БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

О $(n+1)$-ТКАНЯХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. В. Гольдберг

ВВЕДЕНИЕ

Пусть через каждую точку M открытой области D дифференцируемого многообразия X_{nr} размерности nr проходит одна и только одна поверхность каждого из $n+1$ семейств S_ξ $(n-1)r$-мерных поверхностей V_ξ $(\xi=0, 1, \ldots, n)$, причем в пределах области D поверхности одного семейства не пересекаются, а поверхности разных семейств в пределах области D или не имеют ни одной общей точки, или пересекаются по многообразию размерности $(n-2)r$. В таком случае будем говорить, что семейства S_ξ образуют в области D $(n+1)$-*ткань* $\mathfrak{W}$.

Случай $n=2$ изучался в работах [1, 2], $n=2$, $r=2$ — в работе [3], $r=1$ — в работах [4, 5, 6, 7], $r=1$, $n=2, 3$ — в монографии [8].

В настоящей работе впервые строится локальная теория $(n+1)$-тканей $(n-1)r$-мерных поверхностей на многообразии X_{nr} для любых r и $n>2$. В кратком виде без доказательств основные результаты этой статьи составили содержание нашей заметки [9].

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ $(n+1)$-ТКАНЕЙ

Семейства S_ξ поверхностей U_ξ $(\xi=0, 1, \ldots, n)$ определим вполне интегрируемыми системами пфаффовых уравнений

$$\underset{\xi}{\bar\omega}{}^i=0, \quad \xi=0, 1, \ldots, n; \quad i=1, \ldots, r.$$

Условия полной интегрируемости каждой из этих систем имеют вид:

$$d\underset{\xi}{\bar\omega}{}^i=\underset{\xi}{\bar\omega}{}^j\wedge\bar\omega^i_j. \tag{1}$$

Форм $\underset{\xi}{\bar\omega}{}^i$ всего $(n+1)r$. Независимых среди них на X_{nr} должно быть nr. Поэтому формы $\underset{\xi}{\bar\omega}{}^i$ связаны r зависимостями

$$\sum_{\xi=0}^{n}\underset{\xi}{x}{}^i_j\underset{\xi}{\bar\omega}{}^j=0, \tag{2}$$

где $\det|\underset{\xi}{x}{}^i_j|\neq 0$, поскольку любые n групп форм $\underset{\xi}{\bar{\omega}}{}^i$ линейно независимы и уравнения (2) должны быть разрешимы относительно любой из групп форм $\underset{\xi}{\omega}{}^i$, ξ — фиксировано. Сделаем замену базиса в кольце дифференциальных форм, положив $\underset{\xi}{\omega}{}^i=\underset{\xi}{x}{}^i_j\underset{\xi}{\bar{\omega}}{}^j$. Соотношения (2) тогда примут вид

$$\sum_{\xi=0}^{n}\underset{\xi}{\omega}{}^i=0, \tag{3}$$

а условия интегрируемости (1) — вид

$$d\underset{\xi}{\omega}{}^i=\underset{\xi}{\omega}{}^j\wedge\underset{\xi}{\omega}{}^i_j. \tag{4}$$

При этом формы $\underset{\xi}{\omega}{}^i$ допускают только согласованные преобразования вида

$$'\underset{\xi}{\omega}{}^i=A^i_j\underset{\xi}{\omega}{}^j, \tag{5}$$

сохраняющие соотношения (3).

Внешнее дифференцирование (3) с учетом (3) и (4) дает

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\underset{\alpha}{\omega}{}^j\wedge(\underset{\alpha}{\omega}{}^i_j-\omega^i_j)=0, \tag{6}$$

где $\omega^j_i=\underset{0}{\omega}{}^j_i$. Уравнения (6) означают, что формы $\underset{\alpha}{\omega}{}^j_i-\omega^j_i$ разлагаются по линейно независимым формам $\underset{\alpha}{\omega}{}^j$ $(\alpha=1,\ldots,n)$. Запишем эти разложения в виде

$$\underset{\alpha}{\omega}{}^i_j-\omega^i_j=\sum_{\beta=1}^{n}\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\underset{\beta}{\omega}{}^k. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), в силу независимости форм $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$ (а потому и произведений $\underset{\alpha}{\omega}{}^j\wedge\underset{\beta}{\omega}{}^k$, $\alpha\leqq\beta$), получим

$$\underset{\alpha\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\alpha\alpha}{a}{}^i_{kj},\quad \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{kj}\quad(\alpha\neq\beta). \tag{8}$$

В силу (4), (7), (8) имеем

$$d\underset{\alpha}{\omega}{}^i=\underset{\alpha}{\omega}{}^j\wedge\omega^i_j+\sum_{\beta\neq\alpha}\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\underset{\alpha}{\omega}{}^j\wedge\underset{\beta}{\omega}{}^k, \tag{9}$$

причем

$$\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{kj}. \tag{10}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (9) дает

$$-\underset{\alpha}{\omega}{}^j\wedge\Omega^i_j+\sum_{\beta\neq\alpha}\Delta\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\wedge\underset{\alpha}{\omega}{}^j\wedge\underset{\beta}{\omega}{}^k=0, \tag{11}$$

где

$$\Omega^i_j=d\omega^i_j-\omega^k_j\wedge\omega^i_k,$$

$$\Delta \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = \nabla \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n} (\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{mk} \underset{\gamma\alpha}{a}{}^m_{lj} + \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jm} \underset{\beta\gamma}{a}{}^m_{kl}) \underset{\gamma}{\omega}{}^l,$$

$$' \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = d \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} - \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{lk} \omega^l_j - \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jl} \omega^l_k \quad \underset{\alpha\beta}{a}{}^l_{jk} \omega^i_l.$$

Для разрешения кубичных уравнений (11) предположим, что

$$(12) \qquad \begin{cases} \Omega^i_j = \sum\limits_{\alpha,\beta} \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{jkl} \underset{\alpha}{\omega}{}^k \wedge \underset{\beta}{\omega}{}^l + \sum\limits_{\alpha} \underset{\alpha}{\theta}{}^i_{jk} \wedge \underset{\alpha}{\omega}{}^k + \Theta^i_j, \\ \Delta \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = \sum\limits_{\gamma} \underset{\alpha\beta\gamma}{a}{}^i_{jkl} \underset{\gamma}{\omega}{}^l + \underset{\alpha\beta}{\sigma}{}^i_{jk}, \end{cases}$$

где формы Пфаффа $\underset{\alpha}{\theta}{}^i_{jk}$, $\underset{\alpha\beta}{\sigma}{}^i_{jk}$ линейно выражаются через некоторые формы θ^a, дополняющие базис $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$, а в квадратичные формы Θ^i_j входят только произведения вида $\theta^a \wedge \theta^v$. Внося разложения (12) в кубические уравнения (11), мы найдем прежде всего, что

$$(13) \qquad \underset{\alpha\beta}{\sigma}{}^i_{jk} = \sigma^i_{jk}, \quad \sigma^i_{jk} = \sigma^i_{kj},$$

$$(14) \qquad \underset{\alpha}{\theta}{}^i_{jk} = -\sigma^i_{jk},$$

$$(15) \qquad \theta^i_j = 0.$$

Рассмотрим величины

$$a^i_{jk} = \sum_{\alpha,\beta} \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = 2 \sum_{(\alpha,\beta)} \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)},$$

где $\sum\limits_{(\alpha,\beta)}$ означает суммирование по всевозможным сочетаниям α, β. Каждая из величин a^i_{jk}, как показывают уравнения (12), за счет соответствующих форм σ^i_{jk} может быть приведена к нулю, при этом $\sigma^i_{jk} = 0$. В дальнейшем будем считать такое приведение выполненным, т. е,

$$(16) \qquad \sum_{(\alpha,\beta)} \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)} = 0,$$

$$(17) \qquad \sigma^i_{jk} = 0.$$

Из (14) и (17) имеем

$$(18) \qquad \underset{\alpha}{\theta}{}^i_{jk} = 0.$$

Кроме соотношений (13)—(15), из (11) и (12) получаются соотношения

$$(19) \qquad \begin{cases} \underset{\beta\beta}{b}{}^i_{j[kl]} = \underset{\alpha\beta\alpha}{a}{}^i_{j[kl]}, \quad \underset{\alpha\beta\beta}{a}{}^i_{[jkl]} = 0, \\ \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{jkl} = \underset{\gamma\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl} - \underset{\beta\gamma\alpha}{a}{}^i_{ljk}, \\ \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{[j|k|l]} + \underset{\alpha\beta\alpha}{a}{}^i_{[j|l|k]} = 0. \end{cases}$$

