БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ВЪРХУ НЯКОИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ОПЕРАТОРИ ОТ II РЕД

Димитър Г. Димитров

С една теорема на Сегьо, Уолш и Какеа (вж. [1], [2] и [3]) се изследва разпределението на нулите на полиноми, получени от даден полином $f(z)$ чрез прилагане на линеен диференциален оператор с постоянни коефициенти. В своята работа [6] Н. Обрешков с помощта на подходящи линейни диференциални оператори от II ред с постоянни коефициенти дава интересно обобщение на класическата теорема на Пулен — Ермит. В [9] на К. Дочев, където е изложено ново доказателство на резултата на Обрешков, се разглеждат и някои диференциални оператори с непостоянни коефициенти, посредством които се обобщава и една класическа теорема на Лагер.

В настоящата работа се изследват свойствата на някои диференциални оператори от II ред с непостоянни коефициенти.

Ще казваме, че един линеен оператор L, действуващ в линейното пространство P_n на полиномите от степен n, принадлежи на класа H_n, когато преобразува всеки хурвицов полином в хурвицов, т.е. винаги когато нулите на полинома $f(z) \in P_n$ лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z \leqq 0$, нулите на полинома $g(z) = L(f)$ лежат в същата полуравнина.

Ще докажем следната теорема:

Теорема 1. Нека n е естествено число и a, b са реални числа, като $a \neq 0$, $b \neq 1-n, 2-2n$. Необходимото и достатъчно условие линейният оператор

$$(1) \qquad L = (z^2+a)\frac{d^2}{dz^2} + bz\frac{d}{dz} - n(b+n-1)$$

да принадлежи на класа H_n е числата a и b да удовлетворяват неравенствата

$$(2) \qquad a(b+n-1) < 0, \quad (b+n-1)(b+2n-2) > 0.$$

Доказателството на тази теорема може да се извърши с помощта на лемата, която е използувана в [9]. Тук обаче ще изложим доказателство от по-друг вид, като се основаваме на теоремата на Грейс в следната формулировка (вж. [10]):

Нека Φ е ненулев линеен функционал в линейното пространство P_n на полиномите над полето на комплексните числа от степен $\leq n$. Да означим с $G_\Phi(t)$ полинома

$$(3) \qquad G_\Phi(t) = \Phi\Big((t-z)^n\Big) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \Phi(z^\nu) t^{n-\nu}.$$

(Този полином ще наричаме полином на Грейс относно функционала Φ.) Нека $f(z) \in P_n$ е полином, за който $\Phi(f) = 0$. Тогава всяка кръгова област D, която съдържа всички корени на уравнението $G_\Phi(t) = 0$, ще съдържа поне един корен на уравнението $f(z) = 0$.

З а б е л е ж к а. Както обикновено, под кръгова област се разбира външност или вътрешност на кръг или полуравнина. Освен това уславяме се да считаме, че ако един полином е от степен $k < n$, безкрайната точка $z = \infty$ е $(n-k)$-кратна негова нула.

Теоремата на Грейс е добре известна и тя играе основна роля в геометрия на нулите, като на редица места се дава в различни еквивалентни формулировки (вж. [4], [5], [7], [8]). Ще приведем едно кратко доказателство на формулираната теорема (вж. също [11], стр. 156—157).

Непосредствено се проверява, че при $n = 1$ теоремата е вярна. И наистина за произволен полином $f(z) = a_0 z + a_1$ имаме

$$\Phi(f) = a_0 \Phi(z) + a_1 \Phi(1) \text{ и } G_\Phi(t) = \Phi(1) t - \Phi(z),$$

откъдето следва, че при $\Phi(f) = 0$ уравненията $f(z) = 0$ и $G_\Phi(t) \quad 0$ имат един и същ корен.

