

886  
СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ ПО  
ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

---

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО МЕХАНИКА

ЙОРДАНКА АЛЕКСАНДРОВА ИВАНОВА

**НОВИ ПРИЛОЖЕНИЯ  
НА ГЕОМЕТРИЧНИЯ МЕТОД НА ПОГОРЕЛОВ  
ЗА УСТОЙЧИВОСТ НА НЕЛИНЕЙНИ ЧЕРУПКИ**

№  
АВТОРЕФЕРАТ НА  
ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на научната степен  
"Доктор на науките по математика"

СОФИЯ, 1999 г.

Дисертационният труд има обем от 195 страници. Цитираната литература обхваща 261 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ в заседателната зала на Института по математика и информатика при БАН на открито заседание на Специализирания научен съвет по информатика и приложна математика при ВАК. Материалите са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Института по математика и информатика, София, .

СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ ПО  
ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

---

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО МЕХАНИКА

ЙОРДАНКА АЛЕКСАНДРОВА ИВАНОВА

**НОВИ ПРИЛОЖЕНИЯ  
НА ГЕОМЕТРИЧНИЯ МЕТОД НА ПОГОРЕЛОВ  
ЗА УСТОЙЧИВОСТ НА НЕЛИНЕЙНИ ЧЕРУПКИ**

АВТОРЕФЕРАТ НА  
ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на научната степен  
"Доктор на науките по математика"

Рецензенти:

СОФИЯ, 1999 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на 25.05.1999 г. от звено в състав: ст.н.с. I ст. дтн А. Балтов, ст.н.с. I ст. дтн Н. Бончева, проф. дтн В. Джупанов, ст.н.с. I ст. дфн Й. Бранков, Проф. дмн К. Марков, ст.н.с. I ст. дтн М. Миховски, проф. дмн Г. Станилов, ст.н.с. II ст. д-р В. Вълева, ст.н.с. II ст. д-р Р. Янков, ст.н.с. II ст. д-р Т. Ангелов, ст.н.с. II ст. д-р Г. Ганчев, ст.н.с. II ст. д-р С. Славчев, доц. д-р И. Миховски, ст.н.с. II ст. д-р Н. Петров, ст.н.с. II ст. д-р Е. Маноах, ст.н.с. II ст. д-р П. Динева, ст.н.с. II ст. д-р В. Василев, ст.н.с. II ст. д-р П. Кирязов, ст.н.с. II ст. д-р С. Стефанов, ст.н.с. II ст. д-р Л. Хаджиков.

Звеното е назначено със заповед № 047/10.05.1999 г. на Директора на Института по механика при БАН.

Дисертантът работи в Института по механика при БАН.

Изследванията са извършени в същия институт.

**Автор:** Йорданка Александрова Иванова  
**Заглавие:** Нови приложения на геометричния метод на Погорелов за устойчивост на нелинейни черупки  
**Тираж:** 100 броя  
**Печатна база:**



# ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИЯТА

## Актуалност и мотивировка на темата

Теорията на тънки черупки изучава свойствата на деформируеми тела със съществено малка дебелина по сравнение с останалите линейни размери на тялото. Следователно, за изследователите в тази област е ясно, че механичните характеристики на тънкостенната черупка зависят силно от геометричните свойства на средната и повърхнината. Така например, Маллок [1] още през 1908 г., изследвайки следкритичните деформации на цилиндрична тръба при осов натиск, за първи път формулира предположение, че формата на деформираната черупка е близка до изометрично преобразуване на недеформираната и първоначална конфигурация. При задачи за устойчивост на черупки, тази идея е била използвана от Кирсте (1954) [2], Йошимура (1955) [3], Пагсли (1960) [4].

С въвеждането на геометричен метод, предложен и развит от А. В. Погорелов (1962-66) в [5,6] при решаване на конкретни задачи за устойчивост на черупки, тази връзка на механичните характеристики на черупките и геометричните свойства на средната и повърхнината влиза явно в теорията и се явява модерно и ефективно средство при решаване на задачи за устойчивост на черупки. Вариационните принципи на геометричния метод - принцип *A* (за изследване на следкритични деформации и глобална устойчивост) и принцип *B* (за изследване на локална загуба на устойчивост) са формулирани от Погорелов главно за изотропни еластични и ограничено еластични черупки, като след това те са обобщени и широко прилагани при конкретни задачи. Това се вижда ясно от публикувания обзор [33], в който фигурират 167 реферирани статии. Силата на геометричния метод се крие в неговата яснота и нагледност, която в много случаи води до прости аналитико-асимптотични формули, удобни за практиката. Прехвърлянето на вариационните принципи за изследване на устойчивост на нелинейни геометрично и физично черупки би допринесло както за ефективно и бързо прогнозиране на критичните параметри на тези черупки, така и за изясняване на валидността на новите приложения на геометричния метод.

## Цел и структура на дисертацията

Целта на представената дисертация е да се разширят рамките на приложение на геометричния метод, по специално на вариационен принцип *A* за нови класове физически нелинеен материал на черупката: анизотропен, анизотропен еластичен с нелинейна памет, еласто-пластичен, както и да се покаже валидността на разширението (в асимптотичен смисъл). Обект на изследване са строго-изпъкнали и цилиндрични черупки, подложени на

различни видове натоварвания: статичен товар, комбиниран (динамичен и статичен) товар и аксиален (осов) удар. Основните методи са геометричния метод на Погорелов и асимптотичен анализ на нелинейните частни диференциални уравнения за изследваните класове черупки.

Дисертационният труд се състои от шест глави и списък на цитирана литература. Възприетата номерация на формулите е единна за всяка глава и включва тройно последователно номериране, както следва: номер на глава, параграф и формула. Графиките и таблиците са двойно номерирани - номер на глава и съответен пореден номер.

### ***Съдържанието на труда включва:***

Глава **първа**, в която се изследват следкритичните деформации на цилиндрични ортотропни еластични черупки на базата на модифициран вариационен принцип  $A$  [7] за анизотропни еластични черупки под действие на статични товари [8-9]. Получените долни критични товари са сравнени с експериментални данни. С помощта асимптотична оценка на енергията на средкритичните деформации за анизотропни черупки е показана валидността на хипотезата на Бергер [10], силно опростяваща нелинейните частни диференциални уравнения за съответния клас черупки.

Глава **втора**, в която е модифициран вариационен принцип  $A$  за изследване на глобална устойчивост на следкритичните деформации на анизотропни черупки с нелинейна памет [11], под действие на статични товари [12-14]. Използвана е Лапласова техника и е предложен метод за решаване на нелинейни интегрални уравнения за получаване на долните (минимални) критични товари за цилиндрични черупки под действие на аксиален (осов) натиск и усукване.

Глава **трета**, в която е модифициран вариационен принцип  $A$  за еласто-пластични следкритични деформации на черупки, под действие на статичен товар [15, 25]. На базата на асимптотична оценка на главните напрежения в околност на деформационните ребра на черупката, моменталното им пластифициране и запазване на това поведение по време на натоварването е предложена деформационната теория за описване на пластичните зони. Изследвано е устойчивото равновесие на следкритичните деформации на еласто-пластична цилиндрична черупка под аксиален натиск [15]. Получените резултати за долния критичен товар са сравнени с експериментални данни.

Глава **четвърта**, в която се изследва загуба на динамична устойчивост на анизотропни строго-изпъкнали и цилиндрични черупки, под действие на комбинирано натоварване - кратковременен динамичен импулс и постоянно действащ статичен товар от различно естество. Прилагат се балансните вариационни равенства, като новото е проведеното изследване на инфлексния характер на точката на динамичната загуба на устойчивост от графиката динамично натоварване – деформационен параметър [16-18]. Получени са връзка между критичните параметри на процеса и т.н. "неутрални" зони за изследваните класове черупки. Показано е сравнение с експеримент.

Глава **пета**, в която на базата на вариационния принцип на Хамилтън и геометричния метод на Погорелов са намерени критичните параметри на пластична, чувствителна към скоростите на деформация цилиндрична черупка, под действие на аксиален (осов) удар [19-22]. Разгледани са три устойчиви формообразувания на смачканата черупка: ососиметрично, неососиметрично и смесено. За неососиметричния случай е направено обобщение на изометричното преобразуване на Погорелов на цилиндрична повърхнина под действие на статичен товар за разглеждания случай на натоварване. Показано е сравнение с експериментални данни.

Глава **шеста** има спомагателен характер. В нея са дадени класовете от изометрични преобразования на началните повърхнини на изследваните черупки [5, 6, 22].

### **Обща характеристика на научните и научно-приложните приноси**

По-подробно приносите са дадени в авторската справка. Те могат да бъдат резюмирани в следното:

#### **Научни приноси:**

Основният вариационен принцип  $A$  в геометричната теория за глобална устойчивост на тънки еластични черупки е приложен за следните важни за практиката физически-нелинейни материали при външни статични натоварвания: материали с линейна наследственост, материали с еласто(анизотропни)-пластични свойства. Асимптотично е показана валидността и точността на приложение на хипотезите на геометричния метод към изследваните класове черупки. Геометричният метод е приложен към комбинирано и ударно натоварени черупки с ново виждане на явлението динамична (квазистатична) загуба на устойчивост и глобална устойчивост..

