БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

Петр Г. Бояджиев

1. Пусть E — компакт в комплексной плоскости C, дополнение которого $G = \bar{C} \setminus E$ до расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ связно и регулярно в том смысле, что существует функция Грина $g(z, \infty)$ с полюсом в ∞, непрерывная в $\bar{G} \setminus \{\infty\}$ и гармоническая в G.

Обозначим через $A(E)$ класс функций, аналитических на $E: f(z) \in A(E)$, если существует открытое множество $\Omega_f \supset E$ такое, что $f(z)$ аналитична в Ω_f.

Для $f(z) \in A(E)$ положим

$$\|f\|_E = \max_{z \in E} |f(z)|.$$

Пусть $a = \{a_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — таблица точек, принадлежащих E. Если $f(z) \in A(E)$, то через $p_n(z, f, a)$ обозначим полином степени $n-1$ интерполирующий $f(z)$ в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$. Хорошо известна следующая теорема ([1, стр. 199]): Для того, чтобы для любой $f(z) \in A(E)$ имело место соотношение

$$\|f(z) - p_n(z, f, a)\|_E \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\lim_{n \to \infty} \left| \prod_{k=1}^{n} (z - a_{nk}) \right|^{\frac{1}{n}} = c(E) e^{g(z, \infty)}$$

выполнялось равномерно внутри G; здесь $c(E)$ означает логарифмическую емкость компакта E.

2. Рассмотрим сейчас следующую более общую задачу. Пусть E — компакт в расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ со связным дополнением. Предположим, что для любой $\zeta \in G = \bar{C} \setminus E$ в области G существует функция Грина $g(z, \zeta)$ с полюсом в ζ, непрерывная в $\bar{G} \setminus \{\zeta\}$ (такие компакты E будем называть регулярными).

Множество всех треугольных таблиц $a = \{a_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $a_{nk} \in E$, обозначим через $\mathcal{A}$; множество треугольных таблиц $\beta = \{b_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких, что расстояние

$$d(E, \beta)= \inf_{\zeta \in E,\, b_{nk} \in \beta} |\zeta - b_{nk}|,$$

положительно, обозначим через $\mathcal{B}$.

Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ — произвольны. Пару (α, β) будем называть интерполяционным процессом для класса $A(E)$. Если $f(z) \in A(E)$, то через $r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ будем обозначать рациональную функцию вида

$$r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)=\frac{c_0+c_1 z+\dots+c_{n-1}z^{n-1}}{(z-b_{n1})\cdot(z-b_{n2})\dots(z-b_{n,n-1})},$$

интерполирующую $f(z)$ в точках $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$. При этом имеется ввиду кратное интерполирование: если точка a встречается среди точек $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$ μ раз, то $f^{(\nu)}(a)=r_{n-1}^{(\nu)}(a, f, \alpha, \beta)$, $\nu=0, 1, 2, \dots, \mu-1$, где $f^{(\nu)}(z)$ обозначает ν-ую производную функции $f(z)$. Хорошо известно, что $r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ существует и единственна.

Целью настоящей статьи является следующая задача: дать полную характеристику тех интерполяционных процессов (α, β), $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$, для которых равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|f(z)-r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)\|_E=0$$

имеет место для любой $f(z) \in A(E)$.

3. Отметим сначала следующее простое утверждение.

Лемма. Пусть $E \subset \bar{C}$ регулярный компакт со связным дополнением и F — компакт, содержащийся в $G=\bar{C}\setminus E$. Тогда

а) для любого компакта $K \subset G\setminus F$ найдется число $\delta=\delta(K)>0$ такое, что

$$g(z, \zeta)\geq\delta,\quad z\in K,\quad \zeta\in F;$$

б) для любого $\varepsilon>0$ найдется открытое множество $D=D(\varepsilon)$, состоящее из конечного числа компонент, такое, что 1) $\overline{D}\cap F=\varnothing$; 2) $D\supset E$; 3) для любых $\zeta\in F$ и $z\in\overline{D\cap G}$ $g(z, \zeta)\leq\varepsilon$ (здесь, как и везде в этой статье, через $\overline{S}$ обозначено замыкание S в $\bar{C}$).