Да предположим сега, че теоремата е доказана за полиноми от степен $\leqq n-1$ и да допуснем, че тя не е вярна за всички полиноми от степен n. Тогава ще съществува полином $f(z) \in P_n$, за който $\Phi(f) \quad 0$, но всички корени $z_1, z_2, \ldots, z_n$ на уравнението $f(z) = 0$ лежат извън кръговата област D, съдържаща всички нули $t_1, t_2, \ldots, t_n$ на $G_\Phi(t)$. Нека

$$\delta : z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \quad 0,$$

е дробна линейна трансформация, за която $\delta(z_n) =$ Да разгледаме изображението $\Phi_\delta = \Phi_0 \delta$, дефинирано чрез равенството

$$\Phi_\delta(g) = \Phi(\delta g)$$

за всеки полином $g(z) \in P_n$. (Тук δg означава полинома $(cz+d)^m g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$, където m е степента на $g(z)$.) Очевидно Φ_δ е също линеен функционал. Да положим

$$\Phi_1 = \Phi_\delta, \quad D_1 = \delta(D), \quad f_1(z) = \delta^{-1} f, \quad \Delta = ad - bc,$$

където δ^{-1} е обратната трансформация на δ. Ще покажем, че

$$(4) \qquad G_{\Phi_1}(t) = \Delta^n \delta^{-1}(G_\Phi(t)).$$

И наистина имаме

$$G_{\Phi_1}(t) = \Phi_1\Big((t-z)^n\Big) = \Phi\left[(cz+d)^n \left(t - \frac{az+b}{cz+d}\right)^n\right],$$

откъдето получаваме

$$\delta G_{\Phi_1}(t) = \Phi\left[(cz+d)^n (ct+d)^n \left(\frac{at+b}{ct+d} - \frac{az+b}{cz+d}\right)\right],$$

т. е.

$$\delta G_{\Phi_1}(t) = \Delta^n \Phi\Big((t-z)^n\Big) = \Delta^n G_\Phi(t).$$

Като умножим отляво с δ^{-1}, получаваме равенството (4).

От установеното равенство (4) следва, че корените на уравнението $G_{\Phi_1}(t)=0$ са точно $\delta(t_1), \delta(t_2), \ldots, \delta(t_n)$ и следователно те принадлежат на кръговата област D_1. Корените на уравнението $f_1(z)=0$ са $\delta(z_1), \delta(z_2), \ldots, \delta(z_n)$, които вследствие направеното предположение за $z_1, z_2, \ldots, z_n$ не лежат в $D_1=\delta(D)$. В частност D_1 не съдържа безкрайната точка и следователно кръговата област D_1 е изпъкнала. Имаме

$$\Phi_1(f_1) = \Phi(\delta f_1) = \Phi(\delta\delta^{-1}f) = \Phi(f) \quad 0.$$

Понеже $\delta(z_n) =$, полиномът $f_1(z)$ е от степен, по-малка от n, и следователно можем да го разглеждаме като елемент на P_{n-1} с нули $\delta(z_1), \delta(z_2), \ldots, \delta(z_{n-1})$. Нека φ е линейният функционал Φ_1, разглеждан върху подпространството P_{n-1} на P_n. Да намерим грейсовия полином $G_\varphi(t)$. Имаме

$$G_\varphi(t) = \varphi((t-z)^{n-1}) \quad \Phi_1((t-z)^{n-1}) = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}\Phi_1((t-z)^n) = \frac{1}{n}\frac{d}{dt} G_{\Phi_1}(t).$$

Съгласно теоремата на Гаус — Люка от това равенство следва, че всички нули на $G_\varphi(t)$ лежат в изпъкналото множество D_1. Понеже $\varphi(f_1) \quad 0$, вследствие на индукционното предположение полиномът $f_1(z)$ трябва да има поне една нула в D_1, което е противоречие.

Доказателство на теорема 1. Достатъчност. Нека $f(z)$ е полином от степен n, нулите на който лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z < 0$, и да положим

$$g(z) = L(f) \quad (z^2+a)f''(z) + bzf'(z) - n(b+n-1)f(z), \tag{5}$$

където реалните числа a и b удовлетворяват неравенствата (2). Трябва да докажем, че ако ζ е произволна нула на полинома $g(z)$, то $\operatorname{Re}\zeta \le 0$. Да допуснем, че $\operatorname{Re}\zeta > 0$. От равенството

$$(\zeta^2+a)f''(\zeta) + b\zeta f'(\zeta) - n(b+n-1)f(\zeta) = 0$$

следва, че линейният функционал Φ, дефиниран чрез равенството

$$\Phi(\varphi) = (\zeta^2+a)\varphi''(\zeta) + b\zeta\varphi'(\zeta) - n(b+n-1)\varphi(\zeta), \quad \varphi(z) \in P_n,$$