Учитывая (15), (17), (18), (19), равенства (12) можно переписать в виде

$$\Omega^i_j = \sum_{\alpha} \underset{\alpha}{a}{}^i_{jkl}\, \underset{\alpha}{\omega}{}^k \wedge \underset{\alpha}{\omega}{}^l + \sum_{(\alpha,\beta)} \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}\, \underset{\alpha}{\omega}{}^k \wedge \underset{\alpha}{\omega}{}^l, \tag{20}$$

$$\nabla \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = \sum_{\gamma} \Big(\underset{\alpha\beta\gamma}{a}{}^i_{jkl} + \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{mk}\, \underset{\gamma\alpha}{a}{}^m_{lj} + \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jm}\, \underset{\beta\gamma}{a}{}^m_{kl} \Big) \underset{\gamma}{\omega}{}^l, \tag{21}$$

причем

$$\begin{cases} \underset{\alpha}{a}{}^i_{jkl} = \underset{\gamma\alpha\alpha}{a}{}^i_{j[kl]}, & \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl} = \underset{\gamma\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl} - \underset{\beta\gamma\alpha}{a}{}^i_{ljk}, \\ \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]l} + \underset{\alpha}{a}{}^i_{ljk} = 0, & \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jkl]} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Дифференцируя внешним образом (16), мы получим также соотношения

$$2\sum_{\beta\neq\alpha} \underset{\alpha\beta\alpha}{a}{}^i_{(jk)l} + \sum_{\substack{(\beta,\gamma)\\ \beta\neq\gamma\neq\alpha}} \underset{\beta\gamma\alpha}{a}{}^i_{(jk)l} + \sum_{\gamma\neq\alpha} \Big(\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{m(k}\, \underset{\gamma\alpha}{a}{}^m_{j)l} + \underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{(j|m|}\, \underset{\alpha\gamma}{a}{}^m_{l\,k)} \Big)$$

$$+ \sum_{\beta,\gamma} \Big(\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{m(k}\, \underset{\alpha\beta}{a}{}^m_{|l|j)} + \underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{(j|m|}\, \underset{\gamma\alpha}{a}{}^m_{k)l} \Big) = 0. \tag{23}$$

Уравнения (21) и уравнения, получающиеся в результате продолжения (20), показывают, что величины $\{\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\}$, $\{\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}\}$ образуют тензоры. Будем называть их соответственно *тензорами кручения и кривизны* $(n+1)$-*ткани*. Равенства (20)—(22) показывают, что при $n>2$ тензор кривизны $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ выражается через пфаффовы производные тензора кручения и сам этот тензор, что отличает случай $n>2$ от случая $n=2$ (см. [1, 2]). Сформулируем теперь основную теорему об определении $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ на аналитическом многообразии X_{nr}.

Теорема 1. Пусть в области D аналитического многообразия X_{nr} заданы формы Пфаффа $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$, ω^i_j и тензоры $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}$, удовлетворяющие конечным соотношениям (10), (16), (22), (23), уравнениям структуры (9) и (20), условиям совместности (21) и получающимся в результате внешнего дифференцирования (20), (22), (23). Тогда при помощи систем уравнений Пфаффа $\underset{\alpha}{\omega}{}^i=0$, $\alpha=1,\ldots,n$, $\sum_{\alpha}\underset{\alpha}{\omega}{}^i=0$ в области D определяется единственная с точностью до аналитического преобразования $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$, для которой указанные тензоры служат тензорами кручения и кривизны.

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы Э. Картана об эквивалентности двух систем форм Пфаффа [10].

При $n=2$ уравнения (9) и (10) можно получить так же, как и в случае $n>2$. При этом мы будем иметь

$$\begin{cases} d\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\, \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k, \\ d\underset{2}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\, \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k, \end{cases} \tag{24}$$

где $a^i_{jk} = \underset{12}{a}{}^i_{jk}$ и условия (10) уже учтены. Если ввести формы

$$(25)\qquad \tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j+a^i_{jk}\underset{2}{\omega^k}-a^i_{kj}\underset{1}{\omega^k},$$

то уравнения (24) примут вид

$$(26)\qquad \begin{cases} d\underset{1}{\omega^i}=\underset{1}{\omega^j}\wedge\tilde{\omega}^i_j+a^i_{jk}\underset{1}{\omega^j}\wedge\underset{1}{\omega^k},\\ d\underset{2}{\omega^i}=\underset{2}{\omega^j}\wedge\tilde{\omega}^i_j-a^i_{jk}\underset{2}{\omega^j}\wedge\underset{2}{\omega^k}\end{cases}$$

и a^i_{jk} кососимметричны по нижним индексам. Точно такой же вид имели эти уравнения в [2] (см. уравнения (17) там), где изучался случай $n=2$. Из (24) и (26) видно, что при $n=2$ тензор кручения у нас совпадает с тензором кручения, введенным в [2]. Найдем, как при $n=2$ тензор кривизны работы [2] выражается через тензоры $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{\alpha\beta\gamma}{a}{}^i_{jkl}$. Имеем

$$(27)\qquad \tilde{\Omega}^i_j=d\tilde{\omega}^i_j-\tilde{\omega}^k_j\wedge\tilde{\omega}^i_k=(\underset{12}{a}{}^i_{jkl}+\underset{121}{a}{}^i_{jlk}-\underset{122}{a}{}^i_{kjl}+a^i_{km}a^m_{jl}-a^m_{kj}a^i_{ml})\underset{1}{\omega^k}\wedge\underset{2}{\omega^l}.$$

Сравнивая (27) с формулами (23) работы [2], находим выражение тензора кривизны b^i_{jkl} три-ткани:

$$(28)\qquad b^i_{jkl}=\underset{12}{a}{}^i_{jkl}+\underset{121}{a}{}^i_{jlk}-\underset{122}{a}{}^i_{kjl}+a^i_{lm}a^m_{jk}-a^m_{lj}a^i_{mk}.$$

§ 2. ИНВАРИАНТНАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, ПРИСОЕДИНЕННАЯ К $(n+1)$-ТКАНИ

Мы уже отмечали, что величины $\{\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\}$, $\{\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}\}$ при любых α, β образуют тензоры. Из (9) и (20) вытекает, что формы $\omega^J=\{\omega^i\}$ и

$$\omega^I_J=\begin{pmatrix}\omega^i_j & 0 & & 0\\ 0 & \omega^i_j & & 0\\ & & & \\ 0 & 0 & & \omega^i_j\end{pmatrix},\quad I,J=1,\dots,nr,$$

определяют аффинную связность [11]. Тензор кручения этой связности имеет вид

$$R^I_{JK}=\left\{\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\underset{12}{a}{}^i_{jk} & \cdot & \frac{1}{2}\underset{1n}{a}{}^i_{jk}\\ -\frac{1}{2}\underset{21}{a}{}^i_{jk} & 0 & & 0\\ & & & \\ -\frac{1}{2}\underset{n1}{a}{}^i_{jk} & 0 & & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{2}\underset{12}{a}{}^i_{jk} & & 0\\ \frac{1}{2}\underset{21}{a}{}^i_{jk} & 0 & & \frac{1}{2}\underset{2n}{a}{}^i\\ & & & \\ 0 & -\frac{1}{2}\underset{n2}{a}{}^i_{jk} & & 0\end{vmatrix},\ \dots\right\},$$

а тензор кривизны — вид

$$R^I_{JKL}=\begin{pmatrix} A & 0 & & 0 \\ 0 & A & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & . & A \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A=\begin{vmatrix} \underset{1}{a}^i_{jkl} & \frac{1}{2}\underset{12}{a}^i_{jkl} & & \frac{1}{2}\underset{1n}{a}^i_{jkl} \\ -\frac{1}{2}\underset{12}{a}^i_{jlk} & \underset{2}{a}^i_{jkl} & & \frac{1}{2}\underset{2n}{a}^i_{jkl} \\ & & & \\ -\frac{1}{2}\underset{1n}{a}^i_{jlk} & -\frac{1}{2}\underset{2n}{a}^i_{jlk} & & \underset{n}{a}^i_{jkl} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим поверхность V_a семейства S_a $(m+1)$-ткани $\mathfrak{M}$, проходящую через точку $M \in X_{nr}$. Эта поверхность определяется системой $\underset{a}{\omega}^i=0$. Уравнения (9) и (20) показывают, что на V_a

$$(29)\qquad \begin{cases} d\underset{\widehat{a}}{\omega}^i=\underset{\widehat{a}}{\omega}^j\wedge\omega^i_j+\sum\limits_{\widehat{\beta}\neq\widehat{a}} \underset{\widehat{a}\widehat{\beta}}{a}{}^i_{jk}\underset{\widehat{a}}{\omega}^j\wedge\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^k, \\ \Omega^i_j=\sum\limits_{\widehat{a}}\underset{\widehat{a}}{a}^i_{jkl}\underset{\widehat{a}}{\omega}^k\wedge\underset{\widehat{a}}{\omega}^l+\sum\limits_{(\widehat{a},\widehat{\beta})}\underset{\widehat{a}\widehat{\beta}}{a}{}^i_{jkl}\underset{\widehat{a}}{\omega}^k\wedge\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^l, \qquad \widehat{a},\ \widehat{\beta}\neq a. \end{cases}$$

