БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

EINFÜHRUNG VON $\Sigma_f(x)$ UND $\Pi_f(x)$ IN DER REKURSIVEN GITTERPUNKTARITHMETIK

Vladeta Vučković, Belgrad

1. In [1] haben wir die kommutative rekursive Arithmetik der teilweise geordneten Systeme mit $n \geq 2$ Nachfolgerfunktionen $S_\nu(x)$, die sich im wesentlichen als eine Gitterpunktarithmetik erwiesen hat, eingeführt und im Grundriss entwickelt. Am Ende haben wir als ein offenes Problem die Einführung der Funktionen Sigma $\Sigma_f(x)$ und Produkt $\Pi_f(x)$ gestellt. Hier wollen wir diese Funktionen rekursiv definieren und einige ihrer Eigenschaften anführen.

Wir setzen die Kenntnis des Artikels [1] voraus und verwenden im weiteren die dort eingeführten Bezeichnungen.

2. Die Schwierigkeit der rekursiven Definition z. B. der Funktion $\Sigma_f(x)$ wird dadurch verursacht dass $\Sigma_f(S_\nu x)$ aus $\Sigma_f(x)$ so gewonnen wird indem man zu der letzten Summe nicht nur $f(S_\nu x)$ addiert, sondern auch alle $f(y)$ für alle Gitterpunkte y die in einem Rechteck der Hyperebene, die durch $S_\nu x$ geht und die ν-te Koordinatenaxe orthogonal schneidet, liegen.

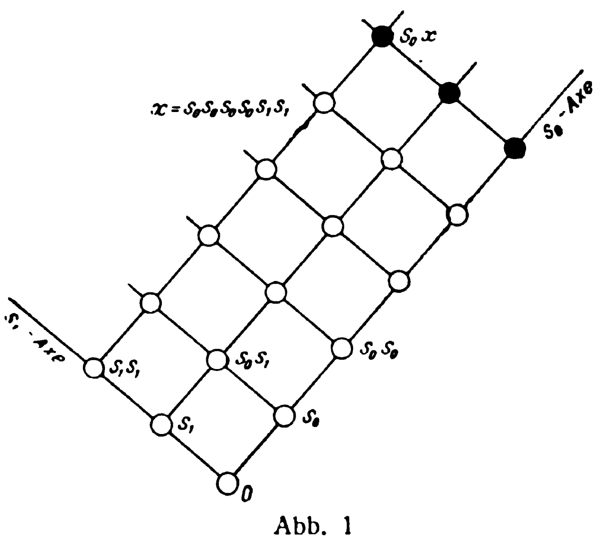

Abb. 1

Die Abb. 1 zeigt diesen Sachverhalt im zweidimensionalen Fall. Für $x = S_0S_0S_0S_0S_1S_1$ ist $\Sigma_f(x)$ die Summe der Werte aller $f(y)$ für die weissen Gitterpunkte y; $\Sigma_f(S_0x)$ enthällt noch die Werte $f(z)$ für alle schwarze

Gitterpunkte z. Diese Gitterpunkte liegen zwischen dem Punkte $S_0 x$ und seiner Projektion auf der S_0-Axe, inklusive diese zwei Punkte. Im dreidimensionalen Fall soll man alle Gitterpunkte aus einem analogen Rechteck in Betracht ziehen, also eine zweidimensionale Summe addieren und im n-dimensionalen Fall eine $(n-1)$-dimensionale Summe. Um $\Sigma_f(x)$ als n-dimensionale Summe definieren zu können braucht man also eine Darstellung des Gitterpunktes x durch seine Projektionen auf Koordinatenaxen und auch die Begriffe der 1-, 2-,..., $(n-1)$-dimensionalan Summen. Entsprechendes gilt bei $\Pi_f(x)$.

Wir betrachten nur der Fall einer endlichen Anzahl n der Nachfolgerfunktionen $S_\nu(x)$ (d. h. der Dimensionen).

