БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Валентин В. Мосягин

Настоящая работа посвящена изучению некоторых вопросов теории нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В частности, доказывается теорема существования и единственности решения начальной задачи для дифференциального уравнения

$$(*)\qquad \frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f[t,x(t),x(t-\Delta(t))]$$

в локально выпуклом линейном топологическом пространстве. В случае, когда уравнение (*) не содержит оператора A, указываются условия ограниченности решений на полуоси R^+.

1. В локально выпуклом пространстве E [1] рассмотрим начальную задачу

$$(1.1)\qquad \frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f[t,x(t),x(t-\Delta(t))]\quad (0\quad t\quad t_0)$$

$$(1.2)\qquad x(t)=\varphi(t)\ \text{при}\ -\Delta_0\leqq t\leqq 0,$$

где $x(t)$ — искомая функция со значениями в E; $\Delta(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0,t_0]$, причем $0\quad \Delta(t)\leqq\Delta_0$; начальная функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[-\Delta_0, 0]$; A — действующий в E линейный оператор, непрерывность которого не предполагается; нелинейный оператор f непрерывно действует из $[0,t_0]\times E\times E$ в E. Подобная задача в случае банахова пространства изучалась в ряде работ (например [2], [8]). Используя теорию полугрупп операторов в локально выпуклых пространствах [4] и разультаты работы [5], укажем достаточные условия разрешимости задачи (1.1) — (1.2).

2. Пусть E — секвенциально полное локально выпуклое пространство, $\mathcal{P}=\{p\}$ — некоторая достаточная система непрерывных полунорм на E; $L(E,E)$ — пространство линейных непрерывных операторов из E в E.

Говорят, что в E определена равностепенно непрерывная полугруппа операторов класса (C_0), если задано однопараметрическое семейство операторов $\{T_t\}$ $(t\geqq 0;\ T_t\in L(E,E))$, для которых выполнены условия:

1) $T_t T_s = T_{t+s}$, $T_0 = I$;

2) $T_t x \to T_{t_0} x$ при $t \to t_0$ для всех $t_0 \geq 0$ и $x \in E$;

3) семейство $\{T_t\}$ равностепенно непрерывно, то есть для всякой непрерывной полунормы $p \in \mathcal{P}$ существует непрерывная полунорма $q \in \mathcal{P}$ такая, что $p(T_t x) \leq q(x)$ для всех $t \geq 0$ и $x \in E$.

Инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы $\{T_t\}$ определяется как предел

$$(2.1) \qquad Ax = \lim_{h \to \infty} h^{-1}[(T_h - I)x].$$

Оператор A при этом оказывается линейным замкнутым оператором с областью определения $D(A)$, плотной в пространстве E.

Важным классом полугрупп являются голоморфные полугруппы операторов $\{T_t\}$, которые как функции параметра t могут быть голоморфно продолжены на некоторый сектор комплексной плоскости, содержащей полуось $t \geq 0$ [4].

3. Ниже будут использованы некоторые результаты работы [5], в которой рассмотрены следующие начальные задачи:

$$(3.1) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \; x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq t_0;$$

$$(3.2) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \; x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

При этом функция $x(t)$ со значениями в локально выпуклом пространстве E называется решением задачи (3.1), если: а) $x(t)$ непрерывна на $[0, t_0]$ и удовлетворяет условию $x(0) = x_0$; б) $\frac{dx(t)}{dt}$ и $Ax(t)$ непрерывны на $[0, t_0]$; в) $x(t)$ удовлетворяет на $(0, t_0]$ дифференциальному уравнению (3.1),

В [5] доказано, что если $x(t)$ — решение задачи (3.1), где A — инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0) в E, то для $x(t)$ справедлива формула

$$(3.3) \qquad x(t) = T_t x_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds.$$

Из этого утверждения вытекает, что решение задачи (3.1), при указанных условиях для A, единственно, если оно существует.

В [5] доказано также следующее предложение.