Аналогично на поверхности V_0 семейства S_0, проходящей через ту же точку M, выполняются уравнения

$$\sum_{a=1}^{n}\underset{a}{\omega}^i=0,$$

$$(30)\qquad \begin{aligned} d\underset{\widehat{a}}{\omega}^i&=\underset{\widehat{a}}{\omega}^j\wedge\omega^i_j+\sum_{\widehat{\beta}\neq\widehat{a}}\underset{\widehat{a}\widehat{\beta}}{a}{}^i_{jk}\underset{\widehat{a}}{\omega}^j\wedge\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^k-\underset{\widehat{a}a}{a}{}^i_{jk}\underset{\widehat{a}}{\omega}^j\wedge\sum_{\widehat{\gamma}}\underset{\widehat{\gamma}}{\omega}^k, \\ \Omega^i_j&=\sum_{\widehat{a}}\underset{\widehat{a}}{a}^i_{jkl}\underset{\widehat{a}}{\omega}^k\wedge\underset{\widehat{a}}{\omega}^l+\underset{a}{a}^i_{jkl}\Big(\sum_{\widehat{\beta}}\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^k\Big)\wedge\sum_{\widehat{\gamma}}\underset{\widehat{\gamma}}{\omega}^l+\sum_{(\widehat{a},\widehat{\beta})}\underset{\widehat{a}\widehat{\beta}}{a}{}^i_{jkl}\underset{\widehat{a}}{\omega}^k\wedge\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^l \\ &-\sum_{(\widehat{a},a)}\underset{\widehat{a}a}{a}{}^i_{jkl}\underset{\widehat{a}}{\omega}^k\wedge\sum_{\widehat{\beta}}\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^l-\sum_{(a,\widehat{\beta})}\underset{a\widehat{\beta}}{a}{}^i_{jkl}\sum_{\widehat{\gamma}}\underset{\widehat{\gamma}}{\omega}^k\wedge\underset{\widehat{\beta}}{\omega}^l. \end{aligned}$$

Из (29) и (30) видно, что поверхности V_ξ ($\xi=0, 1, \ldots, n$) обладают, вообще говоря, отличными от нуля тензорами кручения и кривизны, которые являются подтензорами тензоров кручения и кривизны ткани $\mathfrak{M}$.

Найдем геодезические линии на многообразии X_{nr}, несущем $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$. Уравнения геодезических линий в пространстве аффинной связности X_{nr} в общем случае имеют вид (см. [12]):

$$d\omega^I+\omega^J\omega^I_J=\varphi\omega^I, \quad I, J=1, \ldots, nr.$$

В нашем случае в силу указанного выше строения форм ω^I эти уравнения распадаются на n групп:

$$(31)\qquad d\underset{a}{\omega}^i+\underset{a}{\omega}^j\omega^i_j=\varphi\underset{a}{\omega}^i$$

(здесь d — символ обычного дифференцирования). Уравнения (31) показывают, что поверхности V_ξ, определяемые на X_{nr} системами

$$\underset{a}{\omega^i}=0,\ a=1,\ldots,n;\quad \sum_a \underset{a}{\omega^i}=0$$

являются вполне геодезическими поверхностями на X_{nr}.

Установим теперь геометрический смысл форм связности ω^i_j. Для точки $M\in X_{nr}$ имеем

$$dM=\sum_a \underset{a}{\omega^i}\,\mathbf{e}_{ai}.$$

Продифференцировав внешним образом, получим отсюда

$$\sum_a\left(d\mathbf{e}_{ai}-\mathbf{e}_{aj}\omega^j_i-\mathbf{e}_{ak}\sum_{\beta\neq a}\underset{a\beta}{a}{}^k_{ij}\,\underset{\beta}{\omega^j}\right)\wedge\underset{a}{\omega^i}=0.$$

Если это квадратичное уравнение развернуть с помощью леммы Картана по линейно независимым формам $\underset{a}{\omega^i}$ и затем положить в полученных выражениях $\underset{a}{\omega^i}=0$, то получим

(32) $$\delta\,\mathbf{e}_{ai}=\omega^j_i(\delta)\,\mathbf{e}_{aj},$$

где через δ обозначен символ дифференцирования d при $\underset{a}{\omega^i}=0$. Равенства (32) означают, что формы ω^i_j при фиксированной точке M определяют согласованные инфинитезимальные перемещения n групп векторов $\mathbf{e}_{ai}$ касательного пространства T_{nr}.

При фиксированной точке M формы ω^i_j будут являться независимыми линейными комбинациями дифференциалов параметров A^i_j, входящих в уравнения (5) и определяющих конечные преобразования базисных форм ω^i (или, что то же, базисных векторов $\mathbf{e}_{\xi i}$).

§ 3. ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМЫЕ $(n+1)$-ТКАНИ

$(n+1)$-ткань $\mathfrak{W}$ назовем *параллелизуемой*, если ее можно отобразить на $n+1$ семейств параллельных $(n-1)$ r-мерных плоскостей аффинного пространства A_{nr}.

Теорема 2. Для того, чтобы $(n+1)$-ткань $\mathfrak{W}$ была параллелизуемой, при $n>2$ необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль ее тензор кручения $\underset{a\beta}{a}{}^i_{jk}$.

Для доказательства необходимости предположим, что $\mathfrak{W}$ параллелизуема, т. е., что ее можно отобразить на $n+1$ семейств параллельных $(n-1)r$-мерных плоскостей аффинного пространства A_{nr}. К каждой точке $M\in A_{nr}$ присоединим аффинный репер так, чтобы его векторы $\mathbf{e}_{\hat a i}$ $(\hat a\neq a,\ a=1,\ldots,n)$ лежали в плоскости a-го семейства, а векторы $\mathbf{f}_{\hat a i}=\mathbf{e}_{\hat a i}-\mathbf{e}_{ai}$ (где $\hat a\neq a$, a — любое фиксированное из чисел $1, 2,\ldots, n$) — в плоскости 0-го семейства, проходящих через точку M. Тогда

(33) $$dM=\sum_{a=1}^{n}\underset{a}{\omega^i}\,\mathbf{e}_{ai}$$

и семейства $(n-1)$ r-мерных плоскостей, составляющие $(n+1)$-ткань, задаются системами уравнений $\underset{a}{\omega}{}^i=0$, $a=1,\dots,n$; $\sum\limits_a\underset{a}{\omega}{}^i=0$.

Так как плоскости a-го семейства параллельны между собой, то

$$d\mathbf{e}_{ai}=\underset{a}{\omega}{}_i^j\mathbf{e}_{aj}. \tag{34}$$

В силу этих уравнений

$$d(\mathbf{e}_{\hat a i}-\mathbf{e}_{ai})=\frac{1}{2}(\underset{\hat a}{\omega}{}_i^j+\underset{a}{\omega}{}_i^j)(\mathbf{e}_{\hat a j}-\mathbf{e}_{aj})+\frac{1}{2}(\underset{\hat a}{\omega}{}_i^j-\underset{a}{\omega}{}_i^j)(\mathbf{e}_{\hat a j}+\mathbf{e}_{aj}).$$

Но плоскости 0-го семейства тоже параллельны между собой, а векторы $\mathbf{e}_{\hat a j}-\mathbf{e}_{aj}$, $\mathbf{e}_{\hat a j}+\mathbf{e}_{aj}$ линейно независимы. Поэтому

$$\underset{\hat a}{\omega}{}_i^j=\underset{a}{\omega}{}_i^j\overset{\text{def}}{=}\theta_i^j.$$

Теперь уравнения (34) принимают вид

$$d\mathbf{e}_{ai}=\theta_i^j\mathbf{e}_{aj}. \tag{35}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (33) и (35) приводит к уравнениям структуры параллелизуемой $(n+1)$-ткани:

$$d\underset{a}{\omega}{}^i=\underset{a}{\omega}{}^j\wedge\theta_j^i,\qquad d\theta_i^j=\theta_i^k\wedge\theta_k^j. \tag{36}$$

К такому виду нужно в случае параллелизуемой $(n+1)$-ткани привести уравнения (9) и (20). Уравнения (9) позволяют считать

$$\underset{a}{\omega}{}_i^j=\sum_{\beta\neq a}(\underset{a\beta}{a}{}^i_{jk}\underset{\beta}{\omega}{}^k+\underset{a\beta}{a}{}^i_{(jk)}\omega^k)+\underset{a}{\omega}{}_i^j.$$

Приравнивая эти формы, найдем, что $\underset{a\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{a\beta}{a}{}^i_{[jk]}=0$, откуда в силу (10) вытекает, что $\underset{a\beta}{a}{}^i_{(jk)}=a^i_{jk}$, а это в силу (16) означает, что $\underset{a\beta}{a}{}^i_{(jk)}=0$.