3. Wir führen zuerst einige Hilfsfunktionen ein, und beginnen mit dem Sternprodukte $x * y$:

$$x * 0 = 0,$$

(3.1)

$$x \quad S_\nu y = x * y + x, \qquad v = 0,\ 1, \ldots, n-1.$$

Die Kommutativitätsbedingungen (2.3″) aus [1] sind offenbar erfüllt, weil hier $b_\nu(x, y, z) = z + x$ ist für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ und also

$$b_\nu(x,\ S_\mu y, b_\mu(x,\ y,\ z)) = b_\mu(x,\ S_\nu y,\ b_\nu(x,\ y,\ z)) = z + x + x.$$

Die Haupteigenschaften des Sternprodukts werden durch folgende Gleichungen erklärt (die ganz trivialen Beweise oder Gegenbeispiele geben wir nicht an):

(3.2) $$0 \quad x = 0,$$

(3.3) $$x * y \neq y \quad x,$$

(3.4) $$x \quad S_\nu = x, \quad \nu = 0,\ 1, \ldots, n-1,$$

(3.5) $$x \quad (y + z) = x \quad y + x \quad z,$$

(3.6) $$(x - y) \quad z = x \quad z + y \quad z,$$

(3.7) $$(x * y) * z = x \quad (y * z),$$

(3.8) $$x \,.\, (y \quad z) = (x \,.\, y) \quad z,$$

aber es gilt nicht $x * (y \,.\, z) = (x * y) \cdot z$.

Mit dem Sternprodukt definieren wir n Umwandlungsfunktionen $p_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ explizite durch

(3.9) $$p_\nu(x) = S_\nu \quad x.$$

Ihre rekursive Definitionen lauten

$$p_\nu(0) = 0,$$

(3.10)

$$p_\nu(S_\mu x) = S_\nu\, p_\nu(x), \quad \mu = 0,\ 1, \ldots, n-1.$$

Die Funktion $p_\nu(x)$ verwandellt jede Ziffer des Gitterpunktes x in die Ziffer S_ν. Es ist, zum Beispiel, $p_\nu(S_0 S_1 S_1) = S_\nu S_\nu S_\nu$.

Es gelten:

(3.11) $$p_\nu(y) * x = p_\nu(x) * y,$$

(3.12) $$p_\nu(x * y) = p_\nu(x) * p_\mu(y),$$
$$(\text{nicht aber} = p_\mu(y) * p_\nu(x) \quad \text{für } \mu \neq \nu),$$

(3.13) $$p_\nu(x \sigma_\mu y) = p_\nu(x) + p_\nu(y),$$

(3.14) $$p_\nu(x . y) = p_\nu(x) \quad p_\nu(y),$$

(3.15) $$x \dot{-} p_\mu(x) = x \dot{-} S_\mu p_\mu(x),$$

(3.16) $$S_\mu x \dot{-} p_\mu(S_\nu x) = x \dot{-} p_\mu(x).$$

(3.17) *Für* $\nu \neq \mu$ *gilt* $P_\nu(p_\mu(x)) = p_\mu(x)$, *wobei* $P_\nu(x)$ *die* ν*-te Vorläuferfunktion ist* ([1], (5.1)).

(3.18) $$\textit{Für } \nu \neq \mu \textit{ ist } S_\nu \dot{-} p_\mu(x) = S_\nu.$$

(3.19) $$\textit{Für } \nu \neq \mu \textit{ ist } S_\nu x \dot{-} p_\mu(x) = S_\nu \{x \dot{-} p_\nu(x)\}.$$

4. Mit den Funktionen $p_\nu(x)$ kann man jetzt die Projektionen $K_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, auf die Koordinatenaxen explizite einführen:

(4.1) $$K_\nu(x) = x \dot{-} \{p_0(x) + \cdots + p_{\nu-1}(x) + p_{\nu+1}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)\}.$$

Ihre Anfangsgleichungen lauten

(4.2) $$K_\nu(0) = 0.$$
$$K_\nu(S_\mu x) = \begin{cases} K_\nu(x) & \text{für } \mu \neq \nu, \\ S_\nu K_\nu(x) & \text{für } \mu = \nu. \end{cases}$$

Man beweist leicht

(4.3) $$K_\nu(K_\mu(x)) = \begin{cases} K_\nu(x) & \text{für } \mu = \nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

und die Darstellungsgleichung

(4.4) $$x = K_0(x) + K_1(x) + \cdots + K_{n-1}(x).$$

5. Die Darstellung (4.4) ermöglicht uns $(n-1)$ neue rekursive Definitionen einzuführen. (Wir beschränken uns auf den Fall der einen Variable, weil wir nur diesen brauchen).