се анулира за полинома $f(z)$. Да образуваме съответния полином на Грейс (3). В случая имаме

$$G_\Phi(t) = (t-\zeta)^{n-2}[n(n-1)(\zeta^2+a) - bn\zeta(t-\zeta) - n(b+n-1)(t-\zeta)^2]. \tag{6}$$

Очевидно $t=\zeta$ е $(n-2)$-кратна нула на $G_\Phi(t)$, а останалите две нули t_1 и t_2 на този полином съвпадат с корените на уравнението

$$(b+n-1)t^2 - (b+2n-2)\zeta t - a(n-1) = 0.$$

Имаме

$$t_1 + t_2 = \frac{b+2n-2}{b+n-1}, \quad t_1 t_2 = -\frac{a(n-1)}{b+n-1}, \tag{7}$$

където съгласно (2) числата $\frac{b+2n-2}{b+n-1}$ и $-\frac{a(n-1)}{b+n-1}$ са положителни. Като вземем пред вид още предположението $\operatorname{Re}\zeta > 0$, от (7) получаваме

$$\operatorname{Re} t_1 + \operatorname{Re} t_2 > 0, \quad \operatorname{Re} t_1 \operatorname{Re} t_2 > 0,$$

т. е. $\operatorname{Re} t_1 > 0$ и $\operatorname{Re} t_2 > 0$.

И така, ако $\mathrm{Re}\,\zeta>0$, всички нули на полинома (6) ще лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z>0$. Тогава съгласно теоремата на Грейс същата полуравнина ще съдържа поне една нула на полинома $f(z)$, което противоречи на предположението, че всички нули на този полином лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z\leqq 0$. С това достатъчността на условието от теоремата е доказана, т. е. че линейният оператор (1) при условията (2) преобразува всеки хурвицов полином в хурвицов.

Необходимост. За да докажем, че неравенствата (2) са и необходими, за да принадлежи линейният оператор (1) на класа H_n, ще разгледаме полинома

$$f(z)=(z+a)^n,\ a>0,$$

нулите на който лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z\leq 0$. В случая за полинома $g(z)$ от (5) ще получим

(8) $$g(z)=-n(z+a)^{n-2}[a(b+2n-2)z+(b+n-1)a^2-a(n-1)].$$

Освен $(n-2)$-кратната нула $z=-a$, този полином има за нула и реалното число

$$z_0=\frac{a(n-1)-(b+n-1)a^2}{a(b+2n-2)}.$$

Ясно е, че при $(b+n-1)\,(b+2n-2)<0$ ще можем винаги да подберем положителното число a така, че да имаме $z_0>0$ и следователно не всички нули на полинома (8) ще лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z\leqq 0$. С това показахме необходимостта на неравенството $(b+n-1)(b+2n-2)>0$.

Ако $a(b+n-1)>0$, то $a>0$ и $b+n-1>0$ или $a<0$ и $b+n-1<0$.

В случай че е налице първата възможност, при достатъчно малко a очевидно ще имаме $z_0>0$. Ако $a<0$ и $b+n-1<0$, но $b+2n-2>0$, то $(b+n-1)\,(b+2n-2)<0$ и, както видяхме, положителното число a можем да подберем така, че не всички нули на полинома (8) да лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z\leqq 0$. Остана да изследваме случая $a<0$, $b+n-1<0$ и $b+2n-2<0$. В този случай да разгледаме полинома

$$\varphi(z)=z^{n-1}(z+\beta),\ \beta>0,$$

нулите на който лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z\leqq 0$.