Таким образом, имеем

$$\underset{a\beta}{a}{}^i_{jk}=0. \tag{37}$$

При этом, поскольку при $n>2$, тензор кривизны выражается через $\underset{a\beta}{a}{}^i_{jk}$ и его пфаффовы производные, уравнения (20) тоже принимают вид (36).

Обратно, если имеют место равенства (37), то уравнения структуры ткани имеют вид (36). Но, как мы видели, такая структура реализуется на $(n+1)$-ткани, состоящей из $n+1$ семейств параллельных $(n-1)$ r-плоскостей аффинного пространства A_{nr}. Поэтому такая ткань параллелизуема.

С л е д с т в и е. Параллелизуемость $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ влечет параллелизуемость любой ее $(k+1)$-подткани $(k<n)$, высекаемой на пересечении каких-нибудь $n-k$ поверхностей ткани остальными $k+1$ ее поверхностями.

В самом деле, такая подткань задается или системой вида

(38) $$\omega^i_{\alpha_1}=0,\ldots,\omega^i_{\alpha_{n-k}}=0,$$

или системой вида

(39) $$\omega^i_0=0,\quad \omega^i_{\alpha_1}=0,\ldots,\omega^i_{\alpha_{n-k-1}}=0.$$

В случае (38) из (9) видно, что тензор кручения такой подткани — подтензор тензора кручения всей ткани и потому в случае параллелизуемости $\mathfrak{M}$ он равен нулю.

В случае (39) уравнения (9) можно представить в виде

(40) $$d\omega^i_{\widehat{\alpha}}=\omega^j_{\mu}\wedge\omega^i_{\widehat{\beta}\,j}+\sum_{\gamma\neq\widehat{\beta},\widehat{\alpha}}(a^{\;i}_{\widehat{\alpha}\gamma\,jk}-a^{\;i}_{\widehat{\beta}\gamma\,jk}-a^{\;i}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\,jk})\,\omega^j_{\widehat{\alpha}}\wedge\omega^k_{\gamma},$$

где $\omega^i_{\widehat{\beta}\,j}=\omega^i_j+\sum\limits_{\widehat{\gamma}\neq\widehat{\beta}} a^{\;i}_{\widehat{\beta}\gamma\,jk}\,\omega^k_{\gamma}$ и $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ принимают значения $1, 2,\ldots, n$, которые отличны от $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k-1}$, $\widehat{\beta}$ фиксировано и $\alpha\neq\widehat{\beta}$. Из (40) и (37) опять получаем заключение следствия.

Теорема 3. Рассмотрим $n-k+2$ поверхностей ткани $(2<k\leq n-1)$. Они определяют $C^2_{n-k+2}\,(k+1)$-подтканей. Если все эти $(k+1)$-подткани параллелизуемы, то и вся $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.

Указанные $n-k+2$ поверхностей ткани $\mathfrak{M}$ задаются системами

(41) $$\omega^i_{\alpha_1}=0,\ldots,\omega^i_{\alpha_{n-k+2}}=0$$

или системами

(42) $$\omega^i_0=0,\quad \omega^i_{\alpha_1}=0,\ldots,\omega^i_{\alpha_{n-k+1}}=0.$$

В случае (41) параллелизуемость указанных в теореме 3 подтканей означает, что $a^{\;i}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\,jk}=0$, где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ принимают значения, отличные от $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k+2}$ и любые два значения из $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k+2}$. Но это значит, что все $a^{\;i}_{\alpha\beta\,jk}=0$.

В случае (42), если взять те $(k+1)$-подткани, которые получаются на пересечении любых $n-k$ поверхностей из $n-k+1$ поверхностей $\omega^i_{\alpha_1}=0,\ldots,\omega^i_{\alpha_{n-k+1}}=0$, то из (9) и параллелизуемости таких подтканей мы получим, что $a^{\;i}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\,jk}=0$, где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ одновременно не равны числам $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k+1}$. Если же взять те $(k+1)$-подкани, которые получаются на пересечении поверхности $\omega^i_0=0$ и $n-k-1$ поверхностей из $n-k+1$ поверхностей $\omega^i_{\alpha_1}=0,\ldots,\omega^i_{\alpha_{n-k+1}}=0$, то, записав уравнения (9) в виде (40) и воспользовавшись параллелизуемостью таких подтканей и тем, что $a^{\;i}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\,jk}=0$, мы получим, что равны нулю и все остальные $a^{\;i}_{\alpha\beta\,jk}$, отличные от $a^{\;i}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\,jk}$.

В частном случае, когда $k=n-1$, получаем: если на трех фиксированных поверхностях $(n+1)$-ткани остальные поверхности ткани высекают параллелизуемые n-подткани, то $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.

§ 4. $(n+1)$-ТКАНИ С ПАРАТАКТИЧЕСКИМИ ТРИ-ПОДТКАНЯМИ

Рассмотрим координатные три-подткани $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$. Всего их C^3_{n+1}. Для C^2_n из них, а именно для три-тканей $[\alpha, \beta, 0]$, определяемых уравнениями $\underset{\gamma}{\omega^i}=0$ ($\gamma\neq\alpha, \beta$; α, β фиксированы) уравнения (9) можно записать в виде (ср. с (26)):

$$
(43)\qquad
\begin{cases}
d\underset{\alpha}{\omega^i}=\underset{\alpha}{\omega^j}\wedge\sigma^i_j+\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}\underset{\alpha}{\omega^j}\wedge\underset{\alpha}{\omega^k},\\
d\underset{\beta}{\omega^i}=\underset{\beta}{\omega^j}\wedge\sigma^i_j-\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}\underset{\beta}{\omega^j}\wedge\underset{\beta}{\omega^k},
\end{cases}
$$

где $\underset{\alpha\beta}{\sigma}{}^i_j=\omega^i_j+\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\underset{\beta}{\omega^k}-\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{kj}\underset{\alpha}{\omega^k}$ — формы связности, рассмотренные в [2]. Из (43) видно, что тензором кручения для этих три-подтканей служит тензор $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}$. Для остальных C^3_n три-подтканей $[\alpha, \beta, \gamma]$, уравнения которых $\underset{0}{\omega^i}=0$, $\underset{\delta}{\omega^i}=0$ ($\delta\neq\alpha, \beta, \gamma$; α, β, γ — фиксированы), уравнения (9) приводятся к виду

$$
(44)\qquad
\begin{cases}
d\underset{\alpha}{\omega^i}=\underset{\alpha}{\omega^j}\wedge\tau^i_j+(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]})\underset{\alpha}{\omega^j}\wedge\underset{\alpha}{\omega^k},\\
d\underset{\beta}{\omega^i}=\underset{\beta}{\omega^j}\wedge\tau^i_j-(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]})\underset{\beta}{\omega^j}\wedge\underset{\beta}{\omega^k},
\end{cases}
$$

где $\underset{\alpha\beta\gamma}{\tau}{}^i_j=\omega^i_j+(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}-\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{jk})\underset{\beta}{\omega^k}+(\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{jk}-\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{jk})\underset{\alpha}{\omega^k}$.

Из (44) видно, что тензором кручения для такой три-подткани служит тензор $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}=\underset{\alpha\beta\gamma}{A}{}^i_{jk}$.

Три-ткани с нулевым тензором кручения названы в [2] паратактическими три-тканями.

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием паратактичности координатных три-подтканей $[\alpha, \beta, 0]$ и $[\alpha, \beta, \gamma]$ являются соответственно равенства $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}=0$, $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}=0$.

Следствие. При $r=1$, т. е. для $(n+1)$-ткани из гиперповерхностей, любая из C^3_{n+1} три-подтканей является паратактической.