#### **Научно-приложни приноси:**

Резултатите за критичните параметри на изследваните класове черупки са аналитико-асимптотични, имат прост вид и са апробирани с експериментални данни. Получените сравнения дават убедеността за правотата на новите приложения на геометричния метод и за апробация на критичните параметри на тънкостенни конструкции в практиката.

# СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИЯТА

## ГЛАВА 1

### СЛЕДКРИТИЧНИ ДЕФОРМАЦИИ НА ТЪНКИ АНИЗОТРОПНИ ЧЕРУПКИ

В §1.1 на глава първа се разглеждат подробно въпросите за актуалността и мотивировката на темата на дисертационния труд, като за целта се прави обзор на получените досега резултати, използващи геометричния метод на Погорелов за изследване на устойчивост на черупки. От направения обзор се вижда голямата ефективност на основните хипотези на геометричния метод, както при решаване на редица конкретни задачи, така и при сравнение на получените теоретични резултати за критичните характеристики на процеса с експериментални данни. Параграфите на тази глава са посветени главно на приложението на вариационен принцип  $A$  за анизотропни еластични черупки.

В §1.2 се прави извод на приложението на вариационен принцип  $A$  за анизотропни еластични черупки [7, 41], като за целта към основните хипотези на геометричния метод се прибавят и ограничения за еластичните и коравинни модули на анизотропния материал на черупката, както следва:

#### **Предположение 1.**

Формата на деформираната средна повърхнина на черупката  $\bar{F}$  е близка до някакво изометрично преобразуване  $\tilde{F}$  на средната повърхнина на началната недеформирана повърхнина  $F$ .  $\tilde{F}$  удовлетворява граничните условия за  $F$ . Поради това, че следкритичните деформации се осъществяват при почти неизменяща се метрика, може да се предположи, че те са геометрични огъвания.

#### **Предположение 2.**

Ако се разглеждат само такива закрепвания на края на черупката, гарантиращи геометричното неогъване на средната ѝ повърхнина  $F$  в клас от регулярни повърхнини, то огъванията трябва да са нерегулярни. Предполага се, че изометричната повърхнина  $\tilde{F}$  е регулярна почти навсякъде, с изключение на деформационните линии (ребра)  $\tilde{\gamma} \in F$ .

#### **Предположение 3.**

При реално деформирани черупки тези ребра са изгладени и деформираната повърхнина  $\bar{F}$  е регулярна навсякъде. Предполага се, че деформацията на оглаждане на реброто  $\tilde{F} \Rightarrow \bar{F}$  е локализирана в достатъчно малка  $\varepsilon$ -околност на  $\tilde{\gamma}$ , т.е. има граничен ефект. Извън околността на  $\tilde{\gamma}$ , приближено се приема, че  $\bar{F}$  и  $\tilde{F}$  съвпадат до втори производни. По такъв начин, деформацията от  $F \Rightarrow \bar{F}$  приближено се приема като огъвания от  $F \Rightarrow \tilde{F}$  плюс оглаждаща деформация  $\tilde{F} \Rightarrow \bar{F}$ .



#### Предложение 4.

Горепосочените предложения се отнасят до геометрията на средната повърхнина на черупката и не се отнасят към механичните свойства на материала на черупката. За това се предполага, че те са валидни не само за изотропна еластична среда, но и за анизотропна среда, ако еластичните модули (аналогично коравинните модули) на съответния тензор  $K^{\alpha\beta\mu\nu}$  ( $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ ) са съизмерими помежду си при пренебрежимо малка дебелина на черупката  $h$ . Следователно са съизмерими не само еластичните и коравинните компоненти на съответните тензори, но е и задължително компонентите на коравинния тензор  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  да са от порядък  $O(h^3)$  на малката дебелина  $h$  по сравнение с компонентите на еластичния тензор  $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ , имащи порядък  $O(h)$ .

Тук ще дадем асимптотичната формула за енергията на следкритичните деформации за анизотропни черупки и паралелно ще отбележим, че формулировката на принцип  $A$  за еластични изотропни черупки се запазва, т.е.:

$$U(\tilde{F}) = \frac{1}{2} \iint_{\tilde{F}} D^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\mu\nu} dF + \int_{\tilde{\gamma}} K(s)^{1/4} D_{\gamma}^{(1111)3/4} \frac{\bar{\alpha}^{3/2}}{\rho^{1/2}} I(\tau) ds_{\gamma} + \int_{\tilde{\gamma}} \bar{\alpha} [D_{\gamma}^{(1111)} (\kappa_i + \kappa_e - 2\kappa_n) - 2D_{\gamma}^{(1122)} \kappa_{\gamma}] ds_{\gamma} \quad (1.2.21)$$

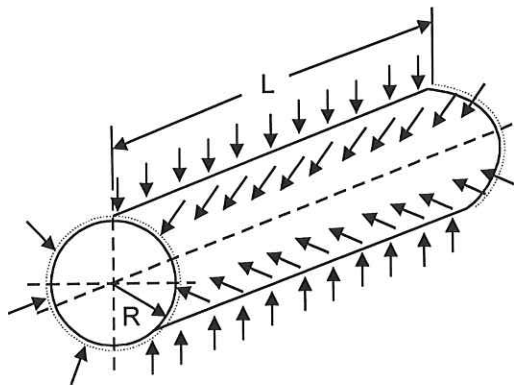
където  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  е тензорът на еластичните коравинни модули;  $\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}$  е тензорът на изменение на кривините, при преход на черупката от форма  $F$  към  $\tilde{F}$ ;  $\bar{\alpha}$ ,  $\rho$  са съответно ъгълът между тангенциалните равнини на  $\tilde{\gamma}$  и  $\tilde{F}$  и радиусът на кривина на  $\tilde{\gamma}$ ;  $k_n, k_{\gamma}$  са нормалните кривини на реброто  $\gamma$ ;  $I(\tau) = I(\infty)$  - при отдалечени ребра;  $K(s) = \frac{1}{\hat{K}_{\gamma(2222)}^{(-1)}} = \frac{1}{\hat{K}_{(2222)}^{(-1)}} \Big|_{s=0}$ ,  $K_{\gamma(2222)}^{(-1)}$  - тензор на еластичните

модули, индексът  $\gamma$  отдолу означава ориентацията на коравинните и еластични модули по посока  $\gamma$ . Работата  $A(\tilde{F})$  на действащия статичен товар се определя по стандартния начин. Изведеният вариационен принцип  $A$  ще бъде използван в §§1.3,1.4 за изследване на глобалната устойчивост на следкритичните деформации на цилиндрични ортотропни черупки.

Поставените задачи в §§1.3,1.4 за изследване на следкритичните деформации на цилиндрични черупки под действие на равномерно външно налягане и под действие на усукване се решават на два етапа, като на първия етап се определя енергията на следкритичните деформации  $U$  и работата  $A$ , произведена от външното налягане и съответно от усукване и след това, на базата на вариационен принцип  $A$  за анизотропни черупки се получават асимптотични аналитични формули за долните критични товари.

Вторият етап разглежда ефектът на сближаване на ребрата на деформираната черупка в случая на външно налягане, или ефектът, (което е аналогично) от влиянието на ГУ при сближаване на ребро към края на черупката. При тази уточнена постановка се извеждат формулите за долния критичен товар.

За ортотропна цилиндрична черупка под действие на равномерно външно налягане (Фиг. 1.2) в §1.3 са получени следните аналитични формули за долния критичен товар, при не вземане предвид влиянието на сближаване на две ребра (1.3.11) и при отчитане на това влияние (1.3.13), както следва [8]:



Фиг. 1.2

критичен товар, при не вземане предвид влиянието на сближаване на две ребра (1.3.11) и при отчитане на това влияние (1.3.13), както следва [8]:

I етап:

$$\bar{q}_i = \varepsilon \left[ \varepsilon^{-\frac{1}{6}} \frac{0.9}{\sqrt{\lambda}} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{(1-\nu_1\nu_2)^{\frac{3}{4}}} \right] \quad (1.3.11)$$

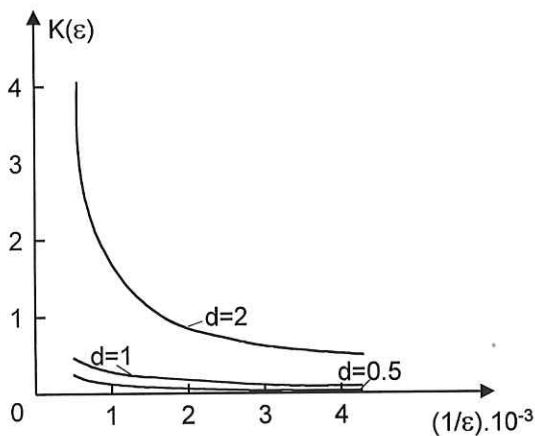
при  $\varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}; d = \sqrt{D^{1111} / D^{2222}}$

II етап:

$$\bar{q}_i = \bar{q}_e K(\varepsilon) \quad (1.3.13)$$

$$K(\varepsilon) = 0.3d^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \min_{\xi} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dJ^*}{d\xi} \right)$$

Поведението на  $K(\xi)$  в зависимост от еластичните характеристики на материала, а също зависимостта от  $\varepsilon$  е показана на Фиг. 1.4. Ще отбележим, че



Фиг. 1.4

в изотропния случай влиянието на сближаването на ребрата върху стойността на долния критичен товар, напълно съвпада с резултатите, получени в [6].