Лемма 3.1. Пусть A — инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной голоморфной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0) в E. Пусть $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера: для каждого $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathcal{P}$ найдется $C_p(\varepsilon) > 0$, что

$$(3.4) \qquad p[f(t) - f(\tau)] \leq C_p(\varepsilon) |t - \tau|^{\delta} \quad (\tau, t \in [\varepsilon, t_0]; \; \delta \in (0, 1]).$$

Тогда задача (3.1) имеет решение.

Функция $x(t)$ называется решением нелинейной задачи (3.2), если $x(t)$ есть решение задачи (3.1) для линейного неоднородного уравнения с правой частью $f(t) = f[t, x(t)]$. Существование и единственность обобщенного и обычного решения задачи (3.2) устанавливают теоремы 3 и 4 работы [5].

4. Вернемся к задаче (1.1) — (1.2). Функцию $x(t)$, $t \in [-\Delta_0, t_0]$ назовем решением задачи (1.1) — (1.2), если $x(t) = \varphi(t)$ при $-\Delta_0 \leq t \leq 0$, а на отрезке $[0, t_0]$ является решением задачи (3.1) для линейного неоднородного уравнения с правой частью $f(t) = f[t, x(t), x(t-(t))]$ и начальным условием $x(0) = \varphi(0)$.

Пусть A — инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0). Из определения решения задачи (1.1) — (1.2) и результатов заметки [5] вытекает, что любое решение $x(t)$ задачи (1.1) — (1.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$(4.1) \qquad x(t) = T_t\varphi(0) + \int_0^t T_{t-s} f[s, x(s), x(s - 1(s))]\, ds$$

с тем же начальным условием (1.2).

Решения уравнения (4.1) с начальным условием (1.2), для которых функция $f(t) = f[t, x(t), x(t - 1(t))]$ непрерывна на $[0, t_0]$, назовем обобщенными решениями задачи (1.1) — (1.2). Согласно лемме 3,1, обобщенное решение задачи (1.1) — (1.2) будет ее обычным решением, если функция $f(t) = f[t, x(t), x(t - 1(t))]$ удовлетворяет условию Гельдера, а полугруппа $\{T_t\}$ голоморфна.

Равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса (C_0) назовем правильной, если $p(T_t x) \leq Mp(x)$ для всех $t > 0$, $x \in E$ и $p \in \mathcal{P}$.

Теорема 4.1. Пусть $\{T_t\}$ — равностепенно непрерывная правильная полугруппа класса (C_0) в E. Пусть при всяких $(x, y) \in E \times E$ функция $f(t, x, y)$ непрерывна по t на $[0, t_0]$. Пусть для некоторого множества $U_R \times U_R$, где

$$U_R = U_R\{x : p_i(x) \leq R;\ i = 1, 2, \ldots, k;\ p_i \in \mathcal{P}\},$$

существует такая постоянная $C(R) > 0$, что

$$(4.2) \qquad p(f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)) \leq C(R)(p(x_1 - x_2) + p(y_1 - y_2))$$
$$(t \in [0, t_0];\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U_R \times U_R;\ p \in \mathcal{P}).$$

Тогда существует единственное непрерывное решение $x(t)$ уравнения (4.1), определенное на некотором отрезке $[0, t_1] \subset [0, t_0]$ и равное $\varphi(t)$ на $[-\Delta_0, 0]$. Функция $x(t)$ будет единственным обобщенным решением задачи (1.1) — (1.2) на $[0, t_1]$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\tilde{E}$ непрерывных на $[-\Delta_0, t_1] \subset [-\Delta_0, t_0]$ функций $\{\tilde{x} = x(t)\}$ со значениями в E и совпадающих на $[-\Delta_0, 0]$ с заданной функцией $\varphi(t)$. Эта совокупность является полным локально выпуклым пространством с достаточным множеством полунорм $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}\}$, где

$$(4.3) \qquad \tilde{p}(\tilde{x}) = \sup_{t \in [-\Delta_0, t_1]} p[x(t)],\quad p \in \mathcal{P}.$$