Рассмотрим 4-подткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$, определяемую системой $\underset{\delta}{\omega^i}=0$, $\delta\neq\alpha, \beta, \gamma$; α, β, γ — фиксированы). Из указанного выше строения тензоров кручения четырех три-подтканей такой 4-ткани вытекает

Теорема 5. Паратактичность любых трех три-подтканей, содержащихся в 4-ткани, влечет паратактичность четвертой три-подткани этой 4-ткани.

Мы доказали эту теорему только для 4-тканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$, но в силу равноправия семейств S_ξ она верна и для 4-тканей $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$, определяемых системой $\underset{0}{\omega^i}=0$, $\underset{\varepsilon}{\omega^i}=0$ ($\varepsilon\neq\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

§ 5. $(n+1)$-ТКАНИ С ГОЛОНОМНЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ 4-ПОДТКАНЕЙ

Рассмотрим 4-подткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$. Она имеет три распределения $(2r)$-плоскостей, определяемых системами $\underset{0}{\omega}^i+\underset{\varepsilon}{\omega}^i=0$, где $\varepsilon=\alpha, \beta, \gamma$. Будем эти распределения называть *диагональными.*

Найдем условия голономности каждого из этих распределений. Вместо $4r$ форм $\underset{0}{\omega}^i$, $\underset{\alpha}{\omega}^i$, $\underset{\beta}{\omega}^i$, $\underset{\gamma}{\omega}^i$, которые на 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ связаны r соотношениями $\underset{0}{\omega}^i+\underset{\alpha}{\omega}^i+\underset{\beta}{\omega}^i+\underset{\gamma}{\omega}^i=0$, целесообразно ввести $3r$ форм τ^i_α, τ^i_β, τ^i_γ, определяемых следующими уравнениями:

$$
(45)\qquad \left|\begin{array}{ll}
\underset{0}{\omega}^i=\tau^i_\alpha+\tau^i_\beta+\tau^i_\gamma, & \underset{\beta}{\omega}^i=-\tau^i_\alpha+\tau^i_\beta-\tau^i_\gamma,\\
\underset{\alpha}{\omega}^i=\tau^i_\alpha-\tau^i_\beta-\tau^i_\gamma, & \underset{\gamma}{\omega}^i=-\tau^i_\alpha-\tau^i_\beta+\tau^i_\gamma.
\end{array}\right.
$$

Из (45) следует, что

$$
(46)\qquad \left\{\begin{array}{l}
2\tau^i_\alpha=\underset{0}{\omega}^i+\underset{\alpha}{\omega}^i=-\underset{\beta}{\omega}^i-\underset{\gamma}{\omega}^i,\\
2\tau^i_\beta=\underset{0}{\omega}^i+\underset{\beta}{\omega}^i=-\underset{\gamma}{\omega}^i-\underset{\alpha}{\omega}^i,\\
2\tau^i_\gamma=\underset{0}{\omega}^i+\underset{\gamma}{\omega}^i=-\underset{\alpha}{\omega}^i-\underset{\beta}{\omega}^i.
\end{array}\right.
$$

Формы τ^i_α, τ^i_β, τ^i_γ на 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ будут линейно независимыми. Найдем условие голономности распределения

$$
(47)\qquad 2\tau^i_\alpha=\underset{0}{\omega}^i+\underset{\alpha}{\omega}^i=0.
$$

Дифференцируя (47) внешним образом, получим

$$
(48)\qquad d\tau^i_\alpha=\tau^j_\alpha\wedge\tau^i_{\alpha j}+\frac{1}{2}\big(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}\big)(\tau^j_\gamma\wedge\tau^k_\gamma-\tau^j_\beta\wedge\tau^k_\beta)+\big(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)}-\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{(jk)}\big)\tau^j_\beta\wedge\tau^k_\gamma,
$$

где $\tau^i_{\alpha j}=\omega^i_j+\frac{1}{2}\big(-\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}\big)\tau^k_\alpha+\big(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}-\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{(jk)}\big)\tau^k_\beta-\big(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(kj)}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}\big)\tau^k_\gamma$. Из (48) видно, что условия голономности диагонального распределения $\tau^i_\alpha=0$ имеют вид

$$
(49)\qquad \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)}=\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{(jk)},\quad \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}+\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}=0.
$$

Второе из соотношений (49) в силу (10) дает $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}=\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{[jk]}$. Поэтому соотношения (49) эквивалентны равенствам

$$
(50)\qquad \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{jk}.
$$

Аналогично условия голономности распределений $\tau^i_\beta=0$ и $\tau^i_\gamma=0$ на 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ имеют соответственно вид

$$
(51)\qquad \underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{jk},
$$

$$
(52)\qquad \underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\beta}{a}{}^i_{jk}.
$$

Теорема 6. Если на каждой из 4-подтканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ все три диагональных распределения голономны, то ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.

В самом деле, при условиях теоремы имеют место одновременно равенства (50)—(52), где α, β, γ — любые. Но эти равенства вместе с (10) дают $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}=\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]}=\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}=0$, а вместе с (16) $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)}=\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{(jk)}=\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{(jk)}=0$. Это значит, что $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}=0$ при любых α и β, т. е. ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.

Пусть на 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ голономны лишь два диагональных распределения из трех, например, $\underset{\alpha}{\tau}{}^i=0$ и $\underset{\beta}{\tau}{}^i=0$. Тогда имеют место соотношения (50) и (51). Из (50), (51) и (16) вытекает, что $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)}=\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{(jk)}=\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{(jk)}=0$. Кроме того, (50) и (51) дают $\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}=\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]}=-\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]}$. Если дополнительно потребовать, чтобы одна из три-подтканей 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ была паратактической, мы получим $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{jk}=0$, т. е. 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ параллелизуема. Заметим, что при $r=1$ любая три-ткань будет паратактической и потому голономность двух диагональных распределений при $r=1$ всегда влечет паратактичность третьего.

Отсюда вытекают следующие две теоремы.

Теорема 7. Если на 4-ткани $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ два диагональных распределения голономны и одна из три-подтканей паратактична, то третье диагональное распределение тоже голономно и 4-ткань параллелизуема.

Теорема 8. Если на каждой из 4-подтканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ два диагональных распределения голономны и одна из три-тканей паратактична, то $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ параллелизуема.

Рассмотрим теперь 4-подткань $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ и ее диагональные распределения $\underset{\lambda}{\omega}{}^i+\underset{\mu}{\omega}{}^i=0$, $\lambda, \mu=\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\lambda\neq\mu$. Вводя формы $\underset{\alpha}{\tau}{}^i$, $\underset{\beta}{\tau}{}^i$, $\underset{\gamma}{\tau}{}^i$ по формулам (45), (46), где индекс 0 надо заменить на δ, легко получить формулы, аналогичные формулам (48):

$$d\underset{\alpha}{\tau}{}^i=\underset{\alpha}{\tau}{}^j\wedge\underset{\alpha}{o}{}^i_j+\frac{1}{2}B^i_{[jk]}(\underset{\gamma}{\tau}{}^j\wedge\underset{\gamma}{\tau}{}^k-\underset{\beta}{\tau}{}^j\wedge\underset{\beta}{\tau}{}^k)+\frac{1}{2}B^i_{(jk)}\underset{\beta}{\tau}{}^j\wedge\underset{\gamma}{\tau}{}^k,$$

где $B^i_{jk}=\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}-\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{jk}+\underset{\delta\gamma}{a}{}^i_{jk}-\underset{\delta\beta}{a}{}^i_{jk}$.

Таким образом, условиями голономности диагонального распределения $\underset{\delta}{\omega}{}^i+\underset{\alpha}{\omega}{}^i=0$ будут соотношения $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}-\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{jk}+\underset{\delta\gamma}{a}{}^i_{jk}-\underset{\delta\beta}{a}{}^i_{jk}=0$. Если выписать условия голономности двух других диагональных распределений, то нетрудно убедиться в том, что для 4-тканей $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ справедливы утверждения, сформулированные в теоремах 6, 7, 8 для 4-тканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$.

§ 6. $(n+1)$-ТКАНИ С ГОЛОНОМНЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Обобщим рассмотрения § 5. Уравнения

$$\underset{0}{\omega}{}^i+\sum_{s=1}^{h}\underset{\alpha_s}{\omega}{}^i=0,\quad h<n, \tag{53}$$

или эквивалентные им в силу (3) уравнения

$$\sum_{t=h+1}^{n} \omega^i_{a_t} = 0 \tag{54}$$

определяют на всей $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ распределение $(n-1)r$-плоскостей. Каждая из этих плоскостей, как показывают уравнения (30) и (54), определяется векторами $e_{a_s i}$ и $e_{\gamma_t i} - e_{\delta_t i}$, $t \neq s$, $\gamma_t \neq \delta_t$, δ_t фиксировано. Назовем такое распределение *диагональным* для всей $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$ и будем обозначать его $\{a_1, \ldots, a_h\}$.