Доказательство

а) Допустим, что а) не верно. Тогда для любого натурального n найдутся точки $z_n\in K$ и $\zeta_n\in F$, что

$$(1)\qquad g(z_n, \zeta_n) < \frac{1}{n}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $z_n\to z_0\in K$ и $\zeta_n\to\zeta_0\in F$ при $n\to\infty$. Но из $\zeta_n\to\zeta_0$ вытекает, что $g(z, \zeta_n)\to g(z, \zeta_0)$ равномерно внутри $G\setminus\{\zeta_0\}$; следовательно, $g(z_n, \zeta_n)\to g(z_0, \zeta_0)>0$, что противоречит (1).

б) Пусть $t_0\in F$ фиксирована. Если $R>0$, то через D_R обозначим открытое множество $D_R=E\cup\{z: g(z, t_0)<R\}$. Ясно, что при достаточно малом R D_R удовлетворяет условиям 1) и 2) утверждения б) леммы. Покажем, что найдется R_ε такое, что при $R<R_\varepsilon$ D_R удовлетворяет и условию 3). Допустим, что это не так. Тогда для любого натурального n найдутся точки $\zeta_n\in F$ и $z_n\in\overline{G\cap D_{\frac{1}{n}}}$, что $g(z_n, \zeta_n)\geq\varepsilon$. Так как F компакт, мы можем

предполагать, что $\zeta_n \to \zeta_0 \in F$. Кроме того, ввиду регулярности E все предельные точки последовательности $\{z_n\}$ принадлежат ∂E; следовательно, без ограничения общности, можем предполагать, что $z_n \to z_0 \in \partial E$.

Возьмем число N настолько большим, что $\overline{D}_{\frac{1}{N}} \cap F = \varnothing$. Тогда, поскольку $\zeta_n \to \zeta_0$, имеем $g(z, \zeta_n) \rightrightarrows g(z, \zeta_0)$, $z \in \partial D_{\frac{1}{N}}$. Кроме того, при $z \in \partial E$, $g(z, \zeta_n) = 0$ при любом n. Таким образом, $g(z, \zeta_n) \rightrightarrows g(z, \xi_0)$, $z \in \partial E \cup \partial D_{\frac{1}{N}} = \partial(G \cap D_{\frac{1}{N}})$. По принципу максимума $g(z, \zeta_n) \rightrightarrows g(z, \zeta_0)$, $z \in \overline{G \cap D_{\frac{1}{N}}}$. Но тогда $g(z_n, \zeta_n) \to g(z_0, \zeta_0) = 0$, что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

4. Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи.

Теорема. Пусть $\alpha \in \mathcal{C}$ и $\beta \in \mathcal{B}$ — произвольные. Для того, чтобы равенство

$$\lim_{n} \| f(z) - r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta) \|_E = 0$$

имело место для любой функции $f(z) \in A(E)$, необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\lim_{n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \left| \frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}} \cdot \frac{t-b_{nk}}{t-a_{nk}} \right| - g(z, b_{nk}) + g(t, b_{nk}) \right\} = 0^{*} \tag{2}$$

выполнялось равномерно внутри $G \times G$ ($G = C \setminus E$).

Доказательство

Достаточность. Так как $\beta \in \mathcal{B}$, то существует компакт F, лежащий в G, который содержит β.

Пусть $f(z) \in A(E)$ и H конечносвязная область со спрямляемой границей, содержащая E, лежащая в Ω_f вместе со своей границей не пересекающаяся с F. Тогда $\partial H \subset G \setminus F$, и по лемме найдется число $\delta = \delta(\partial H) > 0$, такое, что $g(t, \zeta) > \delta$ для любых $t \in \partial H$ и $\zeta \in F$. Тем самым для любых $n = 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots, n$

$$g(t, b_{nk}) > \delta, \quad t \in \partial H. \tag{3}$$

Пусть ε, $0 < \varepsilon < \delta$ — произвольное, фиксированное число. Пусть $D = D(\varepsilon)$ — открытое множество, удовлетворяющее условию б) леммы; тем самым

$$g(z, \zeta) < \varepsilon, \quad z \in \partial D, \ \zeta \in F. \tag{4}$$

Из (3) и (4) для $z \in \partial D$ и $t \in \partial H$ имеем

$$\exp\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [g(z, b_{nk}) - g(t, b_{nk})] \right\} \leq e^{\varepsilon - \delta}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Пусть $\eta > 0$ такое, что $\varepsilon + \eta < \delta$. Положим

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_{nk}}{z - b_{nk}}$$

---

* В случае, когда некоторое $a_{nk}(b_{nk})$ равно ∞, соответствующее слагаемое в (2) надо заменить его пределом при $a_{nk} \to \infty$ ($b_{nk} \to \infty$).