Definition 5.1. *Seien* $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ *verschiedene natürliche Zahlen aus der Menge* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. *Wir sagen dass die Funktion* $f(x)$ *durch* ν*-dimensionale Rekursion definiert ist* $(1 \leq \nu \leq n-1)$ *wenn folgende* $(\nu+1)$*-Gleichungen vorhanden sind:*

(5.1) $$f\{x \dot{-} [K_{i_1}(x) + \cdots + K_{i_\nu}(x)]\} = a(x \dot{-} [K_{i_1}(x) + \cdots + K_{i_\nu}(x)]),$$
$$f(S_{i_\mu} x) = b_{i_\mu}(x, f(x)), \quad \mu = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Dabei sind $a(x)$ *und alle* $b_{i_\mu}(x, y)$ *schon eingeführte rekursive Funktionen, die den Bedingungen*

(5.2) $$b_{i_k}(S_j x, b_{i_j}(x, y)) = b_{i_j}(S_{i_k} x, b_{i_k}(x, v)),$$

für $j, k = 1, 2, \ldots, \nu$ *genügen.*

Am leichtesten ersieht man die Bedeutung dieser Definition bei der eindimensionalen Rekursion. Dann lauten die (in diesem Falle) zwei Gleichungen (5.1)

$$f(x-K_\nu(x))=a(x \dot{-} K_\nu(x)), \tag{5.3}$$

$$f(S_\nu x)=b_\nu(x, f(x)),$$

(ν ist eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$).

Wir wollen zeigen dass die Definition 5.1 zu keinem Wiederspruch führt, d. h. dass zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, die die gleichen ν-dimensionalen Anfangsgleichungen besitzen, eine und dieselbe Funktion seien, für die die Kommutativitätsbedingungen (2.3′) oder (2.3″) aus [1] gelten.

Zuerst zeigen wir, dass $f(x)$ durch (5.1) für alle x definiert ist.

Weil alle Projektionen von $x=0$ Null sind ergibt die erste der Gleichungen (5.1)

$$f(0)=a(0). \tag{5.4}$$

Wenn x keine Ziffer $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_\nu}$ enthält, ist $K_{i_1}(x)=K_{i_2}(x)=\cdots=K_{i_\nu}(x)=0$, also ist $f(x)$ wieder durch die erste der Gleichungen (5.1) definiert. Ist aber eines $K_{i_\mu}(x)$ für irgendwelches $1 \leq \mu \leq \nu$ von Nul verschieden so gilt

$$K_{i_\mu}(x)=S_{i_\mu}[K_{i_\mu}(x) \dot{-} S_{i_\mu}]$$

und, da $x=K_0(x)+\cdots+K_{n-1}(x)$, auch $x=S_{i_\mu}\{K_0(x)+\cdots+[K_{i_\mu}(x) \dot{-} S_{i_\mu}+\cdots+K_{n-1}(x)$. Dann ergibt sich $f(x)$ aus der $(\mu+1)$-ten der Gleichungen (5.1).

Jetzt zeigen wir: aus (5.1) und (5.2) folgt

$$f(S_i\, S_j\, x)=f(S_j\, S_i\, x) \tag{5.5}$$

für alle $i, j=0, 1, \ldots, n-1$.

Zum Beweis setzen wir $M_\nu=\{i_1, i_2, \ldots, i_\nu\}$. Ist $i \in M_\nu$ so gilt $f(S_i\, x)=b_i(x, f(x))$. Wenn auch $j \in M_\nu$ so gilt wieder $f(S_j\, x)=b_j(x, f(x))$ und aus (5.2) folgt (5.5).

Sei jetzt $i \in M_\nu$, aber $j \bar{\in} M_\nu$. Dann ist $f(S_i x)=b_i(x, f(x))$, aber $f(S_j x)$ kann man nicht gleich aus (5.1) entnehmen. Ist dazu $K_{i_1}(x)=K_{i_2}(x)=\cdots=K_{i_\nu}(x)=0$ so ist auch $K_{i_1}(S_j x)=K_{i_2}(S_j x)=\cdots=K_{i_\nu}(S_j x)=0$ und $f(S_j x)=a(S_j x)$. Dann ist $f(S_i S_j\, x)=b_i(S_j\, x, f(S_j\, x))=b_i(S_j\, x, a(S_j\, x))$. Doch in diesem Fall kann man nicht $f(S_j\, S_i\, x)$ gleich $a(S_j S_i\, x)$ nehmen, weil bei $S_j S_i\, x$ die i-te Projektion nicht Null ist. Deswegen schreibt man $S_j S_i\, x=S_i[S_j S_i\, x \dot{-} S_i]$ und bekommt $f(S_j S_i\, x)=b_i(S_j x, f(S_j x))$, also $=f(S_i S_j x)$. Ist aber ein $K_{i_\mu}(x)$, $(1 \leq \mu \leq \nu)$, von Null verschieden folgt (5.5) gleich aus (5.2).