Рассмотрим в $\tilde{E}$ оператор B, определенный правой частью уравнения (4.1) с начальным условием (1.2):

$$(4.4)\qquad B\tilde{x}=\begin{cases}\varphi(t) & \text{при } -\Delta_0\leq t\leq 0,\\ T_t\varphi(0)+\int\limits_0^t T_{t-s}f[s, x(s), x(s-\Delta(s))]ds & \text{при } 0\leq t\leq t_1.\end{cases}$$

Оператор B действует в пространстве $\tilde{E}$. Из условия (4.2) следует, что окрестность

$$\tilde{U}_R=\tilde{U}_R\{\tilde{x}:\tilde{p}_i(\tilde{x})\leq R;\ i=1, 2, \ldots, k\}$$

этот оператор переводит в себя, если

$$R>Mp_i(\varphi(0)),\quad \sup_{-\Delta_0\leq t\leq 0} p_i(\varphi(t))\leq R$$

и

$$(4.5)\qquad t_1M(2R\,.\,C(R)+\sup_{0\leq t\leq t_1} p_i(f[t, \theta, \theta]))\leq R-Mp_i(\varphi(0)).$$

Кроме того, для $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2\in\tilde{U}_R$ и $\tilde{p}\in\tilde{\mathcal{P}}$

$$(4.6)\qquad \tilde{p}(B\tilde{x}_1-B\tilde{x}_2)\leq 2t_1MC(R)\,p(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2);$$

поэтому при $2t_1MC(R)<1$ оператор $B\tilde{x}$ — сжимающий. Следовательно, уравнение $\tilde{x}=B\tilde{x}$ имеет в $\tilde{u}_R$ единственное решение задачи. Это решение $\tilde{x}=x(t)$ будет обобщенным решением задачи (1.1) — (1.2). А так как всякое обобщенное решение задачи (1.1) — (1.2) есть непрерывное решение уравнения (4.1) с начальным условием (1.2), то задача (1.1) — (1.2) имеет единственное обобщенное решение.

Видно, что при условии $2t_0MC(R)<1$ обобщенное решение задачи (1.1) — (1.2) будет определено на отрезке $[0, t_0]$.

Теорема доказана полностью.

5. Для доказательства существования обычного решения задачи (1.1) — (1.2) нам потребуется следующая лемма о функции

$$(5.1)\qquad Q(t)=\int\limits_0^t T_{t-s}f(s)\,ds.$$

Лемма 5.1. Пусть $\{T_t\}$ — равностепенно непрерывная голоморфная полугруппа класса (C_0) в E. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0, t_0]$. Тогда для функции $Q(t)$ (5.1) справедливо неравенство

$$(5.2)\qquad p(Q(t)-Q(\tau))\leq C(t-\tau)(1+|\ln(t-\tau)|)\max_{0\leq s\leq t} q[f(s)]$$

$$(t\geq\tau;\quad p, q\in\mathcal{P}).$$

Доказательство леммы 5.1 в случае локально выпуклого пространства E дано в заметке [5]. В случае банахова пространства подобная лемма доказана в книге [3].

Теорема 5.1. Пусть A — инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной голоморфной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0) в E. Пусть для каждой полунормы $p\in\mathcal{P}$ существует такая полунорма $q\in\mathcal{P}$, что

$$(5.3)\qquad p[f(t_1, x_1, y_1)-f(t_2, x_2, y_2)]$$

$$\leq C_p(R,\varepsilon)\{|t_1-t_2|^{\delta_1}+[q(x_1-x_2)]^{\delta_2}+[q(y_1-y_2)]^{\delta_2}\}$$
$$(t_1, t_2\in[\varepsilon, t_0];\ \delta_1, \delta_2\in(0,1];\ (x_1, y_1), (x_2, y_2)\in(U_R\times U_R).$$

Пусть, наконец, функция запаздывания $\tau(t)$ удовлетворяет условию Гельдера

(5.4)
$$|\tau(t)-\tau(t')|\leq\nu|t-t'|$$
$$(\nu>0,\quad t,\ t'\in[\varepsilon, t_0]).$$

Тогда всякое обобщенное решение задачи (1.1) — (1.2) будет ее обычным решением.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — обобщенное решение задачи (1.1) — (1.2). Из леммы 5.1 следует, что функция $x(t)$ удовлетворяет при $t>0$ условию Гельдера с любым показателем, меньшим чем 1; отсюда и из условия (5.4) следует, что и функция $g(t)=x(t-\tau(t))$ удовлетворяет при $t>0$ условию Гельдера с любым показателем, меньшим чем 1. Учитывая, далее, условие (5.3), приходим к выводу, что $f[t, x(t), x(t-\tau(t))]$ при $t>0$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем, меньшим чем $\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Поэтому $x(t)$ является обычным решением задачи (1.1) — (1.2).

