БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ВЪРХУ УЛМОВСКИТЕ ИНВАРИАНТИ НА ГРУПАТА ОТ НОРМИРАНИТЕ ЕДИНИЦИ НА МОДУЛЯРНИТЕ ГРУПОВИ ПРЪСТЕНИ НА ПРИМАРНИТЕ АБЕЛЕВИ ГРУПИ

Тодор Ж. Моллов

Нека LG е груповият пръстен на редуцираната p-примарна група G над асоциативния комутативен пръстен L с единица и характеристика p. Подгрупата $S(LG)$ на групата от единиците на алгебрата LG, определена с равенството

$$S(LG)=\left\{x=\sum_{g\in G} a_g g \mid \sum_{g\in G} a_g=1,\quad a_g\in L\right\},$$

ще наричаме група от нормираните единици на пръстена LG. В настоящата работа се доказва, че улмовските инварианти на групата $S(LG)$ са крайни тогава и само тогава, когато L и G са крайни. Като следствие се установява, че никоя безкрайна група $S(LG)$ не притежава свойството съкратимост (вж. [6]) и че всяка безкрайна група $S(LG)$ е ID-група, т. е. изоморфна на свой директен множител (вж. [10]). Групата $S(LG)$ е изучавана в [1], [8] и [9].

Терминологията на абелевите p-групи, която ще употребяваме, съответствува на [7], обаче груповите операции на тези групи ще записваме мултипликативно.

Означения:

L — комутативен асоциативен пръстен с единица и характеристика p; $L^p=\{a^p \mid a\in L\}$;

$H[p]$ — долен слой (вж. [7], стр. 144) на p-примарната абелева група H; $H^p=\{h^p \mid h\in H\}$;

Ако α е ординално число, то G^{p^α} дефинираме индуктивно: $G^{p^0}=G$; ако $\alpha=\beta+1$, то $G^{p^\alpha}=(G^{p^\beta})^p$; ако α е гранично ординално число, то $G^{p^\alpha}=\bigcap_{\beta<\alpha} G^{p^\beta}$;

$\overline{\overline{M}}$ — мощност на множеството M;

$\aleph_0$ — първото безкрайно кардинално число.

Ако G е редуцирана абелева p-група, то най-малкото ординално число λ, такова, че $G^{p^\lambda}=1$, се нарича дължина на групата G. За всяко $\alpha\leq\lambda$ рангът

$$f_G(\alpha) = \operatorname{rank}\ [(G^{p^\alpha} \cap G[p])/(G^{p^{\alpha+1}} \cap G[p])]$$

се нарича α-ти улмовски инвариант на групата G (вж. и [4], стр. 27).

В [10] Pierce нарича абелевата p-група ID-група, ако тя е изоморфна на свой директен множител.

Ще казваме, че абелевата група G притежава свойството съкратимост [3], ако за всеки две абелеви групи H и K от изоморфизма на директните произведения

$$G \times H \cong G \times K \text{ следва } H \cong K.$$

Jonsson и Tarski [3] доказват, че всяка крайна абелева група притежава свойството съкратимост. Grawley [6] показва, че редуцираната изброима периодическа абелева група притежава това свойство точно тогава, когато улмовските инварианти на всяка нейна примарна компонента са крайни.

В следващите твърдения G ще означава редуцирана p-примарна абелева група. Може да се смята за известна следната лема:

Лема 1. Ако G е безкрайна група, то фактор-групата G/G^p е безкрайна.

Лема 2. Ако поне едно от кардиналните числа $|L|$ и $|G|$ е безкрайно, то $|[S(LG)][p]| = \max(|L|, |G|)$.

Доказателство. Ще въведем следните означения: $[S(LG)][p] = N^*$ и $G[p] = N$. Тъй като $N^* \supseteq S(LN)$, то $|N^*| \geqq \max(|L|, |N|)$.