Ако във формула (1.3.11) разделим на горното критично натоварване, ще получим за отношението  $k_i = \bar{q}_i / \bar{q}_e$  следната формула:

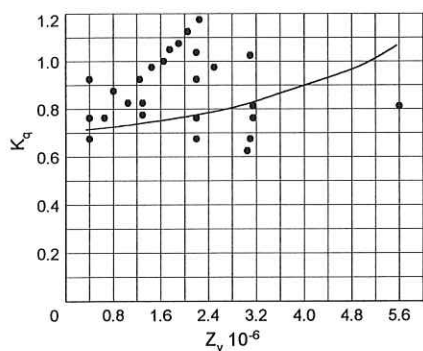
$$k_i = \varepsilon^{1/3} (1.16d^{1/3}), \quad \nu_1\nu_2 = 0.09 \quad (1.3.14)$$

Получената формула е сравнена с експериментални данни от [23, стр. 224]

за цилиндрични конструктивно ортотропни черупки, под действие на външно налягане. Черупките са оребрани по линиите на главните кривини на цилиндричната и повърхнина и следователно за пресмятането на еластичните характеристики се използват следните формули:

$$Z_y = Z \left( \frac{I_{shp}}{I_{st}} \right)^{3/2} \left( \frac{h_{shp}}{h_{st}} \right)^{1/2}; \quad Z = \frac{L^2}{R} \left( \frac{h_{shp}}{h_{st}} \right)^{1/2}; \quad h_{shp} = h_{st} \frac{E_1}{E_2}; \quad \frac{I_{shp}}{I_{st}} = \frac{E_1}{E_2}$$

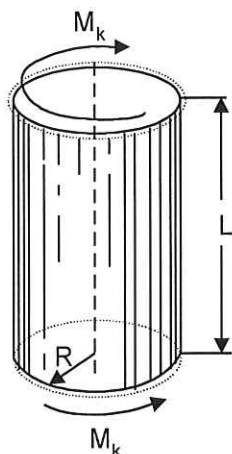
На Фиг. 1.5 е показано сравнението на резултатите по формула (1.3.14) (непрекъсната линия) с експерименталните данни (точки) от [23]. За цилиндричните черупки са взети следните геометрични и материални характеристики:



Фиг. 1.5

Сравнението е от порядъка на 15% по отношение на усреднената експериментална крива.

В §1.4 е получена следната формула [9] за ортотропна цилиндрична черупка под действие на усукване (Фиг. 1.6):



$$\min \bar{s} = s_i = \frac{0.027}{(1 - \nu_1 \nu_2)^{\frac{5}{8}}} d \left[ 4.15 + \frac{1.92}{\sqrt{d}} \right] \left( \frac{\delta R}{L^2} \right)^{\frac{1}{8}}$$

Стойността на долния критичен товар се определя по формулата:

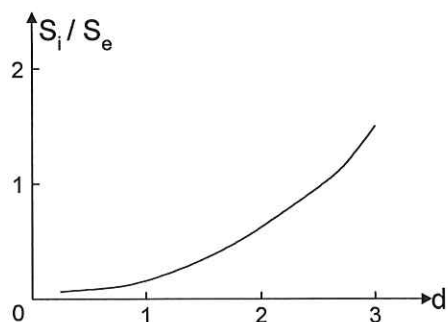
$$s_i = \bar{s}_i \sqrt{E_1 E_2} \frac{\delta}{R}$$

След нормиране по горния критичен товар  $s_e$  получаваме:

$$\frac{s_i}{s_e} = 0.036 d^2 \left[ 4.15 + \frac{1.92}{\sqrt{d}} \right] \quad (1.4.17)$$

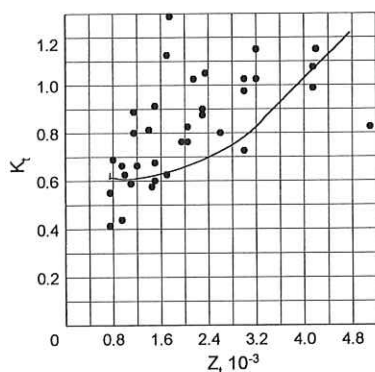
Фиг. 1.6

На Фиг.1.7 е дадено влиянието на параметъра  $d$  върху стойността на  $s_i / s_e$ . От (1.4.17) се вижда, че в изотропния случай (параметърът  $d$  е равен на единица) има пълно съвпадение с резултатите на А. В. Погорелов.



Фиг. 1.7

На Фиг.1.8 е показано сравнение на експериментални данни от [23, стр. 227] (точки) за конструктивно ортотропни черупки под действие на усукване с формула (1.4.17) (непрекъсната линия). За цилиндричните черупки са взети следните геометрични и материални характеристики:



Фиг. 1.8

$$Z_y = Z \left( \frac{I_{shp}}{I_{st}} \right)^{5/6} \left( \frac{h_{shp}}{h_{st}} \right)^{1/2}; \quad Z = \frac{L^2}{R} \left( \frac{h_{shp}}{h_{st}} \right)^{1/2}; \quad h_{shp} = h_{st} \frac{E_1}{E_2}; \quad \frac{I_{shp}}{I_{st}} = \frac{E_1}{E_2}$$

От Фиг. 1.8 се вижда, че сравнението с усреднената експериментална крива е в границите на 10-15%. Като се има предвид, че в глава първа се разглеждат физически ортотропни черупки, за които сравнение с конструктивно ортотропни черупки може да се направи само в границите на ортотропния параметър  $d = \sqrt{E_1 / E_2}$   $0.3 < d < 3$  (където е възможно размазване на ортотропията) сравнението е добро.

В последвалия §1.5 от глава първа се потвърждава хипотезата на Berger [10], използването на която силно опростява нелинейното разрешаващо частно диференциално уравнение за тънки еластични черупки, под действие на статичен товар, свеждайки го до линейно. Същността на хипотезата е пренебрегване, или равенство на константа на втория инвариант на тензора на деформация в съответното частно нелинейно частно диференциално уравнение, което води до следната опростена система уравнения:

$$\Delta \Delta w - \alpha^2 (\Delta w + 2k_1 w) = \frac{q}{D} \quad (1.5.5)$$

$$\frac{\alpha^2 h^2}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2k_1 w$$

където  $k_1$  е средната кривина на средната повърхнина. Прилагането на предпоставките на геометричния метод при извод на асимптотиката на енергията на следкритични деформации води до доказателство за правилността на предложената от Berger хипотеза (вторият инвариант на тензора на деформация е от порядък  $0(\varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon$  - малък параметър от порядък  $\sqrt{h}$ ). По този начин системата (1.5.5) може да се прилага към задачи за глобална устойчивост на тънки черупки под действие на статични товари.



## ГЛАВА 2

### СЛЕДКРИТИЧНИ ДЕФОРМАЦИИ НА ТЪНКИ ЕЛАСТИЧНИ ОРТОТРОПНИ ЧЕРУПКИ С ЛИНЕЙНА НАСЛЕДСТВЕНОСТ

В §2.1 на глава втора се прави обобщение на вариационен принцип  $A$  за тънки анизотропни черупки с линейно-наследствена памет под действие на статичен товар [11]. Към предпоставките на геометричния метод към анизотропни еластични черупки се прибавя и предположението, че главните линии на кривини на средната повърхнина на черупката съвпадат с главните линии на анизотропия на материала на черупката, както и с главните посоки на линиите на наследственост. В [36] се отбелязва, че при наличие на линейна наследственост теоремата, която е аналог на минимума на потенциалната енергия в теорията на еластичността е валидна само при следните условия:

**1.1.** Всички компоненти на тензора на деформация и изменение на кривините са функции на  $t$  и координатите на тялото и допускат разделяне на променливите.

**1.2.** Варирането на съответния функционал с функция зависеща само от координатите (или константа) е задължително.

Прехвърлянето на тези ограничения в теория на черупките, а по-специално при изследване на следкритичните деформации на тези конструкции, изисква и едно допълнително условие, отнасящо се до равновесните неустойчиви форми на средната повърхнина в следкритичен режим. Следкритичният режим е съпроводен с силно изменение на първоначалната форма на черупката и води до използване на геометрично нелинейните изрази за връзка между деформации и премествания. Освен това, смятаме, че анизотропията се запазва по време на деформационния процес. Предлага се следното допълнително предположение за изследвания клас черупки:

**1.3.** Доминиращата форма на средната повърхнина на черупката в следкритичен стадий в основно приближение зависи от еластичната деформация.