Ähnlich wird der Fall $i \bar{\in} M_\nu$ und $j \in M_\nu$ erledigt.

Endlich, im Falle $i \bar{\in} M_\nu$ und $j \bar{\in} M_\nu$, unterscheide man wieder den Fall wo alle $K_{i_\mu}(x)$, $\mu=1, 2, \ldots, \nu$, Null sind und den Fall wo mindestens ein $K_{i_\mu}(x)$ von Null verschieden ist. Im ersten Fall ist $f(S_i S_j\, x)=f(S_j\, S_i x)=a(S_j\, S_i\, x)=a(S_i\, S_j\, x)$, weil $a(x)$ eine rekursive Funktion ist, die die Kommutativitätsbedingungen befriedigt. Im zweiten Fall verfährt man ähnlich wie im vorletzten.

Jetzt ist es leicht zu beweisen dass die ν-dimensionale Rekursion dem Unizitätsaxiom genügt. Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch dieselbe Anfangsgleichungen (5.1) definiert sind, folgt für alle x bei denen $K_{i_1}(x) = K_{i_2}(x) = \cdots = K_{i_\nu}(x) = 0$ ist, gleich aus der ersten der Gleichungen (5.1) $f(x) = \varphi(x)$. Für jene x, bei denen es nicht der Fall ist, entferne man zuerst alle Projektionen $K_{i_\mu}(x)$, $(1 \leq \mu \leq \nu)$, und aus der Gleichheit in diesem Falle schliesst man $f(x) = \varphi(x)$ durch sukzessive Addition der entfernten Ziffern, mittels der entsprechenden Gleichungen (5.1).

6. Jetzt können wir ein-, zwei-,..., $(n-1)$-dimensionale Summen durch finite Induktion nach der Anzahl der Dimensionen einführen.

Definition 6.1. *Sei i eine feste Zahl aus der Mange $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Die eindimensionale Summe „längs" der i-ten Koordinate, $\Sigma_f^i(x)$, ist durch l-dimensionale rekursive Definition*

$$\begin{aligned} &\Sigma_f^i[x \dot{-} K_i(x)] = f(x \dot{-} K(x)), \\ (6.1) \qquad & \\ &\Sigma_f^i(S_i x) = \Sigma_f^i(x) + f(S_i x), \end{aligned}$$

festgestellt.

(Wir betonen, dass i in der zweiten Zeile von (6.1) eine feste Zahl ist, dass also (6. 1) nur zwei Gleichungen enthält). Hier ist $b_\nu(x, y) = y + f(S_\nu x)$ nur für $\nu = i$ definiert, also sind die Bedingungen (5.2) trivialerweise erfüllt.

Definition (6. 2). *Seien i und j zwei feste verschiedene Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Die zweidimensionale Summe in der (i, j)-Ebene, $\Sigma_f^{i,j}(x)$, ist durch drei Gleichungen*

$$\begin{aligned} &\Sigma_f^{i,j}\{x \dot{-} [K_i(x) + K_j(x)]\} = f(x \dot{-} [K_i(x) + K_j(x)]), \\ (6.2) \qquad &\Sigma_f^{i,j}(S_i x) = \Sigma_f^{i,j}(x) = \Sigma_f^j(S_i x), \\ &\Sigma_f^{i,j}(S_j x) = \Sigma_f^{i,j}(x) + \Sigma_f^i(S_j x), \end{aligned}$$

festgelegt.

Man beweist leicht

$$(6.3) \qquad \Sigma_f^{i,j}(S_i S_j x) = \Sigma_f^{i,j}(S_j S_i x),$$

d. h. dass alle zweidimensionalle Summen die Kommutativitätsbedingungen (5.2) befriedigen.