За полинома $g(z)$ от (5) сега ще получим

(9) $$g(z)=-z^{n-3}[\beta(b+2n-2)z^2-an(n-1)z-a\beta\,(n-1)(n-2)].$$

Очевидно $z=0$ е $(n-3)$-кратна нула на $g(z)$, а останалите две нули z_1, z_2 на този полином удовлетворяват уравнението с реални коефициенти

$$\beta(b+2n-2)z^2-an(n-1)z-a\beta(n-1)(n-2)=0.$$

От равенството

$$z_1z_2=-\frac{a(n-1)(n-2)}{b+2n-2}$$

вследствие неравенството $a(b+2n-2)>0$ имаме $z_1z_2<0$, т. е. реалните числа z_1 и z_2 са с противоположни знаци и следователно не всички нули на полинома (9) лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\,z\leqq 0$.

С това установихме необходимостта и на неравенството $a(b+n-1)<0$, с което теорема 1 е доказана.

Към линейните оператори от вида (1) спадат диференциалните оператори, съответстващи на някои от класическите ортогонални полиноми. Така например при $a=-1$ и $b=2(\alpha+1)$, където $\alpha>-1$, получаваме диференциалния оператор

$$L=(z^2-1)\frac{d^2}{dz^2}+2(\alpha+1)z\frac{d}{dz}-n(2\alpha+n+1),$$

съответствуващ на ултрасферичните полиноми. За този оператор неравенствата (2) са изпълнени и съгласно теорема 1 заключаваме, че диференциалните оператори, съответствуващи на ултрасферичните полиноми, трансформират всеки хурвицов полином в хурвицов. В частност такова свойство притежават и диференциалните оператори, съответствуващи на полиномите на Чебишев и Лежандър.

Интересно е да отбележим, че диференциалните оператори от вида

$$L=(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)z]\frac{d}{dz}+n(\alpha+\beta+n+1), \tag{10}$$

$$\alpha,\beta>-1,\quad \alpha\neq\beta,$$

съответствуващи на по-общите полиноми на Якоби, изобщо не преобразуват хурвицов полином в хурвицов. И наистина да приложим оператора (10) върху полинома

$$f(z)=(z+a)^n,\quad a>0,$$

нулите на който лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z<0$. Имаме

$$L(f)=(z+a)^{n-2}\{[\beta-\alpha+a(\alpha+\beta+2n)]z+n-1+a(\beta-\alpha)+a^2(\alpha+\beta+n+1)\}.$$

Ясно е, че ако $\beta<\alpha$, при достатъчно малко a нулата

$$z=-\frac{n-1+a(\beta-\alpha)+a^2(\alpha+\beta+n+1)}{\beta-\alpha+a(\alpha+\beta+2n)}$$

на полинома $L(f)$ ще бъде положителна и следователно този полином няма да бъде хурвицов.

Сега ще докажем следната теорема:

Теорема 2. Нека p и q са произволни реални числа, като $q\neq 0$. Необходимото и достатъчно условие линейният оператор

$$L=\frac{d^2}{dz^2}+pz\frac{d}{dz}+q \tag{11}$$

да принадлежи на класа H_n е числата p и q да удовлетворяват неравенствата

$$q>0,\quad np+q\geq 0. \tag{12}$$

При доказателството на достатъчността ще използуваме следната теорема на Лагер, която играе важна роля в геометрия на нулите на полиномите. Нека $f(z)$ е произволен полином от степен n и a е комплексно число, за което $f(a)=0$, $f'(a)\neq 0$. Тогава във всяка окръжност C и вън от нея, която минава през точките a и

$$\zeta=a-\frac{nf(a)}{f'(a)},$$

има пòне пò една нула на полинома $f(z)$, или всичките нули на този полином лежат по окръжността C.

Нека сега $f(z)$ е полином от степен n, нулите на който лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z\leqq 0$. Да положим

$$g(z)=L(f)=f''(z)+pzf'(z)+qf(z), \tag{13}$$

където реалните числа p и q удовлетворяват неравенствата (12). Трябва да докажем, че ако z_0 е произволна нула на полинома $g(z)$, то $\operatorname{Re} z_0 \leqq 0$. Да допуснем, че $\operatorname{Re} z_0>0$. От равенството

$$f''(z_0)+pz_0f'(z_0)+qf(z_0)=0,$$

за точката $\zeta=z_0-\frac{nf(z_0)}{f'(z_0)}$ от теоремата на Лагер получаваме

$$\zeta=\frac{np+q}{q}z_0+\frac{n}{q}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{z_0-a_j}, \tag{14}$$