Основното предположение при прилагането на изометрично преобразуване, апроксимиращо деформираната повърхнина на черупката е, че механизмът на начало ( $t=0$ ) на действие на нелинейната памет се включва в околност на глобалната устойчивост. Може да се приеме, че следкритичната деформация се апроксимира достатъчно добре с предложеното изометрично преобразуване. За вида на образа на енергията на следкритичните деформации се получава следният израз:

$$U^*(Z) = \frac{1}{2} \iint_Z D^{*\alpha\beta\mu\nu} (\tilde{\kappa}_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\mu\nu})^* dF + \int_{\bar{\gamma}} \sqrt{\frac{(D^{*(1111)})^3}{K_{(2222)}^{*(-1)*}}} \left[ \sqrt{\frac{\alpha^5}{\rho}} c(\tau) \right]^* ds_{\gamma} + \int_{\bar{\gamma}} \left\{ D^{*(1111)} [\alpha(k_e + k_i - 2k)]^* - 2D^{*(1122)} (\alpha k_{\gamma})^* \right\} ds_{\gamma} \quad (2.1.6)$$

където  $\tilde{k}_{\alpha\beta}$  са главните изменения на нормалните кривини при преход от началната към изометричната форма на средната повърхнина на черупката;  $k$  е нормалната кривина на повърхнината  $F$  в посока съответно на реброто  $\tilde{\gamma}$ ;  $k_{e,i}$  са нормалните кривини на  $Z$  в посока перпендикулярна на  $\tilde{\gamma}$  за външната ( $_e$ ) и вътрешна ( $_i$ ) околност на реброто  $\tilde{\gamma}$ ;  $k_\gamma$  е нормалната кривина на повърхнината  $F$  в посока, съответна на  $\tilde{\gamma}$ ;  $c(\tau)$  се дава с формулата:

$$c(\tau) = \frac{I(\tau)}{\sqrt{[12(1-v^2)]^3}}, \quad I(\tau) = \int_0^\tau (v'^2 + u^2) ds \quad \text{при} \quad u'^2 + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

В §2.1 е приложен вариационен принцип А за анизотропни черупки с линейна наследственост [11]:

Основната част от следкритичната деформация на еластичната анизотропна с линейна наследственост черупка под действие на дадено натоварване е близка до тази форма на изометричното преобразуване на началната и повърхнина, която дава стационарна стойност на функционала:

$$W^* = U^*(\bar{F}) - A^*(\bar{F})$$

Този функционал е дефиниран върху изометрични преобразувания на средната повърхнина на черупката. Слагаемото  $U^*(\bar{F})$  се определя с формула (2.1.6), а  $A^*(\bar{F})$  е образа на работата на външния товар.

В §2.2 на същата глава са изследвани следкритичните деформации на тънки ортотропни цилиндрични черупки с наследствена памет, под действие на осов натиск. Ядрата на пълзене са от експоненциален тип. В следващите параграфи на тази глава са разгледани поотделно влиянието на параметъра на пълзене  $\gamma$  съответно при линеаризация по параметъра  $\gamma$  [12] и при отчитане на нелинейното му въздействие върху долното критично натоварване [13]. При прилагане на вариационния принцип А се използва Лапласова техника и се дава итеративен алгоритъм за приближено решаване на нелинейни интегрални уравнения, като последните се свеждат до решаване на интегрално уравнение тип Волтера и алгебрично уравнение. Получените оригинали за долния критичен товар с линеаризирано влияние на параметъра на пълзене  $\gamma \ll 1$  и с нелинейно влияние на параметъра на пълзене  $\gamma \leq 1$ , изразено чрез параметрите на пълзене на ядрата на наследствената памет  $\alpha$  и  $\beta$  се записват в следния вид:

$$q_i^{vel} = q_i^{el} \left( 1 - \frac{1}{2} \gamma t + \dots \right) \quad (2.2.11)$$

$$k^2 = 1 + \frac{(\beta - \alpha)}{\alpha(1 - \beta)} + \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) - \frac{(1 - \alpha)}{\alpha(1 - \beta)} \exp[(1 - \beta)t] \quad (2.3.21)$$

където  $k^2 = \frac{q_i^{vel}}{q_i^{el}}$ .

Получените стойности за  $k$  и  $t_{cr}$  са представени в Табл. 2.2. Наблюдава се леко покачване на критичния товар при изменение на параметърът  $\beta$ , докато

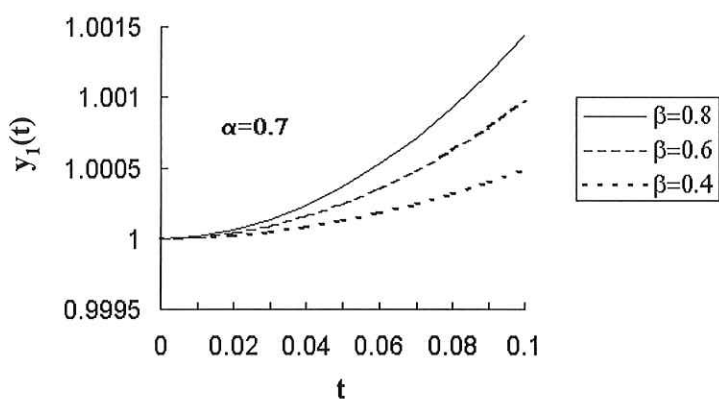
изменението на параметърът  $\alpha$  при фиксирано  $\beta$  води до намаляване на стойността на критичния товар.

**Таблица 2.1**

$\alpha$	$\beta$	$t_{кр}$
0.1	0.4	0.097
	0.6	0.098
	0.8	0.099
0.2	0.4	0.1915
	0.6	0.1945
	0.8	0.1975
0.4	0.6	0.3922
	0.8	0.4023

**Таблица 2.2**

$\alpha$	$\beta$	$k$
0.1	0.4	0.27
	0.6	0.34
	0.8	0.36
0.2	0.4	0.12
	0.6	0.145
	0.8	0.32
0.4	0.6	0.135
	0.8	0.185



**Фиг. 2.1**

В §2.4 на втора глава вариационен принцип  $A$  се прилага при изследване на цилиндрични ортотропни черупки с нелинейна памет под действие на усукване [14]. Използвайки методиката от §2.3 за решаване на полученото нелинейно интегрално уравнение и след линеаризация в околност на  $t = 0$ , за долния вискозо-еластичен критичен товар получаваме:

$$\frac{\bar{s}_i^{ve}}{\bar{s}_i^e} = 1 + \frac{1}{2} \frac{t}{\beta} - \frac{2.075 + \frac{0.28}{\sqrt{d}} \frac{\beta - \alpha}{\alpha \beta}}{4.15 + \frac{1.92}{\sqrt{d}}} t + O(t^2) \quad (2.4.18)$$

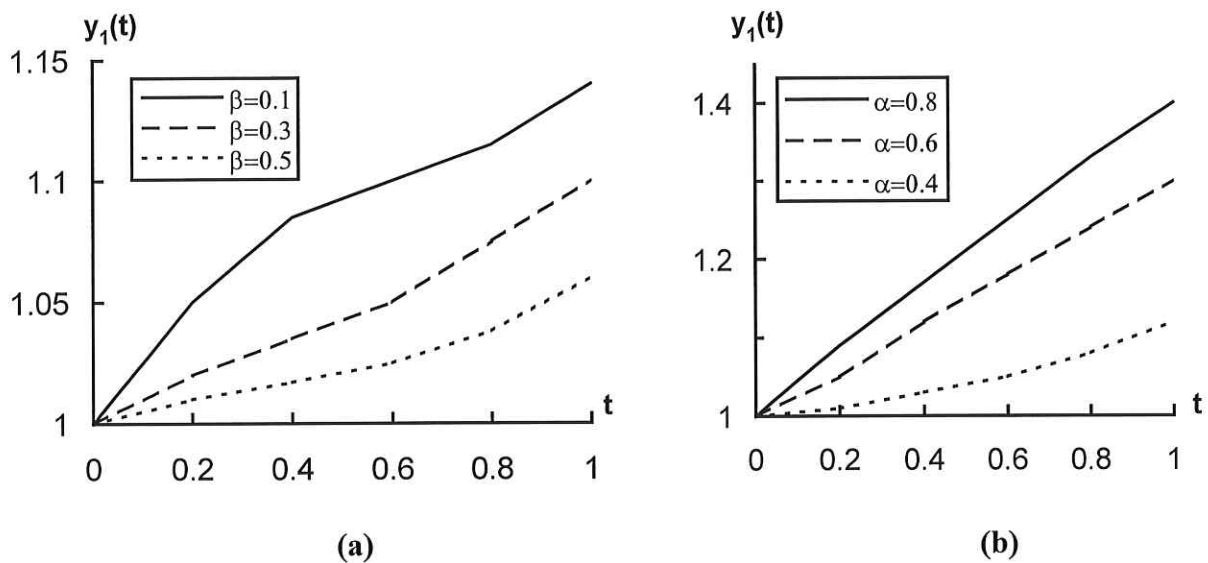
където  $\alpha, \beta$  са параметрите на ядрата на пълзене, ориентирани съответно по главните посоки на ортотропните линии,  $\bar{s}_i^e$  е стойността на еластичното критично натоварване.

В Табл. 2.3 са дадени стойностите за долното критично натоварване за вискозо-еластичната задача, както и отношението на долните критични натоварване във вискозо-еластичния и еластичния случай  $K_i = \bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$  за  $\bar{s}_i$ , за широк интервал от изменения на стойностите на параметрите:  $0.3 \leq d \leq 3$ ;  $2 \geq \alpha > \beta > 0$ ;  $0 < t \leq 0.05$ .