Тогда из условия (2) заключаем, что существует число N, зависящее от η, ∂H и ∂D, такое, что при $n>N$, $z\in\partial D$ и $t\in\partial H$ имеет место неравенство

$$(6)\qquad \left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\eta+\varepsilon-\delta}.$$

По интерполяционной формуле Уолша — Эрмита ([1], стр. 228) имеем

$$(7)\qquad f(z)-r_{n-1}(z, f, a, \delta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial H}\frac{f(t)}{t-z}\,\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\cdot\frac{z-b_{nn}}{t-b_{nn}}\,dt, \quad z\in H.$$

Из (7) на основании (6) и принципа максимума получаем

$$(8)\qquad \|f-r_{n-1}\|_E^{\frac{1}{n}}\leq \|f-r_{n-1}\|_{\partial D}^{\frac{1}{n}} < M^n\cdot e^{\eta+\varepsilon-\delta},$$

где M — абсолютная постоянная, не зависящая от n. Из (8), ввиду того, что $\eta+\varepsilon-\delta<0$, следует, что

$$r_{n-1}(z, f, a, \beta)\rightrightarrows f(z), \quad z\in E$$

даже со „скоростью“ геометрической прогрессии со знаменателем $e^{\eta+\varepsilon-\delta}$.

Необходимость. Так как условие (2) инвариантно относительно преобразования $z'=\frac{1}{z-z_0}$, $z_0\in G$, то без ограничения общности можем считать, что E ограниченный компакт. Покажем, что в этом случае условие (2) эквивалентно следующему условию:

равенство

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left|\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}\right|+g(\infty, b_{nk})-g(z, b_{nk})\right]\right\}=0$$

выполняется равномерно внутри G (если $b_{nk}=\infty$ для некоторого nk, то слагаемое $g(\infty, b_{nk})+\ln\left|\frac{1}{z-b_{nk}}\right|$ надо заменить его пределом при $b_{nk}\to\infty$, т. е. числом e^{γ}, где γ постоянная Робена для компакта E). Действительно, что из (2) вытекает (9), очевидно (в (2) надо просто положить $t=\infty$). Обратно, пусть (9) имеет место. Заменяя в (9) z на t и вычитая, получим, что из (9) вытекает (2) для компактов $K\subset(C\setminus E)\times(C\setminus E)$ вида $K=S\times T$, где S и T компакты, принадлежащие $C\setminus E$. Но компактами такого вида можно покрыть любой компакт $K\subset(C\setminus E)\times(\bar{C}\setminus E)$, так что из (9) вытекает (2).

Таким образом, нам надо доказать (9).

Последовательность гармонических в $G=C\setminus E$ функций

$$F_n(z)=\varphi_n(z)-\psi_n(z),$$

где

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\ln\left|\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}\right|+g(\infty, b_{nk})\right\},$$

$$\psi_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(z, b_{nk}),$$

равномерно ограничена внутри G. Действительно, функции $\psi_n(z)$ и $\varphi_n(z)$ равномерно ограничены внутри $G\setminus F$ (см. лемму) и равномерная ограниченность $F_n(z)$ вытекает из принципа максимума. Таким образом $\{F_n(z)\}$ нормальное семейство гармонических в G функций. Наше утверждение будет доказано, если покажем, что для любой предельной функции $\theta(z)$ последовательности $\{F_n(z)\}$ (в смысле равномерной сходимости внутри G) имеет место тождество $\theta(z)=0$, $z\in G$.

