БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ОЦЕНКА ЗА СКОРОСТТА НА СХОДИМОСТ НА ЕДНА РЕДИЦА ОТ ИТЕРАЦИОННИ ФУНКЦИИ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Апостол Обретенов

Една функция на разпределение $F(x)$, $x\geq 0$, за която отношението

$$\frac{F(t+x)-F(t)}{1-F(t)}$$

не намалява относно t при фиксирано x, се нарича функция на разпределение (ф. р.) с растяща функция на интензивност, или кратко РФИ-разпределение.

Разпределения от вида

$$F_1(x)=\frac{1}{\mu_1}\int_0^x [1-F(t)]\,dt, \tag{1}$$

където μ_1 е моментът на $F(x)$, се налага да се разглеждат при някои въпроси (например при рекурентен поток със закъснение или при стационарно разпределение на остатъчните времена при възстановителен процес и др.). Известно е [1], че ако F е РФИ-разпределение, то и F_1 е РФИ-разпределение. Чрез ф. р. F_1 може по (1) (като вместо F вземем F_1) да образуваме нова ф. р. F_2 и т. н. Някои свойства на така получената редица са изследвани в [2], където е и показана сходимост към експоненциалното разпределение. В настоящата работа се изследва сходимостта на редицата итерационни разпределения F_n, получени последователно по (1), като се намира главният остатъчен член. По-точно доказва се следната теорема:

Теорема. Нека $F(x)$ е РФИ-разпределение, а

$$F_n(x)=\frac{1}{\mu_1^{(n-1)}}\int_0^x [1-F_{n-1}(t)]\,dt,\quad F_0(t)=F(t), \tag{2}$$

където $\mu_1^{(n)}$ е първият момент на F_n.

Тогава, ако $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}\neq 0$, $\mu_n=\int_0^\infty x^n dF(x)$, то

(3) $$F_n\left[\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}x\right]=1-e^{-x}+\frac{1-x}{n}e^{-x}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказателство. Известно е, че едно РФИ-разпределение има моменти от всеки ред. Да означим с $\mu_k^{(n)}$ k-ия момент на $F_n(x)$:

$$\mu_k^{(n)}=\int_0^\infty x^k dF_n(x).$$

От рекурентната връзка (2) получаваме

(4) $$\mu_k^{(n)}=\binom{n+k}{k}^{-1}\frac{\mu_{n+k}}{\mu_n}.$$

Като използуваме (4), моментите

$$a_k^{(n)}=\int_0^\infty x^k dF_n\left(\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}x\right)$$

на нормираното разпределение (3) ще са

(5) $$a_k^{(n)}=\left[\frac{(n+1)\mu_n}{\mu_{n+1}}\right]^k\mu_k^{(n)}=\binom{n+k}{k}^{-1}(n+1)^k\frac{\mu_{n+k}}{\mu_n}\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)^k$$

За по-кратко да означим с $\pi_n(k)$ израза

(6) $$\pi_n(k)=\frac{\mu_{n+k}}{\mu_n}\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right)^k,$$

или

(6_1) $$\pi_n(k)=\prod_{\nu=1}^{k}r_n(\nu),$$

където

(7) $$r_n(\nu)=\mu_{n+\nu}\mu_n/\mu_{n+\nu-1}\,\mu_{n+1}.$$

С тези означения $a_k^{(n)}$ от (5) се записва така:

(8) $$a_k^{(n)}=\binom{n+k}{k}^{-1}(n+1)^k\pi_n(k).$$

Нека $b_n=\binom{n+k}{k}^{-1}(n+1)^k$, тогава

(9) $$\lim_{n\to\infty}n[b_n-k!]=-k!\frac{k(k+1)}{2}.$$

Наистина

$$b_n-k!=k!\frac{1-\exp\left(\sum_{i=1}^{k}\lg\left(1+\frac{i}{n+1}\right)\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n+1}\right)}=-k!\frac{k(k+1)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ще докажем, че

(10) $$\lim_{n\to\infty} n\,[\pi_n(k)-1] = \frac{k(k-1)}{2}\,.$$

За множителите $r_n(\nu)$ от определението (6_1) на $\pi_n(k)$ ще покажем, че

(11) $$r_n(\nu) = 1 + \frac{\nu-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ще докажем (11) индуктивно. За тази цел използваме, че

$$r_n(1) = 1,$$

(12) $$r_n(\nu+1) = r_n(\nu)\,\delta_{n+\nu-1}\,,$$

където

$$\delta_{n+\nu-1} = \frac{\mu_{n+\nu+1}\,\mu_{n+\nu-1}}{\mu^2_{n+\nu}}$$

Представянето (12) следва от израза (7) за $r_n(\nu)$.