**Таблица 2.3**

$\alpha$	$\beta$	$d$	$\bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$	$\bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$	$\bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$	$\bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$	$\bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$
			$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$	$t = 0.04$	$t = 0.05$
0.7	0.1	0.14	1.51752	1.56752	1.61752	1.66752	1.71752
		1.41	1.04066	1.09066	1.14066	1.19066	1.24066
		2.0	0.98138	1.03138	1.08138	1.13138	1.18138
	0.3	0.14	0.94668	0.96334	0.98001	0.99668	1.01334
		1.41	0.73474	0.75141	0.76807	0.78474	0.80141
		2.0	0.70839	0.72507	0.74172	0.75839	0.77506
	0.6	0.14	0.80397	0.81230	0.82063	0.82897	0.83730
		1.41	0.65826	0.66659	0.67493	0.68326	0.69159
		2.0	0.64014	0.64848	0.65681	0.66514	0.67348
0.8	0.1	0.14	1.53192	1.58192	1.63192	1.68192	1.73192
		1.41	1.04797	1.09797	1.14797	1.19797	1.24797
		2.0	0.98780	1.03780	1.08780	1.13780	1.18780
	0.3	0.14	0.96107	0.97774	0.99441	1.01107	1.02774
		1.41	0.74204	0.75871	0.77537	0.79204	0.80871
		2.0	0.71481	0.73148	0.74814	0.76481	0.78148
	0.6	0.14	0.81836	0.82670	0.83503	0.84336	0.85170
		1.41	0.66556	0.67389	0.68223	0.69056	0.69889
		2.0	0.64656	0.65490	0.66323	0.67156	0.67990
2.0	0.1	0.14	1.59239	1.64239	1.69239	1.74239	1.79239
		1.41	1.07863	1.12863	1.17863	1.22863	1.27863
		2.0	1.01476	1.06476	1.11476	1.16476	1.21476
	0.3	0.14	1.02154	1.03821	1.05488	1.07154	1.08821
		1.41	0.77271	0.78937	0.80604	0.82271	0.83937
		2.0	0.74177	0.75844	0.77510	0.79177	0.80844
	0.6	0.14	0.87883	0.88717	0.89550	0.90383	0.91217
		1.41	0.69623	0.70456	0.71289	0.72123	0.72956
		2.0	0.67352	0.68186	0.69019	0.69852	0.70686

От Табл. 2.3 се вижда, че при нарастване на  $\alpha$  (при фиксирани  $\beta$  и  $d$ ) отношението на  $K_i = \bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$  нараства. При нарастване на  $\beta$  (при фиксирани  $\alpha$  и  $d$ ) отношението  $K_i = \bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$  намалява. При нарастване на  $d$  (при фиксирани  $\alpha$  и  $\beta$ ) отношението  $K_i = \bar{s}_i^{ve} / \bar{s}_i^e$  намалява. От тук следва, че параметърът  $\alpha$  на ядрото на пълзене  $J_1$ , ориентирано по оста  $Ox$ , имайки по големи стойности от параметъра  $\beta$  повишава стойността на  $S_i^{ve}$ , докато повишаването на ортотропията (коефициента  $d$ ) и параметъра  $\beta$ , водят до понижаване на вискозо-еластичното долно критично натоварване.



Фиг. 2.2

Получени са резултати за  $y_1(t)$  в широк спектър на изменение на параметрите  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t$ . Същите са илюстрирани на Фиг. 2.2 (а, б). Наблюдава се почти линейно поведение на  $y_1(t)$  при малки времена на пълзене.

## ГЛАВА 3

### ВАРИАЦИОНЕН ПРИНЦИП ЗА ГЛОБАЛНА УСТОЙЧИВОСТ НА ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНИ ТЪНКИ ЧЕРУПКИ

В глава трета §3.1 се извежда асимптотичният израз за енергията на следкритичните деформации за еласто-пластични черупки при запазване на основните предположения на геометричния метод. Смята се, че огъвната деформация на почти цялата средна повърхнина  $Z$  е чисто еластична, а пластичните зони са локализирани в околност на реброто  $\gamma$  и не покриват цялата повърхнина на черупката [39]. Тъй като черупката е тънка с дебелина  $h$ , то се приема, че пластичните зони възникват мигновено по дебелината на черупката и в околност на деформационните ребра  $\gamma$ , така че няма разтоварване.

### Предложение 5.

Предполага се, че пластичното състояние на материала на черупката се описва чрез деформационната теория на пластичността по отношение на доминиращото напрежение в околност на  $\gamma \in Z$ . Секущият и тангенциален модул  $E_s$  и  $E_t$  са функции само на средната интензивност на напреженията  $\sigma_i$  в  $\gamma \in Z$ .

Следните формули, даващи зависимост на огъвните пластични моменти и на малките инкременти на напрежения и деформации позволяват да се опише пластичното състояние на материала [39]:

$$\begin{aligned} M^{11} &= \frac{Eh^3}{9} \left[ \phi_s (\kappa_{11} + 0.5\kappa_{22}) - 0.75(\phi_s - \phi_t) \sigma_{11} \frac{\Pi(\sigma, \kappa)}{\sigma_i^2} \right] \\ M^{22} &= \frac{Eh^3}{9} \left[ \phi_s (\kappa_{22} + 0.5\kappa_{11}) - 0.75(\phi_s - \phi_t) \sigma_{22} \frac{\Pi(\sigma, \kappa)}{\sigma_i^2} \right] \\ M^{12} &= \frac{Eh^3}{9} \left[ 0.5\kappa_{12} - 0.75(\phi_s - \phi_t) \sigma_{12} \frac{\Pi(\sigma, \kappa)}{\sigma_i^2} \right] \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_s} \left[ \delta s_{11} + s_{11} (E_s - E_t) \frac{\Pi(\sigma, \delta s)}{E_t \sigma_i^2} \right] \\ \delta \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_s} \left[ \delta s_{22} + s_{22} (E_s - E_t) \frac{\Pi(\sigma, \delta s)}{E_t \sigma_i^2} \right] \\ \delta \varepsilon_{12} &= \frac{1}{E_s} \left[ 3\delta \sigma_{12} + 3\sigma_{11} (E_s - E_t) \frac{\Pi(\sigma, \delta s)}{E_t \sigma_i^2} \right] \end{aligned}$$

където :

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11} - \frac{1}{2} \sigma_{12}, \quad s_{22} = \sigma_{22} - \frac{1}{2} \sigma_{12}, \quad \phi_s = \frac{E_s}{E} \phi_t = \frac{E_t}{E}, \\ \Pi(\sigma, \kappa) &= \sigma_{11} \kappa_{11} + \sigma_{22} \kappa_{22} + 2\sigma_{12} \kappa_{12}, \\ \sigma_i^2 &= \sigma_{11} s_{11} + \sigma_{22} s_{22} + 3\sigma_{12} s_{12}, \\ \Pi(\sigma, \delta s) &= \Pi(\delta \sigma, s) = \delta \sigma_{11} s_{11} + \delta \sigma_{22} s_{22} + 3\delta \sigma_{12} s_{12}. \end{aligned}$$

Тук  $E$  е модул на Юнг,  $\nu$  е коефициент на Поасон,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\kappa_{\alpha\beta}$  са компонентите на тензорите на деформация, напрежения и кривини на  $Z$ .

Предположението за еластични огъвания на почти цялата повърхнина позволява използването на изометрично преобразуване на началната повърхнина на черупката към разглеждания клас еласто-пластични черупки. Следкритичната деформационна енергия върху цялата средна повърхнина на черупката се дава със следното асимптотично представяне [15]:



$$U = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_Z (\kappa_{11}^2 + \kappa_{22}^2 + 2\nu\kappa_{11}\kappa_{22}) dF + E\sqrt{h^5} cJ_0 \int_{s_\gamma} \sqrt{\frac{\alpha^5}{\rho}} ds_\gamma + \frac{Eh^3}{9} \int_{s_\gamma} \left[ \frac{1}{4} \alpha(\phi_s + 3\phi_l)(k_e + k_i - 2k) - \phi_s k_\gamma \right] ds_\gamma \quad (3.1.10)$$

Работата  $A$ , съответстваща на външното натоварване е дефинирана върху  $Z$  и може да се пресметне за всеки конкретен случай.

В §3.2 се проверява (в асимптотичен смисъл) валидността на предположенията на геометричния метод към изследвания клас от анизотропни еласто-пластични черупки. Доказателството се извършва, като се използват резултати от асимптотичен анализ на частните нелинейни диференциални уравнения за анизотропни еласто-пластични полегати черупки.

Решението на НЧДУ (3.2.3-3.2.4) за еласто-пластични черупки се представя в асимптотични редове (3.2.5-3.2.6) по малък параметър  $\varepsilon_0$ , както следва:

$$\varepsilon_0^2 \bar{L}_1(\bar{w}) = \bar{L}(\bar{w}, \bar{\psi}) + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \varepsilon_0 \bar{Q} \quad (3.2.3)$$

$$\varepsilon_0^2 \bar{L}_2(\bar{\psi}) = -\frac{1}{2} \bar{L}(\bar{w}, \bar{w}) - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \quad (3.2.4)$$

$$w \approx \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{w}_k + S^\gamma(\rho) \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{w}_k^\gamma + S^{\partial F}(\rho) \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{w}_k^{\partial F} \quad (3.2.5)$$

$$\psi \approx \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{\psi}_k + S^\gamma(\rho) \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{\psi}_k^\gamma + S^{\partial F}(\rho) \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{\psi}_k^{\partial F} \quad (3.2.6)$$

където  $S^\gamma(\rho)$ ,  $S^{\partial F}(\rho)$  са сглаждащи функции, равни на нула извън  $\varepsilon$ -околностите на реброто  $\tilde{\gamma}$  и на края на черупката  $\partial F$  и равни на единица, съответно в указаните околности.

Системата уравнения (3.2.7-3.2.8) за определяне на функциите  $\bar{w}_k$  и  $\bar{\psi}_k$  получаваме при помощта на първия итерационен процес.