където a_j, $j=1,2,\ldots,n-1$, са нулите на полинома $f'(z)$. Съгласно теоремата на Гаус — Люка точките a_j лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z\leqq 0$, съдържаща нулите на $f(z)$, и следователно точките $\frac{1}{z_0-a_j}$ при направеното предположение за z_0 лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z>0$. В такъв случай обаче от (14) и (12) заключаваме, че $\operatorname{Re}\zeta>0$. Тогава ще съществува окръжност C през точките z_0 и ζ и тя ще лежи изцяло в полуравнината $\operatorname{Re} z>0$. Съгласно теоремата на Лагер вътре в окръжността C, т. е. в полуравнината $\operatorname{Re} z>0$, ще има поне една нула на полинома $f(z)$, което противоречи на предположението, че всичките нули на $f(z)$ лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z\leqq 0$. Следователно нулите на полинома (13) лежат в областта $\operatorname{Re} z\leqq 0$. С това достатъчността на условието от теоремата е доказана, т. е. че линейният оператор (11) при условията (12) преобразува всеки хурвицов полином в хурвицов.

Остава да покажем още, че неравенствата (12) са и необходими, т. е. че ако p и q са реални числа, за които поне едно от тези неравенства не е изпълнено, то съществуват хурвицови полиноми от степен n, които под действието на линейния оператор (11) се преобразуват в нехурвицови. За целта, както при теорема 1, да разгледаме например полинома

$$f(z)=(z+a)^n,\quad a>0,$$

нулите на който лежат в полуравнината $\operatorname{Re} z\leqq 0$. За съответния полином $g(z)$ от (13) в случая ще получим

$$g(z)=(z+a)^{n-2}[(np+q)z^2-(np+2q)az+qa^2+n(n-1)].$$

Числото $z=-a$ се явява $(n-2)$-кратна нула на този полином, а останалите му две нули z_1 и z_2 съвпадат с корените на квадратното уравнение с реални коефициенти

$$(np+q)z^2-(np+2q)az+qa^2+n(n-1)=0.$$

Имаме

$$z_1 z_2 = \frac{qa^2 + n(n-1)}{np+q}.$$

При условие, че $q<0$ или $np+q<0$, от последното равенство се вижда, че положителното число a винаги може да бъде избрано така, че да е в сила неравенството $z_1 z_2 < 0$, т. е. числата z_1 и z_2 да са с противоположни знаци. Следователно ако p и q са реални числа, за които не са в сила едновременно неравенствата (12), то съществува хурвицов полином от степен n, такъв, че съответният полином $g(z)$ да не е хурвицов.

Като директно следствие от теорема 2 се явява следното твърдение:

Ако нулите на полинома $f(z)$ от степен n лежат по имагинерната ос и p, q са реални числа, за които са в сила неравенствата $q>0$, $np+q\geqq 0$, то нулите на полинома

$$g(z) = f''(z) + pzf'(z) + qf(z)$$

също лежат по имагинерната ос.

Ще отбележим, че към операторите от вида (11) спадат диференциалните оператори

$$L = \frac{d^2}{dz^2} - z\frac{d}{dz} + n,$$

съответствуващи на ермитовите полиноми. Тук $p=-1$, $q=n$ и неравенствата (12) очевидно са изпълнени. Следователно и диференциалните оператори, съответствуващи на ермитовите полиноми, преобразуват всеки хурвицов полином в хурвицов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Szegö, G. Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. — Math. Z., 1922, **13**, 28—55.
2. Walsh, J. On the location of the roots of types of polynomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1922, **24**, 163—180.
3. Kakeya, S. On algebraic equation having the roots of limited magnitude. — Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3), **3**, 1921, 94—100.
4. Grace, J. The zeros of a polynomial. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1902, **11**, 352—357.
5. Marden, M. The Geometry of the Zeros. New York, 1949.
6. Обрешков, Н. Върху някои теореми за нулите на реалните полиноми. — Изв. Мат. инст., БАН, **4**, № 2, 1960, 19—40.
7. Обрешков, Н. Върху някои алгебрични коварианти и нулите на полиноми. — Изв. Мат. инст. БАН, **7**, 1963, 89—126.
8. Обрешков, В. Нули на полиномите. С., 1963.
9. Дочев, К. Върху една теорема на Н. Обрешков. — Изв. Мат. инст. БАН, **6**, 1962, 83—88.
10. Дочев, К. О некоторых экстремальных свойствах полиномов и целых функций экспоненциального типа. — Mathematica, Cluj, **7** (30), 1965, No. 2, 205—209.
11. Дочев, К., Д. Димитров, Вл. Чуканов. Ръководство за упражнения по висша алгебра. С., 1972.