Jetzt kann man allgemein die k-dimensionele Summen für $k \leq n-1$ definieren:

Definition 6.3. *Seien für $3 \leq k \leq n-1$ die $(k-1)$- und $(k-2)$-dimensionalen Summen*

$$(6.4) \qquad \sum_f^{i_1, \ldots, i_{k-1}}(x), \qquad \sum_f^{j_1, \ldots, j_{k-2}}(x),$$

wobei $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ bzw. $j_1, j_2, \ldots, j_{k-2}$ untereinander verschiedene Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ sind, für alle mögliche, untereinander verschiedenen, Werte dieser Zahlen durch $(k-1)$- bzw. $(k-2)$-dimensionale Rekursionen definiert.

Dann werden die k-dimensionalen Summen

$$\sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(x),$$

wobei $l_1, l_2, \ldots, l_k$ feste untereinander verschiedene Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ sind, durch folgende k-dimensionale Rekursion definiert:

$$(6.5)\qquad \begin{aligned} &\sum_f^{l_1, \ldots, l}\{x \dot{-} [K_{l_1}(x) + \cdots + K_{l_k}(x)]\} \\ &\quad = f\{x \dot{-} [K_{l_1}(x) + \cdots + K_{l_k}(x)]\}, \\ &\sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_\mu} x) = \sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(x) \\ &\quad + \sum_f^{l_1, \ldots, l_{\mu-1}, l_{\mu+1}, \ldots, l_k}(S_{l_\mu} x), \end{aligned}$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, k$.

Wir wollen zeigen, dass die Kommutativitätsbedingungen (5.2) erfüllt sind (unter der Voraussetzung dass es mit den Summen (6.4) schon der Fall sei).

Für $1 \leq p, q \leq k$ haben wir

$$\begin{aligned} \sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_p} S_{l_q} x) &= \sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_q} x) \\ &+ \sum_f^{l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_k}(S_{l_p} S_{l_q} x). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_q} x) = \sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(x) + \sum_f^{l_1, \ldots, l_{q-1}, l_{q+1}, \ldots, l_k}(S_{l_q} x)$$

und, nach der Voraussetzung der Kommutativität der $(k-1)$-dimensionalen Summen,

$$\begin{aligned} &\sum_f^{l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_k}(S_{l_p} S_{l_q} x) \\ &= \sum_f^{l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_k}(S_{l_p} S_{l_q} x) \end{aligned}$$

$$= \sum_f^{l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_k}(S_{l_p} x) + \sum_f^{l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_{q-1}, l_{q+1}, \ldots, l_k}(S_{l_q} S_{l_p} x)$$

Ähnlich wird $\sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_q} S_{l_p} x)$ zerlegt und dann leicht

$$\sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_p} S_{l_q} x) = \sum_f^{l_1, \ldots, l_k}(S_{l_q} S_{l_p} x)$$

bewiesen.

Endlich hat man

Definition 6.4. *Die Summe $\Sigma_f(x)$ wird als n-dimensionale Summe*

$$(6.6)\qquad \Sigma_f^{0, 1, \ldots, n-1}(x)$$

definiert.

Ihre Anfangsgleichungen lauten also:

$$\Sigma_f(0)=f(0),$$

(6.7) $$\Sigma_f(S_\nu x)=\Sigma_f(x)+\Sigma_f^{0,1,\ldots,\nu-1,\nu+1,\ldots,n-1}(S_\nu x),$$

$$\nu=0,\ 1,\ldots,n-1,$$

und es gilt offenbar

(6.8) $$\Sigma_f(S_\nu S_\mu x)=\Sigma_f(S_\mu S_\nu x).$$

Ähnlich wird das Produkt $\Pi_f(x)$ durch

$$\Pi_f(0)=f(0),$$

(6.9) $$\Pi_f(S_\nu x)-\Pi_f(x)\,.\,\Pi_f^{0,1,\ldots,\nu-1,\nu+1,\ldots,n-1}(S_\nu x),$$

$$\nu=0,\ 1,\ldots,n-1,$$

definiert, unter Voraussetzung dass ein-, zwei-, $\cdots$, $(n-1)$-dimensionale Produkte $\Pi_f^i(x)$, $\Pi_f^{i,j}(x),\ldots,$ $\Pi_f^{l_1,\ldots,l_{n-1}}(x)$ schon existieren. Diese werden durch Definitionen, die Analoga von Definitionen 6.2 und 6.3 sind, eingeführt.