Теорема доказана.

6. Пусть X — полное локально выпуклое пространство, $\mathcal{P}=\{p\}$ — достаточная система непрерывных полунорм в X. Пусть Z — вещественное полное локально выпуклое пространство, $\mathcal{N}=\{q\}$ — достаточная система непрерывных полунорм в Z; пусть K — конус, с помощью которого в Z введена полуупорядоченность [9].

Пусть в X задана операция умножения $z=xy$, $\forall x, y\in X$, линейная по каждой переменной, со значениями произведения в Z. Пусть умножение и полунормы обладают следующими свойствами:

i) для каждой полунормы $q\in\mathcal{N}$ найдется такая полунорма $p\in\mathcal{P}$, что

(6.1) $$q(xy)\leq p(x)p(y),\quad q(x^2)=[p(x)]^2,\quad x^2\geq\theta_z,\quad \forall x, y\in X,$$

где θ_z — нулевой элемент пространства Z;

ii) полунормы q, $q\in\mathcal{N}$, монотонны на конусе K пространства Z: из $z_2\geq z_1\geq\theta_z$ вытекает

(6.2) $$q(z_2)\geq q(z_1)$$

для любой полунормы $q\in\mathcal{N}$.

Следуя Р. И. Качуровскому, пару пространств X, Z, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, будем называть допустимой парой. Понятие допустимой пары банаховых пространств введено Р. И. Качуровским в работе [7].

Пусть (X, Z) — допустимая пара пространств. Рассмотрим в X начальную задачу

(6.3) $$\frac{dx(t)}{dt}=f[t, x(t), x(t-\tau(t))],\ 0\leq t<\infty,$$

(6.4) $$x(t)=\alpha(t),\quad -\tau_0\leq t\leq 0,$$

где f — оператор, действующий из $R^+\times X\times X$ в X, $R^+=[0,\infty)$; $\alpha(t)$ —

начальная функция со значениями в X, определена и непрерывна на $[-\tau_0; 0]$; $\tau(t)$ — определена и непрерывна в R^+, при этом $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0 < \infty$.

Ниже будет использована следующая хорошо известная лемма.

Лемма 6.1. Пусть непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq C + \int_0^t k(s)\, u(s)\, ds \qquad (0 \leq t < \infty),$$

где C — положительная постоянная, $k(t) \geq 0$ и суммируема на $[0, \infty)$. Тогда имеет место неравенство

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_0^t k(s)\, ds\right) \qquad (0 \leq t < \infty).$$

Справедлива теорема.

Теорема 6.1. Пусть оператор $f(t, x, y)$ удовлетворяет условиям

(6.5) $$xf(t, x, y) \leq \eta(t)(x^2 + y^2), \quad \forall x, y \in X,$$

(6.6) $$f(t, x, y)x \leq \eta(t)(x^2 + y^2), \quad \forall x, y \in X,$$

где положительная функция $\eta(t)$ суммируема на $[0, \infty)$. Пусть выполняются следующие неравенства:

(6.7) $$\tau'(t) < 1,$$

(6.8) $$\int_0^\infty \frac{\eta[\varrho(s)]\, ds}{1 - \tau'[\varrho(s)]} < \infty,$$

где $\varrho(s)$ — функция, обратная к функции $\nu(s) = s - \tau(s)$. Тогда всякое решение $x(t)$ задачи (6.3) — (6.4) удовлетворяет неравенствам

(6.9) $$p(x(t)) \leq r_p \exp\left(\int_0^t \eta(s)\, ds\right) \qquad (0 \leq t \leq \tau_0),$$