Да допуснем, че $|G/N| \geqq \chi_0$ и нека

$$g_1, g_2, \ldots, g_\alpha, \ldots$$

е система от представители на съседните класи на групата G по подгрупата N, в която не участвува представител на единичния клас N. Да изберем $g^* \in N, g^* \neq 1$ (това е възможно, понеже $N \neq 1$). Тогава $g'_\alpha = g_\alpha g^* \in g_\alpha N$ и $g'^{\,p}_\alpha = g^p_\alpha$. От това равенство следва, че елементът $A(\alpha) = 1 + g_\alpha - g'_\alpha \in [S(LG)][p]$. Нека $\beta \neq \alpha$ и $A(\beta) \in [S(LG)][p]$. Равенството $A(\alpha) = A(\beta)$ води до противоречие, понеже в лявата му страна на класа $g_\alpha N$ принадлежат елементите g_α и g'_α, а в дясната му страна не се среща никой елемент на този клас. От това следва, че $|N^*| \geqq |G/N|$, откъдето $|N^*| \geqq \max(|L|, |G|)$. Обаче $N^* \subseteq S(LG)$ и в случая $|S(LG)| = \max(|L|, |G|)$ (вж. [9]), откъдето следва лемата.

Теорема. Нека G е редуцирана p-примарна абелева група и L е комутативен асоциативен пръстен с единица и характеристика p. Улмовските инварианти на групата $S(LG)$ от нормираните единици на груповия пръстен LG са крайни тогава и само тогава, когато G е крайна група и L е краен пръстен.

Доказателство. Достатъчността е очевидна.

Необходимост. Тъй като $S^p(LG) = S(L^pG^p)$ (вж. напр. [9]), то първият улмовски инвариант на групата $S(LG)$ е равен на rank N^*, където $N^* = [S(LG)][p]/[S(L^pG^p)][p]$, следователно N^* е крайна група. Разглеждаме следните случаи:

1) $G^p = 1$. Тогава $N^* \cong [S(LG)][p]$. Ако допуснем, че поне едно от кардиналните числа $|L|$ или $|G|$ е безкрайно, то по лема 2 ще имаме $|N^*| = \max(|L|, |G|)$, т. е. N^* е безкрайна група, което е противоречие.

2) $G^p \neq 1$. Да означим $G^p[p] = N$ и да допуснем, че:

2_1) L е безкраен пръстен. Нека $g^* \in N$ и $g^* \neq 1$. $G \neq G^p$, защото в противен случай G ще бъде пълна група. Нека $g \overline{\in} G^p, g \in G$. Тогава елементът $g' = gg^* \in gN$ и $g'^p = g^p$. Разглеждаме елемента

$$A(a) = (1 + ag - ag')[S(L^pG^p)][p], \quad a \in L.$$

$A(a) \in N^*$. Ако $\beta \in L$, $\beta \neq a$ и допуснем, че $A(a) = A(\beta)$, ще получим

$$1 + ag - ag' = (1 + g\beta - \beta g') \sum_{k=1}^{t} \gamma_k^p g_k^p, \quad \gamma_k \in L.$$

В лявата страна на това равенство на единичния клас G^p на групата G по подгрупата G^p принадлежи само елементът 1, а в дясната му страна на този клас принадлежат различните g_k^p. Следователно $\sum_{k=1}^{t} \gamma_k^p g_k^p = 1$, което води до противоречието $a = \beta$. По този начин $A(a) \neq A(\beta)$ при $a \neq \beta$, откъдето следва $|N^*| \geq |L|$, което противоречи на крайността на групата N^*.

2_2) Нека G е безкрайна група. Тогава според лема 1 фактор-групата G/G^p е безкрайна. Нека

$$g_1, g_2, \ldots, g_\delta, \ldots$$

е система представители на съседните класи на групата G по подгрупата G^p, в която не влиза представител на единичния клас G^p. Избираме елемент g^*, както в случая 2_1). Тогава $g_{\delta'} = g_\delta g^* \in g_\delta G^p$ и освен това $g_{\delta'}^p = g_\delta^p$. Разглеждаме елемента

$$A(\delta) = (1 + g_\delta - g_{\delta'})[S(L^pG^p)][p].$$

Очевидно $A(\delta) \in N^*$. Ако $A(\varepsilon) \in N^*$, $\varepsilon \neq \delta$, и допуснем, че $A(\varepsilon) = A(\delta)$, то ще получим

$$1 + g_\delta - g_{\delta'} = (1 + g_\varepsilon - g_{\varepsilon'}) \sum_{k=1}^{t} \gamma_k^p g_k^p, \quad \gamma_k \in L.$$