Постъпила на 21. II. 1973 г.

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Димитр Димитров

(Резюме)

Рассматривается линейный оператор L, определенный на линейном пространствие P_n многочленов степени $\leqq n$. Если L отображает многочлен Гурвица в такой же многочлен, оператор считается принадлежащим классу H_n, т. е. если нули многочлена $f(z) \in P_n$ находятся в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqq 0$, нули многочлена $g(z) = L(f)$ находятся в той же полуплоскости. В статье доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть n — натуральное число, a и b — действительные числа, для которых выполнено $a \neq 0$, $b \neq 1-n, 2-2n$. Необходимым и достаточным условием принадлежности линейного оператора

$$L = (z^2 + a) \frac{d^2}{dz^2} + bz \frac{d}{dz} - n(b+n-1)$$

классу H_n является удовлетворение числами a и b неравенств

$$a(b+n-1) < 0; \ (b+n-1)(b+2n-2) > 0.$$

В частности, условие теоремы удовлетворяется для линейных операторов

$$L = (z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} + 2(a+1)z \frac{d}{dz} - n(2a+n-1),$$

соответствующих ультрасферическим многочленам.

Теорема 2. Пусть p и q — произвольные числа и $q \neq 0$. Необходимым и достаточным условием принадлежности линейного оператора

$$L = \frac{d^2}{dz^2} + pz \frac{d}{dz} + q$$

классу H_n является удовлетворение числами p и q неравенств

$$q > 0; \ np + q \geqq 0.$$

В частности, условие теоремы удовлетворяется для линейных операторов

$$L = \frac{d^2}{dz^2} - z \frac{d}{dz} + n,$$

соответствующих многочленам Эрмита.

ON SOME DIFFERENTIAL OPERATORS OF SECOND ORDER

Dimitâr Dimitrov

(Summary)

We consider that a linear operator L, operating in the linear space P_n of polynomials of degree $\leq n$, belongs to the class H_n, if it transforms each Hurwitz' polynomial to a Hurwitz' one, that is always when the zeroes of the polynomial $f(z) \in P_n$ lie in the halfplane $\mathrm{Re}\, z \geqq 0$, the zeroes of the polynomial $g(z) = L(f)$ lie in the same halfplane.

The following theorems are proved:

Theorem 1. Let n be natural number and a and b be real numbers and $a \neq 0$, $b \neq 1-n$, $2-2n$. For the linear operator

$$L = (a+z^2)\frac{d^2}{dz^2} + bz\frac{d}{dz} - n(b+n-1)$$

to belong to the class H_n, it is necessary and sufficient that the numbers a and b should satisfy the inequalities

$$a(b+n-1)<0, \quad (b+n-1)(b+2n-2)>0.$$

In particular, the condition is satisfied for the differential operators

$$L = (z^2-1)\frac{d^2}{dz^2} + 2(a+1)z\frac{d}{dz} - n(2a+n-1), \; a>-1,$$

corresponding to the ultraspherical polynomials.

Theorem 2. Let p and q be real numbers and $q \neq 0$. For the linear operator

$$L = \frac{d^2}{dz^2} + pz\frac{d}{dz} + q$$

to belong to the class H_n, it is necessary and sufficient that the numbers p and q should satisfy the inequalities

$$q>0, \; np+q>0.$$

In particular, the condition of the theorem is satisfied for the differential operators

$$L = \frac{d^2}{dz^2} - z\frac{d}{dz} + n,$$

corresponding to Hermit polynomials.