Из (54) и (9) вытекают следующие необходимые и достаточные условия голономности такого распределения:

$$a^{\,i}_{a_s\gamma_t\,jk} = a^{\,i}_{a_s\delta_t\,jk}. \tag{55}$$

Имеет место

Теорема 9. Голономность диагонального распределения $\{a\}$, определяемого системой $\omega^i_0 + \omega^i_a = 0$ (a — фиксировано), необходима и достаточна для голономности одного диагонального распределения любой из C^2_{n-1} 4-подтканей $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$.

Для доказательства надо сравнить соответствующие указанному распределению уравнения (55) с уравнениями (50).

Теорема 10. а) Если диагональные распределения $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ голономны и три-ткань $[\alpha, \beta, 0]$ паратактична, то диагональное распределение, определяемое системой $\omega^i_\alpha + \omega^i_\beta = 0$, голономно, а любая 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ или $[\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon]$ параллелизуема.

б) Если распределения $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ голономны, то распределение, определяемое системой $\omega^i_\alpha + \omega^i_\beta + \omega^i_\gamma = 0$, тоже голономно, а 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ параллелизуема.

в) Если распределения $\{a_1\}, \ldots, \{a_h\}$, $h < n$, голономны, то голономно и распределение, определяемое системой $\sum_{s=1}^{h} \omega^i_{a_s} = 0$.

Доказательство. а) Имеем $a^{\,i}_{\alpha\beta\,jk} = a^{\,i}_{\alpha\gamma\,jk}$, $a^{\,i}_{\beta\alpha\,jk} = a^{\,i}_{\beta\gamma\,jk}$ ($\gamma \neq \alpha, \beta$; α, β — фиксированы). Отсюда $a^{\,i}_{\gamma\alpha\,jk} = a^{\,i}_{\beta\alpha\,jk} = a^{\,i}_{\beta\alpha\,kj}$, $a^{\,i}_{\beta\gamma\,kj} = a^{\,i}_{\gamma\beta\,jk}$. Здесь использована паратактичность $[\alpha, \beta, 0]$, в силу которой $a^{\,i}_{\beta\alpha\,jk} = a^{\,i}_{\beta\alpha\,kj}$. Итак, $a^{\,i}_{\gamma\alpha\,jk} = a^{\,i}_{\gamma\beta\,jk}$, что в силу (55) эквивалентно голономности распределения $\omega^i_\alpha + \omega^i_\beta = 0$.

Любая 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ имеет три голономных диагональных распределения, а 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon]$ — два голономных диагональных распределения. Далее следует применить теоремы 6 и 7.

Заметим, что при условии голономности $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ вместо паратактичности $[\alpha, \beta, 0]$ можно требовать голономности распределения $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}\}$, $\gamma_j \neq \alpha, \beta$.

б) Имеем $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{jk}=\underset{\alpha\delta}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\delta}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\delta}{a}{}^i_{jk}$; α, β, γ фиксированы, $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta$. Отсюда $\underset{\delta\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\beta\delta}{a}{}^i_{jk}$ и $\underset{\delta\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\delta}{a}{}^i_{jk}$, поэтому $\underset{\beta\delta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma\delta}{a}{}^i_{jk}$ или $\underset{\delta\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\delta\gamma}{a}{}^i_{jk}$. Равенства $\underset{\delta\alpha}{a}{}^i_{jk}=\underset{\delta\beta}{a}{}^i_{jk}=\underset{\delta\gamma}{a}{}^i_{jk}$ в силу (55) означают голономность распределения $\underset{\alpha}{\omega}{}^i+\underset{\beta}{\omega}{}^i+\underset{\gamma}{\omega}{}^i=0$. Далее по теореме 9 4-ткань $[\alpha, \beta, \gamma, 0$ имеет три голономных диагональных распределения и потому по теореме 6 эта 4-ткань параллелизуема.

в) Доказательство аналогично первой части доказательства б).

Теорема 11. Голономность $n-1$ распределений $\{\hat{a}\}$, где $\hat{a}\neq a$, a фиксировано — необходимое и достаточное условие параллелизуемости $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$.

Эта теорема вытекает из эквивалентности условий (37) и условий (55), выписанных для всех $\hat{a}\neq a$.

Обобщим предыдущие рассмотрения. Система

$$(56)\qquad \underset{0}{\omega}{}^i+\sum_{a_1=1}^{k_1}\underset{a_1}{\omega}{}^i=0,\ \sum_{a_2=k_1+1}^{k_1+k_2}\underset{a_2}{\omega}{}^i=0,\ \ldots,\ \sum_{a_s=k_1+\ldots+k_{s-1}+1}^{k_1+\ldots+k_s}\underset{a_s}{\omega}{}^i=0,$$

где $k_1+\quad+k_s<n$, определяет распределение $(n-s)r$-мерных плоскостей. Из (9) легко может быть выведена

Теорема 12. Для голономности распределения (56) необходимо и достаточно выполнение равенств $\underset{a_1\beta_k}{a}{}^i_{jk}=\underset{a_1\gamma_k}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{\beta_t\delta_{t+1}}{a}{}^i_{jk}-\underset{\beta_t\varepsilon_{t+1}}{a}{}^i_{jk}=\underset{\gamma_t\delta_{t+1}}{a}{}^i_{jk}-\underset{\gamma_t\varepsilon_{t+1}}{a}{}^i_{jk}$, где $k=2,\ldots,s$; $t=2,\ldots,s-1$; $a_t, \beta_t, \ldots=k_1+\cdots+k_{t-1}+1,\ldots,k_1+$ $+k_t$, $k_0=0$, $\beta_t\neq\gamma_t$, $\beta_k\neq\gamma_k$, $\delta_{t+1}\neq\varepsilon_{t+1}$.

§ 7. ШЕСТИУГОЛЬНЫЕ $(n+1)$-ТКАНИ

$(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ назовем *шестиугольной*, если шестиугольны все ее C^3_{n+1} три-подтканей $[\xi, \eta, \zeta]$. Известно [2], что необходимым и достаточным условием шестиугольности три-ткани является обращение в нуль симметричной части ее тензора кривизны. Вид тензоров кривизны для три-тканей $[\alpha, \beta, 0]$, $[\beta, \gamma, 0]$, $[\gamma, \alpha, 0]$ находим из (28):

$$(57)\qquad \underset{\lambda\mu}{b}{}^i_{jkl}=\underset{\lambda\mu}{a}{}^i_{jkl}+\underset{\lambda\mu\lambda}{a}{}^i_{jlk}-\underset{\lambda\mu\mu}{a}{}^i_{kjl}+\underset{\lambda\mu}{a}{}^i_{lm}\underset{\lambda\mu}{a}{}^m_{jk}-\underset{\lambda\mu}{a}{}^m_{lj}\underset{\lambda\mu}{a}{}^i_{mk},$$

где пара индексов λ, μ принимает значения α, β; β, γ; γ, α.

Найдем тензор кривизны три-ткани $[\alpha, \beta, \gamma]$, определяемой уравнениями $\underset{0}{\omega}{}^i=0$, $\underset{\delta}{\omega}{}^i=0$ $(\delta\neq\alpha, \beta, \gamma)$. Для нее имеют место уравнения (44) и форма связности $\tau^i_j=\omega^i_j+(\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}-\underset{\alpha\gamma}{a}{}^i_{jk})\underset{\beta}{\omega}{}^k+(\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{jk}-\underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{jk})\underset{\alpha}{\omega}{}^k$. Отсюда находим

$$\overline{\Omega}{}^i_j=d\tau^i_j-\tau^k_j\wedge\tau^i_k=\underset{\alpha\beta\gamma}{b}{}^i_{jkl}\underset{\alpha}{\omega}{}^k\wedge\underset{\beta}{\omega}{}^l,$$

где тензор кривизны $\underset{\alpha\beta\gamma}{b}{}^i_{jkl}$ три-ткани $[\alpha, \beta, \gamma]$ имеет вид

$$
(58)\qquad \underset{\alpha\beta\gamma}{b}{}^i_{jkl} = 2\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]l} + \underset{\alpha\beta\alpha}{a}{}^i_{jlk} - \underset{\gamma\alpha\alpha}{a}{}^i_{ljk} + \underset{\gamma\alpha\gamma}{a}{}^i_{ljk} - \underset{\alpha\beta\beta}{a}{}^i_{kjl} + \underset{\beta\gamma\beta}{a}{}^i_{kjl} - \underset{\beta\gamma\gamma}{a}{}^i_{jlk} + \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{km} A^m_{jl}
$$

$$
- \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{ml} A^m_{kj} + \underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{mk} A^m_{lj} + \underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{lm} A^m_{kj} + \underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{mj} A^m_{kl} + \underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{jm} A^m_{lk} - 2A^i_{[k\,m} A^m_{jl]},
$$

$$
A^i_{jk} = \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{[jk]} + \underset{\beta\gamma}{a}{}^i_{[jk]} + \underset{\gamma\alpha}{a}{}^i_{[jk]}.
$$