При $\nu = 2$

$$r_n(2) = \delta_{n+1}$$

и за да установим (11) при $\nu = 2$, ще трябва да покажем, че

(13) $$\lim_{n\to\infty} n(\delta_{n+1}-1) = 1.$$

Тъй като $F(x)$ е РФИ-разпределение, то известно е [1], че редицата с общ член $\mu_n/n!$ е логаритмично изпъкнала, т. е.

(14) $$\frac{\mu_{n+2}}{(n+2)!}\,\frac{\mu_n}{n!} \le \left[\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)!}\right]^2$$

От (14) следва

$$\delta_{n+1} = \frac{\mu_{n+2}\,\mu_n}{\mu^2_{n+1}} \le \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

или

(15) $$\delta_{n+1} = 1 + \frac{\theta_n}{n+1}, \quad 0 \le \theta_n \le 1^{*}.$$

По условие границата $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ е различна от нула, където с a_n сме означили отношението

$$a_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}\,.$$

Лесно се проверява, че

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2}\,\delta_{n+1}$$

или

$$a_n - a_{n+1} = \left[\frac{1-\theta_n}{n+1} + \frac{\theta_n}{(n+1)^2}\right] a_n.$$

Понеже $a_n - a_{n+1} \ge 0$ и $a_n \to a \ne 0$, то от сходимостта на реда

* $\theta_n \ge 0$ следва от неравенството на Коши — Буняковски.

$$\sum (a_n - a_{n+1})$$

следва $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 1$, което, като заместим в (15), дава (13). Следователно (11) е вярно при $\nu = 2$.

Нека (11) е вярно при някое ν. Тогава от (12) имаме

$$n[r_n(\nu+1)-1] = n[r_n(\nu)-1]\,\delta_{n+\nu-1} + n[\delta_{n+\nu-1} - 1]$$

и от горното равенство, като използуваме (11), по индукция следва (11) за всяко $\nu \geqq 1$.

От (11) граничното съотношение (10) следва вече лесно. Наистина

$$n[\pi_n(k)-1] = n\left[\prod_{\nu=1}^{k} r_n(\nu) - 1\right] \quad n\left\{\exp\left[\sum_{\nu=1}^{k} \lg\left(1 + \frac{\nu-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] - 1\right\}.$$

Ако k е фиксирано, а n достатъчно голямо, то

$$\lg\left(1 + \frac{\nu-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(\nu-1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и от горното равенство получаваме

$$n[\pi_n(k)-1] = n\left[\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \frac{k(k-1)}{2} + o(1),$$

т. е. (10).

Сега ще покажем, че моментите (5) имат следното асимптотично представяне:

$$a_k^{(n)} = k!\left[1 - \frac{k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{16}$$

За да получим (16), ще използуваме, че

$$a_k^{(n)} = b_n \pi_n(k).$$

Като вземем пред вид (9) и (10), имаме

$$a_k^{(n)} - k! = b_n \pi_n(k) - k! \quad k!\left[1 - \frac{k(k+1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\times\left[1 + \frac{k(k-1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - k! = k!\left[1 - \frac{k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

От (16) с умножаване на $(-s)^k$ намираме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{(n)}}{k!} (-s)^k - \frac{1}{1+s} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} k(-s)^k + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

или

$$f_n(s) - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{n(1+s)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{17}$$

където $f_n(s)$ е Лаплас-Стилтесовата трансформация на $F_n(a_n x)$. Равенство (17) ни дава (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Barlow, R. E., A. W. Marschall, F. Proschan. Properties of probability distributions with monotone hazard rade. — Ann. Math. Statistics, 34, 1963, 375—389.
2. Harkness, W. L., R. Shantaram. Convergence of a sequence of transformations of distribution functions. — Pacif. J. Math., 31, (2), 1969, 403—415.

Постъпила на 20. XII. 1972 г.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Апостол Обретенов

(Резюме)

Рассматриваются функции распределения $F(x)$ с возрастающей интенсивностью и полученные с помощью итерации (2) функции распределения $F_n(x)$. Известно [2], что последовательность $F_n(t)$ (после соответствующей нормировки, приравнивающей первый момент $F_n(t)$ единице) стремится к экспоненциальному распределению. В статье определяется скорость этой сходимости. Доказывается, что разность между двумя распределениями асимптотически равна $(1-x)e^{-x/n}$.

AN ESTIMATION OF THE SPEED OF CONVERGENCE OF A SEQUENCE OF ITERATIVE DISTRIBUTION FUNCTIONS

Apostol Obretenov

(Summary)

Distribution functions $F(x)$ with increasing intensity and distribution functions $F_n(x)$ obtained by the iteration (2) are considered. It is known [2] that the sequence $F_n(t)$ (after appropriate normalization, making the first moment of $F_n(t)$ equal to 1) tends to the exponential distribution. In the present paper the speed of the convergence is found, proving that the difference between the two distributions is asymptotically equal to $(1-x)e^{-x/n}$ (equality (3)).