7. Wir wollen auch $\underline{\Sigma}_f(x)$ und $\underline{\Pi}_f(x)$ d.h. Summe und Produkt aller $f(y)$ für diejenige y die „kleiner" als x sind kurz definieren.

Eindimensionaler Fall:

(7.1) $$\underline{\Sigma}_f^i[x \dot{-} K_i(x)]=0,$$
$$\underline{\Sigma}_f^i(S_i x)=\Sigma_f^i(x).$$

(7.1′) $$\underline{\Pi}_f^i[x \dot{-} K_i(x)]=f,$$
$$\underline{\Pi}_f^i(S_i x)=\Pi_f^i(x).$$

Zweidimensionaler Fall:

$$\underline{\Sigma}_f^{i,j}\{x \dot{-} [K_i(x)+K_j(x)]\}=0,$$

(7.2) $$\underline{\Sigma}_f^{i,j}(S_i x)=\underline{\Sigma}_f^{i,j}(x)+\underline{\Sigma}_f^j(S_i x),$$

$$\underline{\Sigma}_f^{i,j}(S_j x)=\Sigma_f^{i,j}(x)+\underline{\Sigma}_f(S_j x).$$

$$\underline{\Pi}_f^{i,j}\{x \dot{-} [K_i(x)+K_j(x)]\}=1,$$

(7.2′) $$\underline{\Pi}_f^{i,j}(S_i x)=\Pi_f^{i,j}(x)\ .\ \underline{\Pi}_f^i(S_i x),$$

$$\underline{\Pi}_f^{i,j}(S_j x)=\Pi_f^{i,j}(x)\quad \underline{\Pi}_f^i(S_j x).$$

k-dimensionaler Fall $(k\leq n-1)$:

$$\underline{\sum}_f^{i_1,\ldots,i_k}\{x \dot{-} [K_{i_1}(x)+\cdots+K_{i_k}(x)]\}=0,$$

(7.3)
$$\underline{\sum}_f^{i_1,\ldots,i_k}(S_{i_\nu}x)=\sum_f^{i_1,\ldots,i_k}(x)$$
$$+\underline{\sum}_f^{i_1,\ldots,i_{\nu-1},\,i_{\nu+1},\ldots,i_k}(S_{i_\nu}x),\quad \nu=1,\,2,\ldots,k.$$
$$\prod_f^{i_1,\ldots,i_k}\{x\dot{-}[K_{i_1}(x)+\cdots+K_{i_k}(x)]\}=1,$$

7.3′)
$$\underline{\prod}_f^{i_1,\ldots,i_k}(S_{i_\nu}x)=\prod_f^{i_1,\ldots,i_k}(x)\cdot\underline{\prod}_f^{i_1\ldots,i_{\nu-1},\,i_{\nu+1},\ldots,i_k}(S_{i_\nu}x),$$
$$\nu=1,\,2,\ldots,k.$$

Endlich, die im Beginne erwähnte Funktionen werden durch

$$\underline{\Sigma}_f(0)=0,$$

(7.4)
$$\underline{\Sigma}_f(S_\nu x)=\Sigma_f(x)+\underline{\Sigma}_f^{0,\,1,\ldots,\nu-1,\,\nu+1,\ldots,\,n-1}(S_\nu x),$$
$$\nu=0,\;1,\ldots.n-1,$$

und

$$\underline{\Pi}_f(0)=1,$$

(7.4′)
$$\underline{\Pi}_f(S_\nu x)=\Pi_f(x).\Pi_f^{0,1,\ldots,\nu-1,\,\nu+1,\ldots,\,n-1}(S_\nu x),$$
$$\nu=0,\;1,\ldots,n-1,$$

definiert.

Als ein Beispiel wollen wir die Gleichung

(7.5)
$$\Sigma_f(x)=\underline{\Sigma}_f(x)+f(x)$$

beweisen.

Der Beweis ist durch finite Induktion nach der Anzahl der Dimensionen zu führen.