(6.10) $$p(x(t)) \leq r_p \exp\left(\int_0^t \left\{\eta(s) + \frac{\eta[\varrho(s)]}{1 - \tau'[\varrho(s)]}\right\} ds\right) \qquad (\tau_0 \leq t < \infty)$$

для любой полунормы $p \in \mathcal{P}$, где

(6.11) $$r_p = \left\{[\, p(\alpha(0))]^2 + 2\int_0^{\tau_0} \eta(s)[\, p(\alpha(s - \tau(s)))]^2\, ds\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Доказательство. Для всякого решения $x(t)$ задачи (6.3) — (6.4) справедливы равенства

(6.12) $$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t - \tau(t))] \quad (0 \leq t < \infty),$$

(6.13) $$x(t) = \alpha(t) \quad (-\tau_0 \leq t \leq 0).$$

Умножая обе стороны равенстна (6.12) слева (справа) на $x(t)$, получаем следующие два равенства:

$$x(t)\frac{dx(t)}{dt} = x(t)f[t, x(t), x(t-\tau(t))], \tag{6.14}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}x(t) = f[t, x(t), x(t-\tau(t))]x(t). \tag{6.15}$$

Из равенств (6.14) — (6.15) с учетом условий (6.5) — (6.6) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}[(x(t))^2] \leq 2\eta(s)\{[x(t)]^2 + [x(t-\tau(t))]^2\}. \tag{6.16}$$

Интегрируя неравенство (6.16) от 0 до t, получим

$$0 \leq [x(t)]^2 \leq 2\int_0^t \eta(s)\{[x(s)]^2+[x(s-\tau(s))]^2\}ds+[\alpha(0)]^2. \tag{6.17}$$

В силу монотонности полунорм $q \in \mathfrak{Q}_c$ на конусе K пространства Z из неравенства (6.17) вытекает, что

$$q([x(t)]^2) \leq q\left(2\int_0^t \eta(s)\{[x(s)]^2+[x(s-\tau(s))]^2\}\,ds\right.$$
$$\left.+[\alpha(0)]^2\right) \leq q([\alpha(0)]^2)+2\int_0^t \eta(s)\{q([x(s)]^2)+q([x(s-\tau(s))]^2)\}\,ds \tag{6.18}$$

для любой полунормы $q \in \mathfrak{Q}_c$. Далее, используя условия допустимой пары пространств X, Z, приходим к соотношениям

$$[p(x(t))]^2 \leq 2\int_0^t \eta(s)\{[p(x(s))]^2+[p(x(s-\tau(s)))]^2\}\,ds+[p(\alpha(0))]^2 \tag{6.19}$$

для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$.

Вначале рассмотрим случай, когда $0 \leq t \leq \tau_0$; для таких значений t имеем: $x(t-\tau(t)) = \alpha(t-\tau(t))$. Из (6.19) в этом случае получаем следующие неравенства для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$:

$$[p(x(t))]^2 \leq [p(\alpha(0))]^2+2\int_0^t \eta(s)[p(\alpha(s-\tau(s)))]^2\,ds$$
$$+2\int_0^t \eta(s)[p(x(s))]^2\,ds \leq [p(\alpha(0))]^2$$
$$+2\int_0^{\tau_0} \eta(s)[p(\alpha(s-\tau(s)))]^2\,ds+2\int_0^t \eta(s)[p(x(s))]^2\,ds;$$

отсюда

$$(6.20) \qquad [p(x(t))]^2 \leq r_p^2 + 2\int_0^t \eta(s)[p(x(s))]^2\, ds,$$

где $p \in \mathcal{P}$, $r_p^2 = [p(a(0))]^2 + 2\int_0^{t_0} \eta(s)[p(a(s-\tau(s)))]^2\, ds.$

Из неравенства (6.20) и леммы 6.1 вытекает

$$(6.21) \qquad [p(x(t))]^2 \leq r_p^2 \exp\left(2\int_0^t \eta(s)\, ds\right), \quad p \in \mathcal{P}, \quad 0 \leq t \leq \tau_0.$$

Из последнего неравенства следует справедливость оценки (6.9).