Из (57) и (58) находим, что

$$
(59)\qquad \underset{\alpha\beta\gamma}{b}{}^i_{(jkl)} = \underset{\alpha\beta0}{b}{}^i_{(jkl)} + \underset{\beta\gamma0}{b}{}^i_{(jkl)} + \underset{\gamma\alpha0}{b}{}^i_{(jkl)}.
$$

Из равенства (59) вытекает

Теорема 13. Если C_n^2 три-тканей $[\xi, \eta, \zeta]$, где ζ — фиксированный индекс ($\xi, \eta, \zeta = 0, 1, \ldots, n$), шестиугольны, то и остальные C_n^3 три-тканей $[\xi, \eta, \varphi]$, $\varphi \neq \zeta$, а, значит, и $(n+1)$-ткань $\mathfrak{W}$, будут шестиугольными.

Эта теорема обобщает теорему Дюбурдье (для $r=1$, $n=2$ см. ее в [8] для $r=1$ — в [4]).

§ 8. ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ $(n+1)$-ТКАНИ

Из (33) вытекает, что векторы $\mathbf{e}_{ai}$ касаются r-поверхности $\bigcap\limits_{\hat a \neq a} V_{\hat a}$ (a — фиксировано). Поверхности 0-го семейства пересекают каждую из этих n поверхностей в точке и устанавливают тем самым между ними точечное соответствие, причем соответствующие линии на этих поверхностях касаются векторов с одинаковыми координатами. Эти соответствующие линии определяются уравнениями

$$
(60)\qquad \underset{a}{\omega}{}^i = \xi^i dt,\quad \underset{u}{\omega}{}^i = 0,\quad u \neq a,\quad a \text{ — фиксировано},
$$

а касательные векторы к ним $\boldsymbol{\xi}_a = \xi^i \mathbf{e}_{ai}$. Из (29) находим условия геодезичности каждой из линий (60):

$$
(61)\qquad \nabla \xi^i \overset{\mathrm{def}}{=} d\xi^i + \xi^j \omega^i_j = \varphi \xi^i.
$$

Из (29) и (61) вытекает, что если на одной из поверхностей $\bigcap\limits_{\hat a \neq a} V_{\hat a}$ взять геодезическую линию, то соответствующие линии на остальных $n-1$ поверхностях также будут геодезическими.

Рассмотрим n-поверхность W, проходящую через n соответствующих линий, т. е. огибающую n-вектор $[\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n]$. Ее уравнения

$$
(62)\qquad \underset{a}{\omega}{}^i = \xi^i \theta_a,
$$

а касательная n-плоскость определяется векторами $\boldsymbol{\xi}_a$. Поверхности V_ξ высекают на W $(n+1)$-ткань из $(n-1)$-мерных поверхностей. Дифференцируя (62), находим

(63) $$(\nabla\xi^i+\sum_{\beta\neq\alpha}\underset{\alpha\beta}{a^i}\theta_\beta)\wedge\theta_\alpha=-\xi^i d\theta_\alpha,$$

где $\underset{\alpha\beta}{a^i}=\underset{\alpha\beta}{a^i_{jk}}\xi^j\xi^k$ и /

(64) $$\sum_{\alpha,\beta}\underset{\alpha\beta}{a^i}=0.$$

Складывая равенства (63), написанные для всех α, получим

(65) $$\nabla\xi^i\wedge\left(\sum_\alpha\theta_\alpha\right)=-\xi^i d\left(\sum_\alpha\theta_\alpha\right).$$

Из (65) видно, что

(66) $$d\left(\sum_\alpha\theta_\alpha\right)=\left(\sum_\alpha\theta_\alpha\right)\wedge\theta.$$

Теперь (65) и (66) дают

(67) $$(\nabla\xi^i-\xi^i\theta)\wedge\left(\sum_\alpha\theta_\alpha\right)=0.$$

Из (67) находим, что

(68) $$\nabla\xi^i=\xi^i\theta+\lambda^i\sum_\alpha\theta_\alpha.$$

Запишем уравнения (9) и (16) для $(n+1)$-ткани на n-поверхности W:

(69) $$d\theta_\alpha\quad\theta_\alpha\wedge\omega+\sum_{\beta\neq\alpha}\underset{\alpha\beta}{a}\theta_\alpha\wedge\theta_\beta,$$

(70) $$\sum_{(\alpha,\beta)}\underset{\alpha\beta}{a}=0.$$

Из (69), (68) и (63) находим, что $\omega=\theta$ и

(71) $$\lambda^i+\underset{\alpha\beta}{a^i}=\xi^i\underset{\alpha\beta}{a}.$$

Суммируя по α и β все соотношения (71) в силу (64) и (70), получим

(72) $$\lambda^i\quad 0.$$

В силу (72) равенства (68) и (71) примут вид

(73) $$\nabla\xi^i=\xi^i\theta,$$

(74) $$\underset{\alpha\beta}{a^i_{jk}}\xi^j\xi^k=\xi^i\underset{\alpha\beta}{a}.$$

Теорема 14. n-поверхности W, пересекающие r-поверхности $\bigcap_{\widehat{a\neq\alpha}}V$ по линиям, отвечающим друг другу в указанном соответствии, являются вполне геодезическими на X_{nr}. Поверхности $(n+1)$-ткани $\mathfrak{W}$ высекают на W $(n+1)$-ткани, состоящие из $(n-1)$-мерных поверхностей, также вполне геодезических на X_{nr}.

Полная геодезичность W вытекает из того, что всякая линия на W может быть задана уравнениями $\underset{\alpha}{\omega^i}\quad\xi^i\underset{\alpha}{a}\varphi$ и в силу (73) является геодезической на X_{nr}. Аналогично всякая линия на пересечении W и V_α задается уравнениями $\underset{\alpha}{\omega^i}=0$, $\underset{\widehat{\alpha}}{\omega^i}=\xi^i\underset{\widehat{\alpha}}{a}\varphi$ и также в силу (73) является геодезической на X_{nr}.

Поверхности W, удовлетворяющие теореме 14, назовем *трансверсально-геодезическими поверхностями.*

Теорема 15. Векторы ξ_α, касательные к трансверсально-геодезической поверхности W, — собственные векторы для тензоров $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$, $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}, \ldots$

То, что это верно для тензора $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$, следует из (74). Покажем, что утверждение верно и для $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}$. Запишем продолжение уравнений (69):

(75) $$d\theta \quad \sum_{(\alpha,\beta)} \underset{\alpha\beta}{b}\,\theta_\alpha\wedge\theta_\beta, \quad \underset{\alpha\beta}{b}=\underset{\gamma\alpha\beta}{a}-\underset{\beta\gamma\alpha}{a},$$

(76) $$d\underset{\alpha\beta}{a}-\underset{\alpha\beta}{a}\theta \quad (\underset{\alpha\beta\alpha}{a}+\underset{\alpha\beta}{a}^2)\theta_\alpha+(\underset{\alpha\beta\beta}{a}+\underset{\alpha\beta}{a}^2)\theta_\beta+\sum_{\gamma\neq\alpha,\beta}[\underset{\alpha\beta\gamma}{a}+\underset{\alpha\beta}{a}(\underset{\beta\gamma}{a}+\underset{\gamma\alpha}{a})]\,\theta_\gamma.$$

Дифференцируя (74) и используя (75), (76), получим $\underset{\alpha\beta\gamma}{a}{}^i_{jkl}\xi^j\xi^k\xi^l \quad \underset{\alpha\beta\gamma}{a}\xi^i$, $\alpha \quad \beta$, и потому

(77) $$\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}\xi^j\xi^k\xi^l=\underset{\alpha\beta}{b}\xi^i,$$

где $\underset{\alpha\beta}{b}=\underset{\gamma\alpha\beta}{a}-\underset{\beta\gamma\alpha}{a}$, что и доказывает наше утверждение для $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}$.

Аналогично доказывается теорема и для последующих ковариантных производных от тензора кривизны.

$(n+1)$-ткань назовем *трансверсально-геодезической*, если любые n соответствующих направлений, выходящих из точки $M\in X_{nr}$, определяют трансверсально-геодезическую поверхность этой ткани.

