

где ядра Пуассона имеют вид

$$M_{0\sigma}(\tau)=e^{\pi\tau}\sin\pi\sigma/[\sin^2\pi\sigma+(\cos\pi\sigma-e^{\pi\tau})^2],$$
$$M_{1\sigma}(\tau)=e^{\pi\tau}\sin\pi\sigma/[\sin^2\pi\sigma+(\cos\pi\sigma+e^{\pi\tau})^2].$$

Для любого $n=0, \pm 1, \dots$ положим $g_n(z)=e^{\mu(z-\alpha)+n\lambda(z-\alpha)}\cdot f(z)$ при $\lambda=\theta_0-\theta_1$ и μ — некоторое вещественное число, которое определим впоследствии. Очевидно

$$g_n(\alpha)=f(\alpha)=a \quad\text{и}\quad g_n\in\mathcal{F}((F_0, F_1)_{\theta_0 r_0}, (F_0, F_1)_{\theta_1 r_1}).$$

Тогда из (7) следует, что $(n=0, \pm 1, \dots)$

$$a=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(it-\alpha)+n\lambda(it-\alpha)} f(it)M_{0\alpha}(-t)\,dt$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(1+it-\alpha)+n\lambda(1+it-\alpha)} f(1+it)\,M_{1\alpha}(-t)\,dt.$$

Отсюда

$$(8)\qquad K(e^n, a; F_0, F_1)\le\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\alpha-n\lambda\alpha}K(e^n, f(it); F_0, F_1)\,M_{0\alpha}(-t)\,dt$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(1-\alpha)+n\lambda(1-\alpha)}K(e^n, f(1+it); F_0, F_1)M_{1\alpha}(-t)\,dt,$$

Пусть $\theta=(1-\alpha)\theta_0+\alpha\theta_1$. Тогда $\lambda\alpha+\theta=\theta_0$, $\lambda(\alpha-1)+\theta=\theta_1$. Поэтому, из (8) имеем

$$e^{-\theta n}K(e^n, a; F_0, F_1) \cdot e^{-\mu\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta_0 n}K(e^n, f(it); F_0, F_1)M_{0\alpha}(-t)\,dt$$

$$+\,e^{\mu(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta_1 n}K(e^n, f(1+it); F_0, F_1)M_{1\alpha}(-t)\,dt,$$

короче

(9) $$e^{-\theta n}K(e^n a; F_0, F_1)\le e^{-\mu\alpha}.b+e^{\mu(1-\alpha)}.c.$$

Выберем μ: $\mu=\log\frac{b\alpha}{c(1-\alpha)}$. Положим $(1-\alpha)r=(1-\beta)r_0$, $\alpha r=\beta r_1$ и воспользуемся тем, что $\int \cdot \; l^{r_0}_{r_0} \left(\int \; l^{r}\right)^{r_0}$ Тогда из (9) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[e^{-\theta n}K(e^n, a; F_0, F_1)]^r< C^r\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta_0 n}K(e^n, f(it);\right.$$

$$\left.F_0, F_1)_{l^{r_0}} M_{0\alpha}(-t)\,dt\right)^{r(1-\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta_1 n}K(e^n, f(1+it); F_0, F_1)_{l^{r_1}} M_{1\alpha}(-t)\,dt\right)^{\alpha r},$$

$$C=\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}.$$

Отсюда

$$a\ (F_0, F_1)_{\theta r} \qquad a\ [(F_0, F_1)_{\theta_0 r_0}, (F_0, F_1)_{\theta_1 r_1}]_\alpha\,.$$

Теорема доказана.

Полученный результат можно сравнить с резуьлтатами работы Гривара [16], где рассматривается аналогичный вопрос в более общей ситуации. Однако теорема 4 вытекает из соответствующего результата в [16] лишь при некоторых дополнительных ограничениях на пару (F_i).

В заключение автор выражает благодарность М. З. Соломяку за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lions, J. L., J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. — Publications mathématiques. Institut des hautes études scientifiques, Paris, 1964, No. 19,5—68.
2. Peetre, J. Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation. — Recherche mat., 12, 1963, No. 2, 248—261.
3. Krée, P. Interpolation d'espaces vectoriels, qui ne sont ni normés, ni complets, applications. Ann. Inst. Fourier, 17, No. 2, 1968.
4. Peetre, J. A new approach in interpolation spaces. — Studia math., 34, 1970, No. 1,23—42.
5. Bernstein, C. A., N. L. Kerzman. Sur la réitération dans les espaces de moyenne. — C. R. Acad. Sci., 263, 1966, A609—A612.