Итак, не ограничивая общность, будем считать, что $F_n(z)\rightrightarrows\theta(z)$ внутри G. Поскольку $F_n(\infty)=0$ для любого n, то $\theta(\infty)=0$. По принципу максимума имеем

$$(10)\qquad \inf_{\zeta\in\partial E}\ \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in G}}\theta(z)\leq 0.$$

С другой стороны, так как последовательности $\{\varphi_n(z)\}$ и $\{\psi_n(z)\}$ нормальные семейства гармонических в $G\setminus F$ функций, то существует подпоследовательность $\{n_k\}$ и гармонические в $G\setminus F$ функции $v(z)$ и $w(z)$ такие, что имеют место соотношения

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\varphi_{n_k}(z)\rightrightarrows v(z),\\ &\psi_{n_k}(z)\rightrightarrows w(z)\ \text{внутри}\ G\setminus F\end{aligned}$$

и

$$(12)\qquad \theta(z)=v(z)-w(z),\quad z\in G\setminus F.$$

Функции $\psi_n(z)$ непрерывны в $G\setminus F$ для любого n и $\psi_n(z)=0$, $z\in\partial E$; из (11) и принципа максимума таким образом следует, что $w(z)=0$ для $z\in\partial E$. Но тогда из (10) и (12) вытекает

$$(13)\qquad \inf_{\zeta\in\partial E}\ \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in G}}\theta(z)=\inf_{\zeta\in\partial E}\ \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in G}}v(z)-0\geq 0.$$

Воспользуемся сейчас условием теоремы. Пусть $t\in G\setminus F$. Функция $f(z)=\frac{1}{z-t}\in A(E)$. По известной интерполяционной формуле имеем

$$(14)\qquad \frac{1}{z-t}-r_{n-1}(z)=\frac{1}{z-t}\,\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\cdot\frac{z-b_{nn}}{t-b_{nn}},$$

где

$$r_{n-1}(z)=r_{n-1}\left(z,\frac{1}{z-t},\alpha,\beta\right),\quad \omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}.$$

Из (14) очевидно, что найдется постоянная $a(t)>0$, такая, что

$$(15)\qquad \left\|\frac{1}{z-t}-r_n(z)\right\|_E\geq a(t)\,\frac{\|\omega_n(z)\|_E}{|\omega_n(t)|}.$$

Так как по предположению $\left\|\frac{1}{z-t}-r_{n-1}(z)\right\|_E\to 0$, то из (15) получаем

$$(16)\qquad \frac{\|\omega_n(z)\|_E}{|\omega_n(t)|}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Но из определения функции $\varphi_n(z)$ имеем

$$\left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right| = \frac{e^{n\varphi_n(z)}}{e^{n\varphi_n(t)}},$$

откуда вытекает

$$\frac{\| \omega_n(z) \|_E}{| \omega_n(t) |} = \exp \{n [\max_{z \in E} \varphi_n (z) - \varphi_n (t)]\}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что при $n > N(t)$ имеем

$$\max_{z \in E} \varphi_n (z) \quad \varphi_n (t). \tag{18}$$

Заменяя в этом неравенстве n на n_k (см. (11)), получим

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \max_{z \in E} \varphi_{n_k}(z) \cdot \ v(t) \tag{19}$$

для любого $t \in G \setminus F$.

Так как, с другой стороны, $F_{n_k}(\quad) = 0$, то

$$\max_{z \in E} F_{n_k}(z) \geq 0.$$

Но $\psi_n (z) = 0$, $z \in \partial E$, для любого n, так что

$$\max_{z \in E} \varphi_{n_k}(z) \geqq \max_{z \in \partial E} \varphi_{n_k}(z) = \max_{z \in \partial E} F_{n_k}(z) \geqq 0. \tag{20}$$

(19) и (20) дают

$$v(t) \quad 0, \ t \in G \setminus F,$$

откуда следует

$$\inf_{\zeta \in \partial E} \overline{\lim_{\substack{t \to \zeta \\ t \in G \setminus F}}} v(t) \quad 0. \tag{21}$$

Из (20), (21) и принципа максимума заключаем, что $\theta(z) \leq 0$, $z \in G$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (9) (в другой форме) впервые появилось в работе Шеня [2] в связи с проблемами интерполяции и аппроксимации аналитических функций рациональными с фиксированной таблицей полюсов.