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_{k-1}}{\partial x^2} + \sum_{m+n=k-1} \bar{L}(\bar{w}_m, \bar{\psi}_n) + \bar{Q}_{k-1} \delta_{k-1}^0 = \bar{L}_1 \bar{w}_{k-2} \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial x^2} + \sum_{m+n=k-1} \bar{L}(\bar{w}_m, \bar{w}_n) = \bar{L}_2 \bar{\psi}_{k-2} \quad (3.2.8)$$

където  $k=0,1,\dots,n$ ,  $\delta_{k-1}^0 = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$ ,

$$\bar{\psi}_{-3} = \bar{\psi}_{-2} = \bar{\psi}_{-1} = \bar{w}_{-2} = \bar{w}_{-1} = 0, \quad \bar{Q}_{-1} = 0, \quad Q = \sum_{k=0}^n \varepsilon_0^k \bar{Q}_k.$$

При  $k=0$  получаваме основната (главната) система за намиране на  $\bar{w}_0$  и  $\bar{\psi}_0$ , а именно:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial x^2} + \bar{L}(\bar{w}_0, \bar{\psi}_0) + \bar{Q}_0 = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} + \bar{L}(\bar{w}_0, \bar{w}_0) = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\bar{w}_0|_{\partial F} = 0 \quad \left. \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \right|_{\partial F} = 0 \quad (3.2.11)$$

Уравнението (3.2.10) е уравнение на Монж-Ампер от елиптически тип. Освен тривиалното решение при гранично условие (3.2.11) тъждествено равно на нула, съществува и нетривиално решение, съответстващо на огъванията  $Z$  на изходната повърхнина на черупката  $F$ , а именно огледалният образ на кривата  $\tilde{\gamma}$  през равнината  $\beta$ , успоредна на основата на полегатата черупка. Това позволява в основно (нулево) приближение да представим следкритичната деформация на полегатата цилиндрична панела, а именно, конструкцията на повърхнината  $Z$ , като периодично повтаряне на това нетривиално решение, което е частично гладко. Ако си припомним конструкцията на  $Z$ , то тя се състои от две области: Област  $Q$  -  $0(\tilde{\gamma})$ , която е цилиндрична повърхнина с образуващи геодезичните линии към  $\gamma$  и област  $0(\tilde{\gamma})$ , огледален образ на околността на конструиращата крива  $\tilde{\gamma}$ .

При преход през  $\tilde{\gamma}$ ,  $\bar{w}_0$  е непрекъснато, но производните му имат краен скок. Този скок е изгладен за реално деформираната черупка  $\bar{F}$  в околност на  $\tilde{\gamma}$  на силно огъване, където се и възстановяват гладкостта на напреженията и на моментите при преход през  $\tilde{\gamma}$ . Скокът на производните на  $\bar{w}_0$  се компенсира чрез функции от тип граничен слой  $\bar{w}_k^\gamma$  и  $\bar{\psi}_k^\gamma$ , т.е чрез втора итерация. След подходяща нормировка за определянето на тези функции се получава следната система ОДУ от втори ред:

$$v' \pm \Phi - v\Phi = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\Phi'' \pm v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (3.2.17)$$

Получените уравнения (3.2.16) и (3.2.17) се решават съвместно с условията за контакт по реброто  $\tilde{\gamma}$  и изискването за анулиране на функциите на безкрайност, а именно:

$$\begin{aligned} \Phi(+0) &= \Phi(-0) & v(+0) - v(-0) &= 2 \\ \Phi'(+0) &= \Phi'(-0) & v(\infty) &= \Phi(\infty) = 0 \end{aligned}$$

и ГУ на края на черупката  $\partial F$ :  $v|_{\partial F} = \Phi|_{\partial F} = 0$ .

Лесно е да се покаже, че системата (3.2.16) и (3.2.17) е следствие (уравнения на Ойлер-Лагранж) от вариационната задача за функционала  $J$  [6] при съответната нехолономна връзка и при  $u = \Phi'$ . Така направеният асимптотичен анализ на решението на НЧДУ дава решение гладко в обобщен смисъл, състоящо се от частичното гладко изометрично преобразуване и сглаждащите го функции  $\Phi, v$ .

Приложението на вариационния принцип  $A$  в §3.3 е за изследване на следкритичните деформации на тънки, ортотропни еласто-пластични черупки под действие на осев натиск [15, 32].



Минималният критичен товар  $\bar{p}_i$  и  $q_i$  (размерен минимален критичен товар) за ортотропни еласто-пластични черупки под действие на осов натиск се определят по следните формули:

$$\bar{p}_i = 0.03 \left\{ \frac{1 + c \left( \frac{1}{4\omega^2} + \frac{5s_{cr}^2\omega}{6} \right)}{s_{cr} - \frac{2s_{cr}^2}{3}} + c_1 \right\}; \quad q_i = \bar{p}_i 2\pi h^2 E \quad (3.3.12)$$

Стойността на  $s_{cr}$  е намерена при условие, че се търси минимум на  $\bar{p}$  по отношение на  $s$ , т.е.  $dp/ds = 0$  при  $0 < s < 1.5$ . Удовлетворяването на условието за минимум дава:

$$s_{cr} = \sqrt{b + \frac{4b^2}{9}} - 2\frac{b}{3} \quad (3.3.13)$$

където  $b = 6 \left( 1 + \frac{c}{4\omega^3} \right) / 5c\omega$ .

Теоретичните резултати за минималния критичен товар  $q_i$  са сравнени с експериментални резултати, получени от Galletly [24] и са дадени в Табл. 3.1.

**Таблица 3.1**

$R/h$ [mm]	$L/R$	$H$ [mm]	$E$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_p$ [kN/mm <sup>2</sup> ]	$q_i^{\text{exp}}$ [kN]	$q_i^{\text{th}}$ [kN]	exp/th
50	2	1	70.2	0.28	31.8	35.2	0.9
50	2	0.625	67.2	0.17	10.9	13.1	0.83
100	2	0.5	70.2	0.28	7.5	9.9	0.75
123.8	2	0.404	67.2	0.17	5.5	6.0	0.91

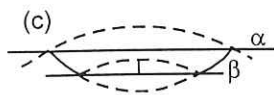
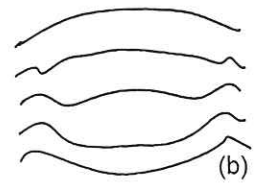
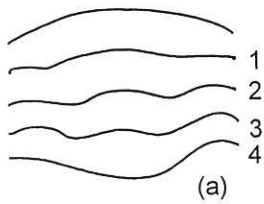
## ГЛАВА 4

### УСТОЙЧИВОСТ НА ТЪНКИ ЕЛАСТИЧНИ И ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНИ ОРТОТРОПНИ ЧЕРУПКИ ПРИ КОМБИНИРАНИ СТАТИЧНИ И ДИНАМИЧНИ НАТОВАРВАНИЯ

В четвърта глава се прави едно приложение на изведената на базата на геометричните предпоставки следкритична енергия за анизотропни еластични и еласто-пластични цилиндрични и строго изпъкнали анизотропни еластични черупки към задачи за комбинирано натоварване - постоянно действащ статичен товар, със стойност, по-малка от горния критичен товар и мигновено действащ динамичен импулс, съответно с амплитуда по-висока от горния критичен товар. В увода към главата е показано, че характерът на динамичното поведение на строго-изпъкнала еластична черупка в околност на критичното си

състояние има характер на инфлексна точка, което е нов поглед към изследванията на Погорелов за еластични изотропни черупки.

Последователното развитие на деформацията във времето на нормално сечение на строго-изпъкнала черупка е представено схематично на базата на проведени експерименти [6] на Фиг. 4.2 (а).



Съгласно приетият начин на изследване и апроксимация на деформираната повърхнина на строго изпъкнала черупка, това развитие е отразено на Фиг. 4.2 (b). В произволен момент  $t$  от времето, апроксимацията се състои в огледално отразяване на сегмент от черупката относно равнина  $\alpha$ , която е близка към края на черупката и последващо повторно отразяване относно равнина  $\beta$  Фиг. 4.2 (c). Движението на черупката в процеса на разглежданата деформация се определя с помощта на вариационния принцип на Хамилтън, съгласно който вариацията на функционала:

Фиг. 4.2

$$J = \int_t W dt \quad , \quad W = K - U + A$$

дефиниран върху реалното движение на черупката е равна на нула. Тук  $K$  е кинетичната енергия,  $U$  и  $A$  са съответно енергията на деформация и работата на външните сили. Уравнението на Ойлер-Лагранж за функционала  $J$  след еднократно интегриране дава уравнение от Бернулиев тип, чието решение в околност на глобалната устойчивост има инфлексна точка.