Рассмотрим теперь случай, когда $\tau_0 \leq t < \infty$. На основании формулы (6.19) для каждой полунормы $p \in \mathcal{P}$ имеем

$$(6.22) \qquad [p(x(t))]^2 \leq [p(a(0))]^2 + 2\int_0^t \eta(s)\{[p(x(s))]^2 + [p(x(s-\tau(s)))]^2\}\, ds$$

$$+ 2\int_{\tau_0}^t \eta(s)\{[p(x(s))] + [p(x(s-\tau(s)))]^2\}\, ds.$$

Так как $x(t-\tau(t)) = a(t-\tau(t))$ при $0 \leq t \leq \tau_0$, то из (6.22) получаем

$$(6.23) \qquad [p(x(t))]^2 \leq [p(a(0))]^2 + 2\int_0^{\tau_0} \eta(s)[p(a(s-\tau(s)))]^2\, ds$$

$$+ 2\int_0^t \eta(s)[p(x(s))]^2\, ds + 2\int_{\tau_0}^t \eta(s)[p(x(s-\tau(s)))]^2\, ds,$$

где $p \in \mathcal{P}$. В силу условия (6.7) теоремы функция $\nu = s - \tau(s)$ имеет обратную функцию $s = \varrho(\nu)$. Тогда на основании (6.23)

$$(6.24) \qquad [p(x(t))]^2 \leq [p(a(0))]^2 + 2\int_0^{\tau_0} \eta(s)[p(a(s-\tau(s)))]^2\, ds$$

$$+ 2\int_0^t \eta(s)[p(x(s))]^2\, ds + 2\int_{\tau_0-\tau(\tau_0)}^{t-\tau(t)} \frac{\eta[\varrho(s)][p(x(s))^2]\, ds}{1-\tau'[\varrho(s)]}$$

для каждой полунормы $p \in \mathcal{P}$. Так как

$$\frac{\eta[\varrho(s)][p(x(s))]^2}{1-\tau'[\varrho(s)]} \geq 0,$$

то из соотношения (6.24) получаем неравенство

$$(6.25)\qquad [p(x(t))]^2 \le [p(\alpha(0))]^2 + 2\int_0^{\tau_0} \eta(s)[p(\alpha(s-\tau(s)))]^2\,ds$$

$$+2\int_0^t \left\{\eta(s) + \frac{\eta[\varrho(s)]}{1-\tau'[\varrho(s)]}\right\}[p(x(s))]^2\,ds$$

$$= r_p^2 + 2\int_0^t \left\{\eta(s) + \frac{\eta[\varrho(s)]}{1-\tau'[\varrho(s)]}\right\}[p(x(s))]^2\,ds, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Из (6.25) на основании леммы 6.1 вытекают неравенства

$$(6.26)\qquad [p(x(t))]^2 \le r_p^2 \exp\left(2\int_0^t \left\{\eta(s) - \frac{\eta[\varrho(s)]}{1-\tau'[\varrho(s)]}\right\} ds\right),$$

где $\tau_0 \le t < \infty$, $p \in \mathcal{P}$. Из (6.26) вытекает оценка (6.10). Теорема 6.1 доказана полностью.

Из теоремы 6.1 как частный случай вытекает теорема 1 работы [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки, Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
2. Мамедов, Я. Д. Односторонние оценки в условиях исследования решений дифференциальных уравнений с неограниченным оператором и запаздывающим аргументом в банаховом пространстве. — Вопр. вычисл. математики. Баку, 1967, 173—181.
3. Красносельский, М. А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
4. Иосида, К. Функциональный анализ. М., 1967.
5. Поволоцкий, А. И., В. В. Мосягин. О дифференциальных уравнениях в локально выпуклых пространствах. — Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 404, 1971, 406—414.
6. Сеидов, З. Б. Об ограниченности решений нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом в функциональных пространствах. — Вопр. вычисл. математики. Баку. 1967, 139—149.
7. Качуровский, Р. И. Три теоремы о нелинейных уравнениях с монотонными операторами. — Докл. АН СССР. 183, 1968, № 1, 33—36.
8. Tompson, R. J. On some functional differential equations: existence of solutions and difference approximations. — SIAM J. Numer. Anal., 5, 1968. No. 5, 475—487.
9. Schaefer, H. H. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. — Math. Ann., 135, 1958, 115—141.