В лявата страна на това равенство на класа $g_\delta G$ принадлежат елементите g_δ и $g_{\delta'}$, а в дясната страна на $g_\delta G$ не принадлежи никой елемент, което е противоречие. Следователно $A(\delta) \neq A(\varepsilon)$ при $\delta \neq \varepsilon$ и $|N^*| \geq |G/G^p|$, което противоречи на крайността на групата N^*. Доказателството е завършено.

Според [9] $|S(LG)| \leq \chi_0$ точно тогава, когато $|G| \leq \chi_0$ и $|L| \leq \chi_0$. Тази забележка ще използуваме за следното твърдение.

Следствие 1. Нека G е редуцирана абелева p-група и L е комутативен пръстен с единица и характеристика p. Групата $S(LG)$ притежава свойството съкратимост тогава и само тогава, когато L и G са крайни.

Доказателство. Нека групата $S(LG)$ притежава свойството съкратимост. Тъй като G е редуцирана абелева p-група, то $S(LG)$ е редуцирана абелева p-група (вж. [9]).

В [5] Kovacs е показал, че подгрупата C на абелевата p-група G може да бъде продължена до базисна подгрупа B на G тогава и само тогава, когато C е обединение на растящата редица

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots$$

от такива подгрупи, че височините на елементите на C_n (взети в G) са ограничени в съвкупност. Нека B е базисната подгрупа на G. Ще покажем, че ако $\widetilde{B}$ е базисната подгрупа на $S(LG)$, то $S(LB)\subseteq\widetilde{B}$. Наистина B тривиално се продължава до базисна подгрупа на G, следователно B е обединение на растящата редица

$$B_1\subseteq B_2\subseteq\ldots\subseteq B_n\subseteq\ldots$$

от подгрупи, такива, че височините на елементите на B_n в G са ограничени в съвкупност. Тогава $S(LB)$ е обединение на растящата редица от подгрупи

$$S(LB_1)\subseteq S(LB_2)\subseteq\ldots\subseteq S(LB_n)\subseteq\ldots,$$

която удовлетворява условията на теоремата на Kovács, следователно $S(LB)\subseteq\widetilde{B}$.

В [6] Grawley отбелязва, че ако периодичната абелева група G притежава свойството съкратимост, то улмовските инварианти на нейната базисна подгрупа B трябва да бъдат крайни. Обаче $f_{\widetilde{B}}(a)\geqq f_{S(LB)}(a)$, тъй като $S(LB)$ е сервантна в $S(LG)$ (вж. [11]), значи и в $\widetilde{B}$, и следователно всеки p^n — ограничен максимален директен множител на $S(LB)$ е директен множител и на $\widetilde{B}$. Получаваме, че улмовските инварианти на $S(LB)$ са крайни. От теоремата следва, че L е краен пръстен и B е крайна група, т. е. G е крайна група.

В [10] Pierce установява, че абелевата p-група G е ID-група тогава и само тогава, когато ID-група е нейната максимална пълна подгрупа или нейната редуцирана подгрупа, а също, че редуцираната p-група G е ID-група тогава и само тогава, когато поне за едно естествено число n нейният улмовски инвариант $f_G(n)$ е безкраен.

Следствие 2. Нека G е абелева p-група и L е комутативен пръстен с единица и характеристика p. Групата $S(LG)$ е ID-група тогава и само тогава, когато или L, или G са безкрайни.

Доказателство. Нека G е редуцирана абелева p-група. По теоремата поне един улмовски инвариант на $S(LG)$ е безкраен тогава и само тогава, когато или L, или G са безкрайни, откъдето по теоремата на Pierce следва предложението.