Wir beweisen zuerst:

(7.6)
$$\Sigma_f^i(x)=\underline{\Sigma}_f^i(x)+f(x).$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit $F(x)$ und die rechte mit $\Phi(x)$ gilt:

$$F(x\dot{-}K_i(x)=f(x\dot{-}K_i(x))\quad\text{und}\quad F(S_ix)=F(x)+f(S_ix),$$
$$\Phi[x\dot{-}K_i(x)]=f(x\dot{-}K_i(x))$$
$$\text{und}\quad\Phi(S_ix)=\underline{\Sigma}_f^i(S_ix)+f(S_ix)=\Sigma_f^i(x)+f(S_ix)=\Sigma_f^i(S_ix)=F(S_ix).$$

Also ist $F(x)=\Phi(x)$.

Sei jetzt

(7.6′)
$$\sum_f^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x)=\underline{\sum}_f^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x)+f(x),\quad(k\leq n).$$

Wir werden beweisen, dass dann auch

$$(7.6'') \qquad \sum\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_k}(x) = \underline{\sum}\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_k}(x) + f(x)$$

gilt (i_ν und j_μ sind die Zahlen aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$). Bezeichnet man wieder die linke Seite mit $F(x)$ und die rechte mit $\Phi(x)$ hat man:

$$F\{x \dot{-} [K_{j_1}(x) + \cdots + K_{j_k}(x)]\} = f\{x \dot{-} [K_{j_1}(x) + \cdots + K_{j_k}(x)]\},$$

$$F(S_{j_\nu}x) = F(x) + \sum\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_{\nu-1},\, j_{\nu+1},\ldots,j_k}(S_{j_\nu}x),$$

$$\Phi\{x \dot{-} [K_{j_1}(x) + \cdots + K_{j_k}(x)]\} = f\{x \dot{-} [K_{j_1}(x) + \cdots + K_{j_k}(x)]\},$$

$$\Phi(S_{j_\nu}x) = \sum\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_k}(x) + \underline{\sum}\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_{\nu-1},\, j_{\nu+1},\ldots,j_k}(S_{j_\nu}x) + f(S_{j_\nu}x)$$

und nach der Induktionshypothese (7.6')

$$\Phi(S_{j_\nu}x) = \sum\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_k}(x) + \sum\nolimits_f^{j_1,\ldots,j_{\nu-1},\, j_{\nu+1},\ldots,j_k}(S_{j_\nu}x) = f(S_{j_\nu}x),$$

also gilt $F(x) = \Phi(x)$. Damit ist (7.5) bewiesen (mit $k = n$).

Ähnlich beweist man

$$(7.5') \qquad \Pi_f(x) = \underline{\Pi}_f(x) \,.\, f(x),$$

und die fundamentale Boolesche Gleichung

$$(7.6) \qquad 1 \dot{-} \Sigma_f(x) = \Pi_{1 \dot{-} f}(x).$$

8. Besitzt man die Funktionen Σ und Π so kann man, im Anschluss an §§10 und 11 aus [1], die begrenzte All- und Existentialoperatoren einführen. Dabei soll man im Anschluss an §10 die folgenden Definitionen nehmen ($\alpha_f(x)$ bezeichnet die Funktion $\alpha(f(x))$):

(8.1) $\qquad A_y^x[f(y)=0)$ *steht für die Gleichung* $\Sigma_{\alpha_f}(x) = 0$,

(8.1') $\qquad E_y^x[f(y)=0]$ *steht für die Gleichung* $\Pi_{\alpha_f}(x) = 0$.

Im Anschluss an die Interpretation aus §11 in [1] soll man doch folgende Definitionen gebrauchen:

(8.2) $\qquad A_y^x[f(y)=0]$ *steht für die Gleichung* $\Sigma_f(x) = 0$,

(8.2') $\qquad E_y^x[f(y)=0]$ *steht für die Gleichung* $\Pi_f(x) = 0$.

Diese Definitionen stimmen miteinander weil man

$$(8.3) \qquad \frac{\Sigma_f(x)=0}{\Sigma_{\alpha_f}(x)=0} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma_{\alpha_f}(x)=0}{\Sigma_f(x)=0},$$

und

$$(8.4) \qquad \frac{\Pi_f(x)=0}{\Pi_{\alpha_f}(x)=0} \quad \text{und} \quad \frac{\Pi_{\alpha_f}(x)=0}{\Pi_f(x)=0}$$

beweisen kann. Wir haben den leichten Unterschied vorgebracht nur aus den formalen Gründen, zwecks der Übereinstimmung mit den Definitionen der Operatoren & und $\bigvee$ des § 10 von [1], bzw. $\bigwedge$ und $\bigvee$ des § 11 von [1].