Для такой ткани равенство (74) должно быть тождеством (то же должно быть и для (77), но в силу только что доказанного это уже будет выполняться автоматически). В равенстве (74) обе части должны быть второй степени относительно ξ^i, поэтому $\underset{\alpha\beta}{a}$ — линейная форма. Продифференцируем (74) по ξ^j, получим

$$2\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(jk)}\xi^k=\underset{\alpha\beta}{a}\,\delta^i_j+\frac{\partial \underset{\alpha\beta}{a}}{\partial\xi^j}\,\xi^i.$$

Свернем полученное равенство по i и j, будем иметь

$$2\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(ik)}\xi^k=r\underset{\alpha\beta}{a}+\underset{\alpha\beta}{a}.$$

Отсюда

(78) $$\underset{\alpha\beta}{a}=\underset{\alpha\beta}{a}_k\xi^k,$$

где $\underset{\alpha\beta}{a}_k=\dfrac{2}{r+1}\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{(ik)}$.

Подстановка (78) в (74) дает

(79) $$(\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{jk}-\delta^{i}_{j}\underset{\alpha\beta}{a_k})\,\xi^j\xi^k=0.$$

Из (79) вытекает

Теорема 16. Для того, чтобы $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ была трансверсально-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы симметричная часть тензора кручения ткани имела вид

(80) $$\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{(jk)}=\delta^{i}_{(j}\underset{\alpha\beta}{a}{}_{k)}.$$

Теорема 17. Для того, чтобы $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ была трансверсально-геодезической и все $(n+1)$-ткани, высекаемые поверхностями V_ξ на трансверсально-геодезических поверхностях W, были параллелизуемы, необходимо и достаточно, чтобы обращалась в нуль симметричная часть тензора кручения ткани:

(81) $$\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{(jk)}=0.$$

В самом деле, из (69) вытекает, что параллелизуемость всех указанных в теореме $(n+1)$-тканей эквивалентна выполнению равенств:

(82) $$\underset{\alpha\beta}{a}=0.$$

Из (82) и (78) вытекает, что $\underset{\alpha\beta}{a_k}=0$ и потому (80) дает (81). Обратно, из (81) следует трансверсальная геодезичность $\mathfrak{M}$ и $\underset{\alpha\beta}{a_k}=0$, т. е. $\underset{\alpha\beta}{a}$ 0, и все указанные в теореме $(n+1)$-ткани параллелизуемы.

Замечание. Параллелизуемость $(n+1)$-тканей на всех трансверсально-геодезических n-поверхностях W не влечет параллелизуемости $\mathfrak{M}$.

Следствие. Для того, чтобы $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ была параллелизуемой, необходимо и достаточно, чтобы она была трансверсально-геодезической, все $(n+1)$-ткани, высекаемые поверхностями V_ξ на трансверсально-геодезических поверхностях W, были параллелизуемы и C_n^2 три-подтканей $[\alpha, \beta, 0]$ были паратактическими.

Это следствие вытекает из теорем 4 и 17.

Тензор

(83) $$\underset{\alpha\beta}{h}{}^{i}_{jkl}=\underset{\alpha\beta}{a}{}^{i}_{(jkl)}+\underset{\alpha\beta\alpha}{a}{}^{i}_{(jkl)}-\underset{\alpha\beta\beta}{a}{}^{i}_{(jkl)}$$

назовем *тензором шестиугольности* $(n+1)$-ткани $\mathfrak{M}$. Обращение его в нуль при любых α, β эквивалентно шестиугольности $\mathfrak{M}$.

Пусть W—произвольная n-мерная трансверсально-геодезическая поверхность. Уравнения структуры ее имеют вид (69), (70), (75), (76). Тензор шестиугольности для $(n+1)$-ткани на W имеет вид

$$\underset{\alpha\beta}{h}=\underset{\gamma\alpha\beta}{a}-\underset{\beta\gamma\alpha}{a}+\underset{\alpha\beta\alpha}{a}-\underset{\alpha\beta\beta}{a}$$

и является квадратичной формой от координат векторов ξ_α : $\underset{\alpha\beta}{h}=\underset{\alpha\beta}{h_{kl}}\xi^k\xi^l$. Этот тензор обращается в нуль на тех трансверсально-геодезических поверхностях, координаты ξ^i векторов ξ_α которых удовлетворяют уравнениями

$$\underset{\alpha\beta}{h_{kl}}\xi^k\xi^l=0.$$

Пусть все такие n-мерные $(n+1)$-ткани на трансверсально-геодезических поверхностях W шестиугольные, тогда

$$h_{\alpha\beta\, kl}=0. \tag{84}$$

Далее пусть $\mathfrak{M}$ — трансверсально-геодезическая $(n+1)$-ткань. Тогда имеет место (69) и как дифференциальное следствие

$$a_{\alpha\beta\gamma}{}^{i}{}_{(jkl)}=\delta^{i}_{(j}\, a_{\alpha\beta\gamma\, kl)}$$

и потому

$$h_{\alpha\beta}{}^{i}{}_{jkl}=\delta^{i}_{(j}\, h_{\alpha\beta\, kl)}. \tag{85}$$

Из (84) и (85) вытекает, что

$$h_{\alpha\beta}{}^{i}{}_{jkl}=0, \tag{86}$$

т. е. $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ шестиугольная.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ — трансверсально-геодезическая шестиугольная $(n+1)$-ткань. Тогда имеют место равенства (85) и (86), откуда вытекает (84), т. е. все n-мерные $(n+1)$-ткани на трансверсально-геодезических поверхностях W шестиугольные. Доказана

Теорема 18. Для того, чтобы трансверсально-геодезическая $(n+1)$-ткань $\mathfrak{M}$ была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы для нее все n-мерные ткани на трансверсально-геодезических поверхностях W были шестиугольными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chern Shiing-Shen. Eine Invariantentheorie der 3-Gewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in R_{2r}. — Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg. 1936, II, 333—358.
2. Акивис, М. А. О три-тканях многомерных поверхностей. — Тр. геом. семин., 2, 1969, 7—31.
3. Bol, Y. Über 3-Gewebe im vierdimensionalen Raum. — Math. ann., **110**, 1935, 431—463.
4. Bartsch, H. Hyperflächengewebe des n-dimensionalen Raumes. — Annali di Matematica, **4**, 1951, Fasc. 32, 249—269.
5. Bartsch, H. Verallgemeinerung der Achtflachgewebeigenschaften auf Hyperflächengewebe des R_n. — Abhandl. math. Semin. Univ., Hamburg, 17, 1951.
6. Auc, H. $n+1$ Hyperflächenscharen im n-dimensionalen Raum — Mitt. Math. Ges. Hamburg, 7, 1938.
7. Jeger, M. Projektive Methoden in der Gewebengeometrie. — Comment. math. helv., **24**, 1950, 260—290.
8. Бляшке, В. Введение в геометрию тканей. Москва, 1959.
9. Гольдберг, В. В. О $(n+1)$-тканях многомерных поверхностей. — ДАН СССР (в печати).
10. Cartan, É. Oeuvres Complètes, pt. II, Paris, 1953, 722—745.
11. Лаптев, Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, № 2, 275—382.
12. Картан, Э. Пространства афинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

Поступила 21. II. 1973 г.

ВЪРХУ $(n+1)$-ТЪКАНИТЕ НА МНОГОМЕРНИТЕ ПОВЪРХНИНИ

В. Голдберг

(Резюме)

Върху диференцируемото многообразие X_{nr} с размерност nr се изучава $(n+1)$-тъкан на $(n-1)$ r-мерните повърхнини. Въведени са тензори на торзията и кривината на $(n+1)$-тъканта, установен е геометричният смисъл на анулирането им и на равенството между подтензорите на тензора на торзията. Изследвана е афинната свързаност, индуцирана върху X_{nr} на изучаваната тъкан. Отделени са и са изучени специални класове на $(n+1)$-тъкани: паралелизуемите, трансверзално-геодезичните, шестоъгълните и някои други $(n+1)$-тъкани.

ON THE $(n+1)$-WEBS OF MULTIDIMENSIONAL SURFACES

V. Goldberg

(Summary)

A $(n+1)$-web of $(n-1)r$-dimensional surfaces over the differentiable manifold X_{nr} of dimension nr is considered. Tensors of torsion and curvature of the $(n+1)$-web are introduced, the geometric meaning of their nullification and of the equality between the subtensors of the torsion tensor is found. Some special classes of $(n+1)$-webs are studied: parallelizable, transversal-geodesic, hexagonal and some others.