За поведението на разглежданите класове черупки след прекратяване действието на мигновения динамичен импулс се съставят две вариационни енергетични равенства в околност на следкритичното състояние на черупката, както следва:

В момента  $\tau$  на прекратяване на импулса  $p$ , пълната енергия на черупката  $V$  (енергията предадена от импулса) и работата  $A$  на статичния натиск преминават в енергия на следкритичната деформация  $U$ .

$$V + A(p_0) = U(\lambda) \quad (4.2.8^*)$$

След прекратяване на  $p$  черупката се огъва под действието на  $p_0$ . Ако  $p_0$  е сравнително малко, огъването в определен момент спира и след това, черупката възстановява началната си форма, извършвайки колебания. Ако  $p_0$  е достатъчно голямо, огъването продължава до пълно измятане. Най малкото значение на статичния осев натиск, при което следва пълно огъване - измятане на черупката се определя от условието, че възприеманото от черупката натоварване в този момент е точно равно на  $p_0$ .

$$p(\lambda) = p_0$$

Последното условие е еквивалентно с:

$$(V + A - U)_\lambda = 0 \quad (4.2.8^{**})$$

В §4.1 е направен асимптотичен анализ на динамичните уравнения на строго-полегати анизотропни еластични черупки, потвърждаващ валидността на предположенията на геометричния метод към разглеждания клас от черупки.

Последователно, в отделни параграфи на главата са разгледани цилиндрични ортотропни черупки под действие на статичен осов натиск и мигновено действие на осов импулс на натиск (§4.2) [16]; цилиндрични ортотропни черупки под действие на равномерно външно налягане и мигновен импулс от същия характер (§4.3) [17]; цилиндрични ортотропни черупки под действие на статичен осов натиск и мигновен импулс на равномерно външно налягане (§4.4) [18]. Следващите параграфи от същата глава са посветени на изследване на строго изпъкнали ортотропни черупки под действие на равномерно външно статично налягане и импулс от външно налягане (§§4.5, 4.6). Изследванията, проведени в тези параграфи са съпроводени с извеждане на достатъчни условия за намиране на критичните параметри на поставените задачи, както и за намиране на неутралните криви, разделящи областите на устойчивост и неустойчивост на черупките при комбиниран товар. Ще отбележим, че за всяка конкретно натоварена черупка е използван съответен вид изометрично преобразуване, дадено в гл. 6.

В §4.2 са получени достатъчните условия за загуба на динамична устойчивост на цилиндрични ортотропни черупки под действие на комбинирано натоварване - статичен осов натиск и динамичен осов импулс. След решаване на системата (4.2.8\*-4.2.8\*\*) относно динамичен импулс  $\bar{p}$  - деформационен параметър  $\lambda$ , получаваме:

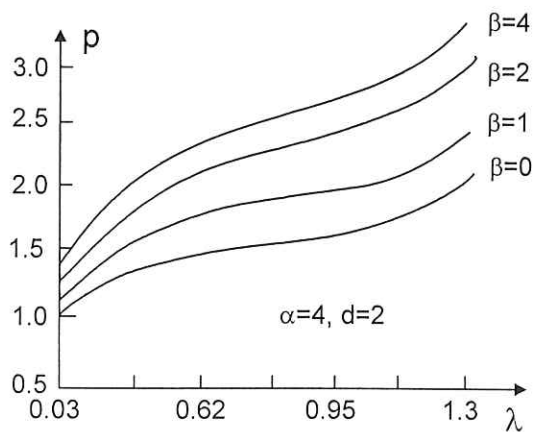
$$\bar{p} = \left[ \frac{d^3}{4\Phi_3} \left( U_y - \lambda \frac{dU_y}{d\lambda} \right) + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{p} > 1 \quad (4.2.15)$$

➤ Критичният динамичен импулс за цилиндрична ортотропна черупка при комбинирано натоварване - статичен осов натиск и динамичен кратковременен импулс на осов натиск се определя с формула (4.2.15) за  $\bar{p} = \bar{p}(\lambda_{kp})$ , където  $\lambda_{kp}$  се определя от уравнението:

$$\frac{d^2 U_y}{d\lambda^2} = 0, \quad \bar{p}'_\lambda = \bar{p}''_\lambda = 0, \quad \bar{p}'''_\lambda \neq 0$$

В случай на физическа ортотропия, параметрите от (4.2.13) се менят в следните интервали:  $1 \leq \alpha \leq 16$ ,  $0 \leq \beta \leq 4$ ,  $\gamma = 1$ ,  $d = 0.3 \div 3$ .

Построена е графично зависимостта (4.2.15) за различни стойности на ортотропния параметър  $d$ , който при нарастване в интервал [0.3-3] повишава стойността на динамичния критичен импулс. От графичните резултати (Фиг.4.4) се вижда и непосредственото влияние на параметъра  $\beta$  при



Фиг. 4.4

фиксирано  $\alpha$ , рефлектиращ върху повишаване на критичната стойност на динамичния импулс  $\bar{p}$  при критична стойност за  $\lambda \approx 0.95$ . Поради слабото влияние на параметъра  $\alpha$  върху стойността на критичния динамичен импулс подобни на Фиг. 4.4 графики не се представят. Накрая ще отбележим, че влиянието на ортотропния параметър  $d$  е породено от самото естество на физически или конструктивно ортотропните черупки, а имен-

но - по-силно укрепената черупка повишава носимоспособността ѝ.

В §4.3 са получени достатъчните условия за загуба на динамична устойчивост на цилиндрични ортотропни черупки под действие на комбинирано натоварване - статично налягане и динамичен импулс. За енергията на следкритичната деформация  $U$  използваме уточненият израз (4.3.5), получен в [11]. Там е взето предвид влиянието на сближаване на две съседни ребра (или ребро и края на черупката, равносилно на граничен ефект) върху деформацията на изометричната повърхнина  $Z$ .

$$U = \frac{E_1 \pi^3 \delta}{24(1 - \nu_1 \nu_2) n^2} \frac{R}{L} J^* - \frac{E_2 \delta^3}{3(1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{\pi^3 R}{n L} \quad (4.3.5)$$

където

$$J^* = 54.8 \sqrt{\varepsilon} d^{\frac{3}{2}} \frac{\xi}{1 - \xi} + \frac{11.3}{d^{\frac{7}{4}}} \frac{\xi(1 - \xi)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\xi^2 = \frac{3}{2} \lambda \approx a^2 \alpha^2, \quad \lambda = \int_{-1}^1 y^2 dx, \quad \nu_1 \nu_2 = 0.09, \quad \varepsilon = \frac{\delta R}{L^2}$$

След решаване на системата (4.2.8\*-4.2.8\*\*) относно динамичен коефициент  $\kappa = q/q_s$  - деформационен параметър  $\xi$ , получаваме:

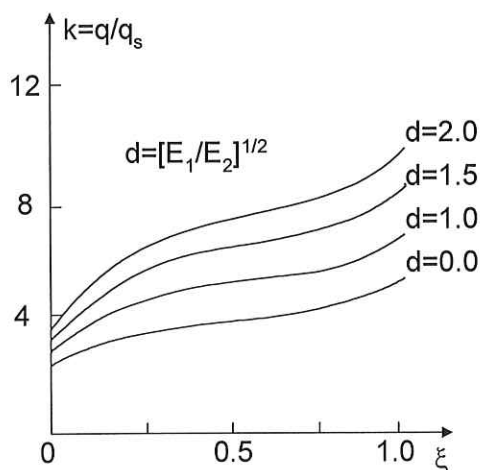
$$k^2 = \frac{d^2 \pi^2 R^2}{24(1 - \nu_1 \nu_2) n^2 L^2 \bar{q}_s^2} \left[ J^*(\xi) - \frac{3}{2} \frac{dJ^*}{d\xi} \right] - \frac{d^2 R \varepsilon}{4(1 - \nu_1 \nu_2) \delta} \frac{1}{\xi} \frac{dJ^*}{d\xi} - \frac{1}{3(1 - \nu_1 \nu_2) \bar{q}_s^2} + 1 \quad (4.3.14)$$

Последното съотношение се използва за определянето на критичния динамичен импулс като инфлексна точка за зависимостта динамично натоварване-деформационен параметър.

➤ Критичната амплитуда  $q$  на цилиндрична ортотропна черупка при комбинирано натоварване - статично налягане и импулс на налягане се дава с равенството  $q = q(\xi_{cr})$ , където  $\xi_{cr}$  е решение на уравнението:

$$\left(\frac{A}{2}\xi + \frac{B}{\xi}\right) \frac{d^3 J^*}{d\xi^3} - \frac{2B}{\xi^2} \frac{d^2 J^*}{d\xi^2} + \frac{2B}{\xi^3} \frac{dJ^*}{d\xi} = 0 \quad (4.3.15)$$

$$A = \frac{d^2 R^2 \pi}{24(1-\nu_1\nu_2)Ln^2\bar{q}_s}, \quad B = \frac{d^2 R \varepsilon}{4(1-\nu_1\nu_2)\delta}$$



Фиг. 4.5

Параметърът  $d$  се мени в интервала  $[0.3, 3]$ . На Фиг. 4.5 графично е построена зависимостта  $k = k(\xi)$ . Оказва се, че с увеличаване на стойностите на ортотропния параметър  $d$ , растат и стойностите на критичния динамичен импулс  $q_{cr}$ .

В §4.4 са получени неутралните криви, отделящи зоните на устойчивост и неустойчивост на цилиндрични ортотропни черупки под действие на комбинирано натоварване - статичен постоянен осов натиск и кратковременен динамичен импулс на външно налягане.

В основата на решението на така формулираната задача стои предположението, че формата на черупката след загуба на устойчивост се приближава с изометрична повърхнина, отговаряща на случая на повърхнина на следкритични деформации за цилиндрична черупка при външно налягане. Това предположение се базира на експериментални данни, които показват доминиращото влияние на характера на динамичния импулс.