Да предположим, че $G=P\times R$, където P 1 е максималната пълна подгрупа на G, а R е нейна редуцирана подгрупа. Тогава $S(LG)=S(KP)\times Q$ (вж. [9]), където K е (максималният пълен) подпръстен на L (вж. [2]). Групата $S(KP)$ се разлага в max(K , P) групи от типа p^∞ (вж. [9]), следователно $S(KP)$ е изоморфна на свой директен множител, т. е. $S(LG)$ е ID-група.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман, С. Д. Групповые алгебры счетных абелевых групп. — Publ. Math. Debrecen 14, fasc. 1—4, 1967, 365—405.
2. Берман, С. Д., Т. Ж. Моллов. О групповых кольцах абелевых p-групп любой мощности. — Матем. заметки, 6, 1969, № 4, 381—392.

3. Jonsson, B., A. Tarski. Direct Decompositions of Finite Algebraic Systems. — Notre Dame Mathematical Lectures, 1947, No. 5.
4. Kaplanski, I. Infinite Abelian Groups. — Ann. Arbor, 1954.
5. Kovásc, L. On subgroups of the basic subgroup. — Publ. Math. Debrecen, 5, 1958, 261—264.
6. Crawley, P. The Cancellation of Torsion Abelian Groups in Direct Sums. — J. Algebra, 2, 1965, No. 4, 432—442.
7. Курош, А. Г. Теория групп. М., 1967.
8. Моллов, Т. Ж. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I. — Publ. Math., Debrecen (под печат).
9. Моллов, Т. Ж. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. II. — Publ. Math., Debrecen (под печат).
10. Pierce, R. S. Isomorphic direct summands of Abelian groups. — Math. Ann., 153, 1964, No. 1, 21—37.
11. Моллов, Т. Ж. Сервантные подгруппы и выделение прямых множителей в группах единиц модулярных групповых алгебр. — Научни тр. Пловдив. унив., 11, No 1, 1973, 9—15.

Постъпила на 25. XII. 1972 г.

ОБ ИНВАРИАНТАХ УЛЬМА ГРУППЫ НОРМИРОВАННЫХ ЕДИНИЦ МОДУЛЯРНЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ПРИМАРНЫХ АБЕЛЕВСКИХ ГРУПП

Тодор Моллов

(Резюме)

Пусть LG — групповое кольцо приведенной p-примарной группы G над ассоциативным коммутативным кольцом L с единицей и характеристикой p. Подгруппа $S(LG)$ группы единиц алгебры LG, определенная равенством

$$S(LG)=\left\{x=\sum_{g\in G}a_g g \mid \sum_{g\in G}a_g=1,\ a_g\in L\right\},$$

названа группой нормированных единиц кольца LG. Будем считать, что группа G обладает свойством сократимости, если для каждой пары абелевских групп H и K из изоморфизма прямых произведений

$$G\times H\cong G\times K$$

следует $H\cong K$.

Доказывается, что инварианты Ульма группы $S(LG)$ конечны в том и только в том случае, когда L и G конечны. Как следствие выведен результат, что никакая бесконечная группа $S(LG)$ не обладает свойством сократимости и что любая бесконечная группа $S(LG)$ является ID-группой, т. е. изоморфна своему прямому множителю.

ON THE ULM'S INVARIANTS OF THE GROUP OF NORMED UNITS OF THE MODULAR GROUP-RINGS OF PRIMARY ABELIAN GROUPS

Todor Mollov

(Summary)

Let LG be the group-ring of the reduced p-primary group G over the associative commutative ring L with unit and characteristic p. The subgroup $S(LG)$ of the group of units of the algebra LG defined by the equality

$$S(LG)=\left\{x=\sum_{g\in G} a_g g \quad \sum_{g\in G} a_g \quad 1,\ a_g\in L\right\},$$

we shall call a group of the normed units of the ring LG. We shall say that the group G possesses the cancellation property if for any two Abelian groups H and K the isomorphism of the direct products $G\times H$, $G\times K$ implies $H\cong K$. It is proved that the Ulm's invariants of the group $S(LG)$ are finite then and only then when L and G are finite. It is found, as a corollary, that no infinite group $S(LG)$ possesses the cancellation property and that any infinite group $S(LG)$ is a ID-group, i. e. it is isomorphic to a direct factor of its own.