Замечание 2. В случае, когда $b_{nk} =$ и E — ограниченный компакт, доказанная теорема совпадает с упомянутой в п. 1 теоремой о полиномиальной интерполяции.

Автору приятно поблагодарить профессора Московского государственного университета А. А. Гончара за постановку задачи и внимание во время работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш, Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., 1961.

2. Shen, Y. C., On interpolation and approximation by rational functions with preassigned poles. — J. Chin. Math. Soc., 1, 1936, 154—173.

Поступила 5. XII. 1972 г.

ВЪРХУ ИНТЕРПОЛАЦИЯТА НА АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ С РАЦИОНАЛНИ

Петър Бояджиев

(Резюме)

Нека $E \subset C$ е регулярен компакт със свързано допълнение и $A(E)$ е класът на функциите, аналитични и еднозначни на E. Нека $\mathcal{A}$ е класът на всички таблици $\alpha = \{a_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ от комплексни числа, принадлежащи на E, и $\mathcal{B}$ — класът на всички таблици $\beta = \{b_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ от комплексни числа, принадлежащи на $\bar{C} \setminus E$ и такива, че $\rho(\beta, E) = \inf\limits_{\zeta \in \beta,\, z \in E} |\zeta - z| > 0$.

В работата се дават условия за $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\beta \in \mathcal{B}$, необходими и достатъчни, за да бъде изпълнено равенството

$$\lim_{n \to \infty} \| f - r_{n-1} \|_E = 0$$

за всяка $f \in A(E)$. Тук $r_{n-1} = r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ е рационална функция от ред $\leq n-1$, имаща полюси в $b_{n1}, \ldots, b_{n,n-1}$ и интерполираща $f(z)$ в точките $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$, $\|\varphi\|_E = \max\limits_{z \in E} |\varphi(z)|$. Доказана е следната

Теорема. Нека $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\beta \in \mathcal{B}$ са произволни. За да бъде равенството

$$\lim_{n \to \infty} \| f - r_{n-1} \|_E = 0$$

вярно за всяка $f \in A(E)$, е необходимо и достатъчно равенството

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \ln \left| \frac{z - a_{nk}}{z - b_{nk}} \cdot \frac{t - b_{nk}}{t - a_{nk}} \right| - g(z, b_{nk}) - g(t, b_{nk}) \right| \right\} = 0$$

да бъде вярно почти равномерно в $\bar{C} \setminus E \times \bar{C} \setminus E$.

ON THE INTERPOLATION OF ANALYTIC FUNCTIONS BY RATIONAL ONES

Petăr Bojadžiev

(Summary)

Let $E \subset C$ be a regular compact set with connected complement and $A(E)$ be the class of the analytic functions on E. Let $\mathcal{A}$ be the class of all tables $\alpha = \{a_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ of complex numbers belong-

ing to E, and $\mathcal{B}$ — the class of all the tables $\beta=\{b_{nk}\}$, $n=1, 2, \ldots$, $k=1, 2, \ldots, n$, of complex numbers belonging to $\bar{C}\setminus E$ and such that

$$\varrho(\beta, E)=\inf_{\zeta\in\beta,\, z\in E}|\zeta-z|>0.$$

In the paper necessary and sufficient conditions for $\alpha\in A$ and $\beta\in B$ are given, that the equality

$$\lim_{n\to\infty}\|f-r_{n-1}\|_E=0$$

should hold for any $f\in A(E)$. Here $r_{n-1}=r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ is a rational function of order $\leq n-1$, having poles in $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,n-1}$ and interpolating $f(z)$ in the points $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$,

$$\|\varphi\|_E=\max_{z\in E}|\varphi(z)|$$

The following theorem is proved:

Theorem. Let $\alpha\in\mathcal{A}$ and $\beta\in\mathcal{B}$ be arbitrary. That the equality

$$\lim_{n\to\infty}\|f-r_{n-1}\|_E=0$$

should hold for any $f\in A(E)$, it is necessary and sufficient the equality

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}}\cdot\frac{t-b_{nk}}{t-a_{nk}}-g(z, b_{nk})+g(t, b_{nk})\right]\right\}=0$$

to hold almost uniformly in $\bar{C}\setminus E\times\bar{C}\setminus E$.