Man kann für diese Operatoren die üblichen logischen Relationen beweisen, z. B.:

(8.5) $$\sim A_y^x p(y) \equiv E_y^x \sim p(y),$$

(8.6) $$A_y^x [p(y) \wedge q(y)] \equiv A_y^x p(y) \wedge A_y^x q(y),$$

(8.7) $$E_y^x [p(y) \vee q(y)] \equiv E_y^x p(y) \vee E_y^x q(y),$$

(8.8) $$A_y^x [p(y) \supset q(y)] \supset [A_y^x p(y) \supset A_y^x q(y)],$$

(8.9) $$A_y^x [p(y) \supset q(y)] \supset [E_y^x p(y) \supset E_y^x q(y)],$$

und, ziemlich umständlich,

(8.10) $$A_y^x A_z^u p(y, z) \equiv A_z^u A_y^x p(y, z),$$

(8.11) $$E_y^x E_z^u p(y, z) \equiv E_z^u E_y^x p(y, z).$$

Wir haben uns dabei an die Interpretation des §11 aus [1] gehalten, und $p \equiv q$ für $p \supset q \ \wedge q \supset p$ geschrieben. Die Beweise der angeführten Aussagen (d. h. der Gleichungen, die sie darstellen) wollen wir hier nicht anführen, weil sie uns zu viel Platz entnehmen würden.

Math. Inst. der Serbischeu Akademie der Wiss. und Künste. Maschinenbaufakultät der Universität, Belgrad.

Eingegangen am 10 Januar 1961.

LITERATUR

[1] V. Vučković, Partially ordered recursive arithmetics. *Math. Scand.* 7 (1959), 305—320.

ВЪВЕЖДАНЕ НА $\Sigma_f(x)$ И $\Pi_f(x)$ В РЕКУРСИВНАТА АРИТМЕТИКА НА РЕШЕТКИТЕ

Вл. Вучкович (Белград)

(Резюме)

В работата се решава задачата за даване дефиниция на $\Sigma_f(x)$ и $\Pi_f(x)$ в рекурсивната аритметика на решетките, въведени в [1].

Първо се дава разлагането (4.4) на една точка x от решетката чрез координатите си $K_\nu(x)$. След това $\Sigma_f(x)$ се дефинира рекурсивно с въвеждане на едно, две,..., $(n-1)$-измерими суми

$$\Sigma_f^i(x), \Sigma_f^{i,j}(x), \ldots, \Sigma_f^{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}(x).$$

Аналогично с (6.9) се въвежда $\Pi_f(x)$, а със (7.3) и (7.3′) се въвеждат $\sum\limits_{Y<X} f(Y)$ и $\prod\limits_{Y<X} f(Y)$ (сума и произведение на всички $f(Y)$ за $Y<X$).

Като важно средство се използува една нова рекурсивна дефиниция, т. нар. ν-измерима рекурсия, $\nu=1, 2, \dots, n-1$.

ВВЕДЕНИЕ $\Sigma_f(x)$ И $\Pi_f(x)$ В РЕКУРСИВНУЮ АРИФМЕТИКУ РЕШЕТОК

В. Вучкович (Белград)

(Резюме)

В работе решается задача определения $\Sigma_f(x)$ и $\Pi_f(x)$ в рекурсивной арифметике решеток, введенных в [1].

Во-первых, дается разложение (4.4) одной точки x из решетки через ее координаты $K_\nu(x)$. Затем $\Sigma_f(x)$ определяется рекурсивно введением одномерных, двумерных, ..., $(n-1)$-мерных сумм

$$\Sigma_f^{i}(x),\ \Sigma_f^{i,j}(x), \dots,\ \Sigma_f^{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}(x).$$

Аналогично при помощи (6.9) вводится $\Pi_f(x)$, а при помощи (7.3) и (7.3′) вводятся $\Sigma_f(Y)$ и $\Pi_f(Y)$ (сумма и произведение всех $f(Y)$ для $Y<X$).

Как важное средство используется новое рекурсивное определение, так называемая ν-мерная рекурсия, $\nu=1, 2, \dots, n-1$.