Поступила 7. XII. 1972 г.

ВЪРХУ ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ СЪС ЗАКЪСНЯВАЩ АРГУМЕНТ В ЛОКАЛНО ИЗПЪКНАЛИ ПРОСТРАНСТВА

Валентин Мосягин

(Резюме)

Работата е посветена на изучаването на някои въпроси от теорията на нелинейните диференциални уравнения със закъсняващ аргумент в локално изпъкнали пространства.

Разглежда се диференциалното уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f[t, x(t), x(t-\Delta(t))], \quad 0\leq t\leq t_0,$$

с начално условие

$$x(t)=\varphi(t), \quad -\Delta_0\leq t\leq 0,$$

на което се търси решение $x:[-\Delta_0, t_0]\to E$, където E е локално изпъкнало пространство; $\Delta(t)$ е непрекъсната функция, удовлетворяваща неравенствата $0\leq\Delta(t)\leq\Delta_0$; началната функция $\varphi:[-\Delta_0, 0]\to E$ е непрекъсната в интервала $[-\Delta_0, 0]$; $A:E\to E$ е линейно изображение и изображението $f:[0, t_0]\times E\times E\to E$ е непрекъснато.

Когато линейният оператор A има специален вид, а именно е инфинитезимален производящ оператор на една равностепенно непрекъсната полугрупа линейни оператори $\{T_t\}$ от класа (C_0), се доказва, че всяко решение на горното диференциално уравнение е в същото време решение на интегралното уравнение

$$x(t)=T_t\varphi(0)+\int_0^t T_{t-s}f[s, x(s), x(s-\Delta(s))]\,ds$$

при същите начални условия.

Като се налагат допълнителни ограничения върху полугрупата $\{T_t\}$ и следователно върху оператора A, а също така върху изображението f, се доказва съществуването на единствено решение на интегралното уравнение, удовлетворяващо началното условие.

Във втората част се дават оценки за ограниченост относно всяка полунорма от една база от непрекъснати полунорми на решенията на диференциални уравнения от разглеждания тип, но в които операторът A е тъждествено нула. При това налагат се допълнителни ограничения върху f, свързани с въвеждането на една нова структура „произведение" върху E.

ON THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT IN LOCALLY CONVEX SPACES

Valentin Mosyagin

(Summary)

The paper is dedicated to the study of some questions from the theory of non-linear differential equations with retarded argument in locally convex space.

The equation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f[t, x(t), x(t-\Delta(t))], \quad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

with initial condition

$$x(t) \quad \varphi(t), \quad -\Delta_0 \quad t \leq 0$$

is considered, for which a solution $x:[-\Delta_0, t_0] \to E$, where E is a locally convex space, is to be found, $\Delta(t)$ is a continuous function satisfying the inequalities $0 \quad \Delta(t) \quad \Delta_0$; the initial function $\varphi:[-\Delta_0, 0] \to E$ is continuous on the interval $[\ \ \Delta, 0]$. $A\ E \quad E$ is a linear mapping and the mapping $f:[0, t_0] \times E \quad E \to E$ is continuous.

In the case when the linear operator A is of a special kind, namely, it is an infinitesimal generating operator of an equicontinuous semigroup of linear operators $\{T_t\}$ from the class (C_0), it is proved that any solution of the above differential equation is at the same time a solution of the integral equation

$$x(t) = T_t\varphi(0) + \int_0^t T_{t-s} f[s, x(s), x(s-\Delta(s))]\, ds$$

with the same initial conditions.

When additional restrictions on the semigroup $\{T_t\}$ and consequently on the operator A and on the mapping f are imposed, the existence of a unique solution of the integral equation satisfying the initial conditions is proved.

In the second part estimations are given for boundedness (with regard to every semigroup of a basis of continuous seminorms) of the solution of differential equations of the type under consideration, in which the operator A is identically equal to zero. In this case additional restrictions on f should be imposed in connection with the introduction of a new structure "multiplication" on E.