6. Holmstedt, T. Interpolation d'espaces quasi-normés. — Math. Scand., **26**, 1970, No. 1.
7. Головкин, К. К. Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы. — Тр. Мат. инст. АН СССР, **106**, 1969, **1**, 137.
8. Persson, A. Compact linear mappings between interpolation spaces. — Arkiv. mat., **5**, 1963, No. 3, 215—219.
9. Красносельский, М. А. Об одной теореме М. Рисса. — ДАН СССР, **131**, 1960, № 2, 246—248.
10. Hayakawa, K. Interpolation by the real methode preserves compactness of operators. — J. of Math. Soc. Japan, **21**, 1969, No. 2, 189—199.
11. Петунин, Ю. И. Проблема интерполяции между фактор-пространствами. — Укр. матем. ж., **23**, 1971, № 2, 157—167.
12. Караджов, Г. Е. О принадлежности интегральных операторов классам S_p при $p>2$. — Пробл. мат. анал., ЛГУ, 1972.
13. Кальдерон, А. П. Промежуточные пространства и интерполяция. Комплексный метод. — Сб. Математика, **9**, 1965, № 3, 57—129.
14. Крейн, С. Г., Ю. И. Петунин. Шкалы банаховых пространств — Успехи матем наук, **21**, 1966, № 2, 89—168.
15. Lions, J. L. Une propriété de stabilité pour des espaces d'interpolation, application. — C. R. Acad. Sci., Paris, **256**, 1963, No. 4.
16. Grisvard, P. Commutativité de deux founcteurs d'interpolation et applications. J. math. pure et appl., **45**, 1966, No. 2, 143—206.
17. Караджов, Г Е. Об интерполяционном методе „средних" для квазинормированных пространств. — Докл. АН СССР, **209**, 1973, № 1

Поступила 11. X. 1972 г.

ОТНОСНО ИНТЕРПОЛАЦИОННИЯ МЕТОД НА „СРЕДНИТЕ" ЗА КВАЗИНОРМИРАНИТЕ ПРОСТРАНСТВА

Георги Караджов

(Резюме)

В работата са изложени резултати, свързани с изучаването на интерполационните свойства на един клас квазинормирани пространства. За нормираните пространства Лионс и Питре са въвели K- и J-методи на „средните". В работите на Крее, Питре и Холмщед K-методът (дискретен и недискретен) се пренася върху случая на квазинормираните пространства. Дискретният J-метод не се обобщава. Това е свързано с липсата на свойството субадитивност (квазинормата е само квазисубадитивна). От друга страна, за голяма част важни квазинормирани пространства известна положителна степен на квазинормата е субадитивна. Това позволява да се обобщи дискретният J-метод върху случая на такива пространства. При това се запазват всички понятия и теореми (с изключение на идеята за двойнственост), установени за нормираните пространства.

Дават се също така няколко резултата за комутативност, които дори в случая на банахови пространства не се покриват с известните отпреди резултати.

ABOUT THE INTERPOLATION METHOD OF „THE MEANS“ FOR QUASINORMED SPACES

Georgi Karadžov

(Summary)

In the paper the results obtained at the study of the interpolation properties of a class of quasinormed spaces are discussed. For normed spaces Lions and Pietre have introduced the *K*- and *J*-methods of „the means“. In the papers of Krée, Peetre and Holmstedt the *K*-method (discrete and nondescrete) is carried over onto the case of quasinormed spaces. The discrete *J*-method is not generalized. This is in connection with the lack of property of additivity (the quasinorm is quasiadditive only). On the other hand, however, for a large number of important quasinormed spaces a certain positive degree of the quasinorm is additive. This allows for generalization of the discrete *J*-method in the case of such spaces, all the ideas and theorems (except for the idea of duality) established for the normed spaces being preserved.

Some results about commutativity are also given, which do not coincide, even in the case of a Banach space, with the results previously known.