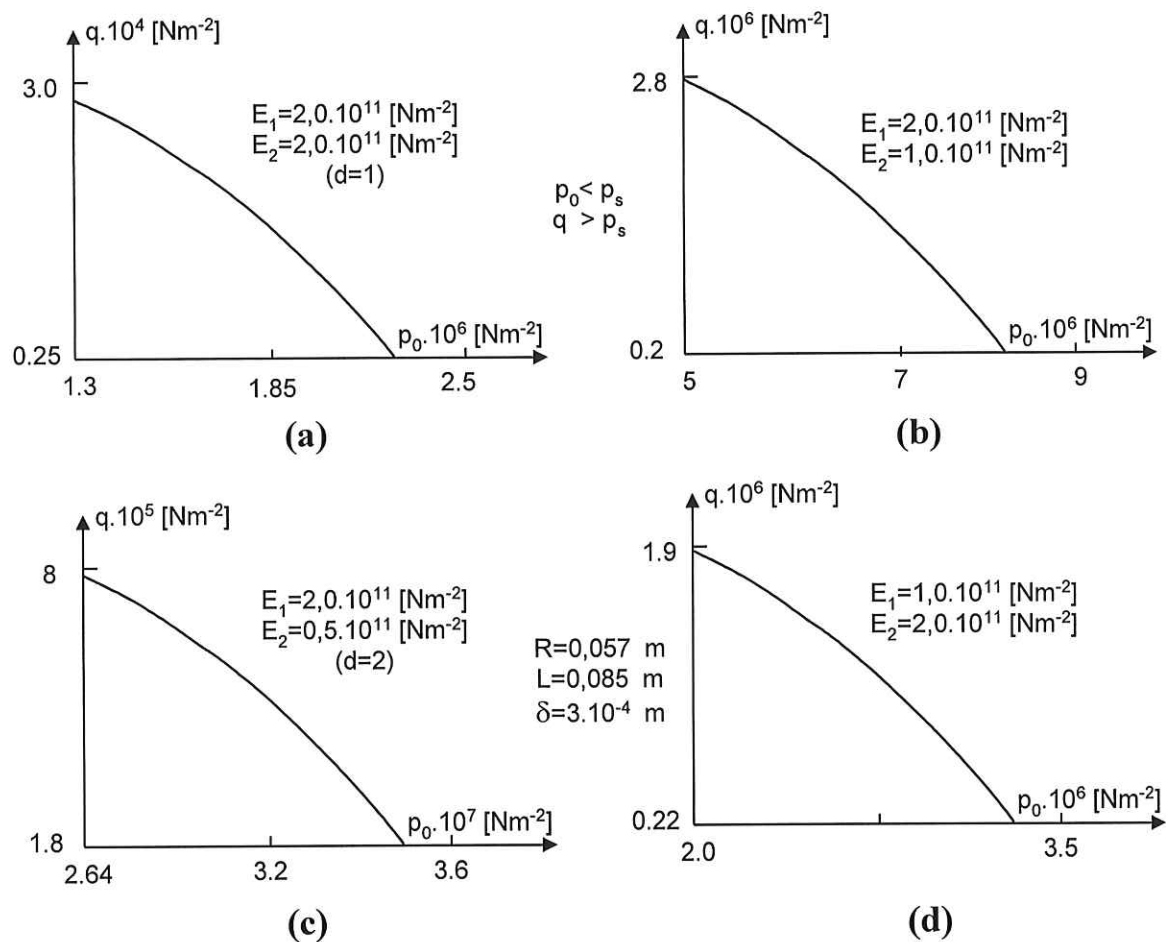
След известни преобразувания, окончателно се получава следното критично съотношение:

$$k = \sqrt{K_1 \frac{1}{\bar{p}_0} - K_2 + 1}$$

$$K_1 = \frac{0.005 d^2 l_1^3 l_2^3 \varepsilon^{-1} R^2}{\bar{q}_s^2 L^2} \quad (4.4.13)$$

$$K_2 = \frac{1.8 R^2}{n \bar{q}_s^2 L^2}, d = \sqrt{E_1 E_2}$$

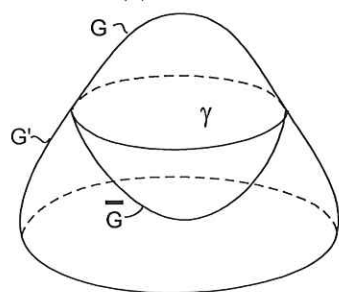
Равенството (4.4.13) определя така наречената неутрална област (зона) на устойчивост. На Фиг. 4.6(a-d) са построени зависимостите  $q = q(p_0)$  за различни стойности на ортотропните параметри  $(E_1, E_2)$ . Областите над неутралната линия определят тези стойности на параметрите на натоварване, при които



Фиг. 4.6

черупката се измъта напълно. От графичните резултати се вижда, че с увеличаване стойностите на параметъра  $d$ , критичната стойност на амплитудата на динамичния импулс на външно налягане намалява, докато стойността на критичния осов статичен натиск се увеличава.

В §4.5 е дадена формата на изометричната повърхнина за строго изпъкнали черупки в случай на външно равномерно разпределено налягане и е получен израз за енергията на следкритичната деформация.



Фиг. 4.8

Видът на изометричната повърхнина, описваща достатъчно добре следкритичната форма на деформираната строго изпъкнала повърхнина, е построен в [173], на базата на специален клас изометрични преобразувания. Основният елемент на тези преобразувания се свежда до огледално отразяване на произволен сегмент от повърхнината на черупката относно равнината, която го отсича (и е успоредна на основата на черупката) и последователно извършване на подобни операции.

На Фиг. 4.8 е показано такова огледално отражение, апроксимативно описващо деформацията на повърхнината в следкритичен стадий.



На базата на предположенията на геометричния метод [173] енергията на следкритичната деформация  $U$  се представя като сума от енергия на огъването и енергия на оглаждане на реброто , а именно:

$$U = U' + U'' = \pi(2h)^{\frac{3}{2}}(k_1 + k_2) \frac{(\Delta_d)^{\frac{3}{4}}}{(\Delta_k)^{\frac{1}{4}}} \left[ \bar{h}^{\frac{3}{2}} \bar{J}_1 + \varepsilon_0 \bar{h} (\bar{J}_2 + \bar{J}_3) \right] \quad (4.5.6)$$

където

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \frac{1}{\pi(1+\kappa^2)} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{D_1^3}{T} \right]^{\frac{1}{4}} I(\tau) Z dt, & \bar{J}_2 &= \frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa^2)} \iint_G [D_1^{(k)} + 2D_{12}^{(k)}\kappa^2 + D_2^{(k)}\kappa^4] \frac{dF}{\pi ab} \\ \bar{J}_3 &= \frac{2}{\pi\kappa(1+\kappa^2)} \int_0^{2\pi} [D_1(\kappa^2 \sin^2 t + \cos^2 t) + D_{12}\kappa^2] dt \\ D_1^{(k)} &= \bar{D}_{(k)}^{(1111)}, D_{12}^{(k)} = \bar{D}_{(k)}^{(1122)}, D_2^{(k)} = \bar{D}_{(k)}^{(2222)}, \bar{D}_{(k)}^{(\alpha\beta\mu\nu)} = \frac{D_{(k)}^{(\alpha\beta\mu\nu)}}{\Delta_d} \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

В §4.6. е изследвана загубата на устойчивост на строго изпъкнали еластични ортотропни черупки при комбинирано натоварване - статично равномерно разпределено налягане и кратковременен динамичен импулс и са получени критичните параметри на процеса. Предложени са два подхода на решение:

**П.1** Ако за удобство използваме опростеният израз за енергията на следкритична деформация  $U$  , то първият подход се състои в елиминиране на деформационния параметър  $h$  от двете съотношения (4.2.8\*), (4.2.8\*\*), определящи процеса на деформация в състояние (4). Това води до получаване на критично съотношение между статичното налягане и амплитудата на динамичния импулс. Като имаме предвид , че за ортотропни черупки възприеманото от черупката натоварване се определя с формулата [11]:

$$q = \frac{3}{2}(k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} I(\infty) \frac{\Delta_d^{\frac{3}{4}}}{\Delta_k^{\frac{1}{4}}} \frac{J}{\sqrt{2h}} \quad (4.6.7)$$

за критичното съотношение  $(q_0, q)$  в [6] е получена зависимостта :

$$\frac{\pi(2H)^2}{6\sqrt{k_1 k_2}} q_i^4 = \frac{S(q\tau)^2}{2\delta\gamma} q_0^3 \quad (4.6.8)$$

където  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $S$  са съответно дебелина на черупката, плътност на материала на черупката и площ на огънатата повърхнина.

В случая с  $q_i$  е означено долното критично натоварване , получено в [7]:

$$q_i = \frac{3}{2}(k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} I(\infty) \frac{\Delta_d^{\frac{3}{4}}}{\Delta_k^{\frac{1}{4}}} \frac{J}{\sqrt{2h}}$$

Тъй като за целта е определено минималното значение на амплитудата на динамичния импулс  $q$ , за което черупката губи устойчивост, от (4.6.8) се съобразява, че  $S$  трябва да е максимално, т.е. при  $S = 2\pi H / \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}$ . След заместване в (4.6.8), критичната зависимост за параметрите има вида:

$$\triangleright \quad \frac{(2H)}{3} q_i^4 = \frac{(q\tau)^2}{2\delta\gamma} q_0^3 \quad (4.6.9)$$

Формулата (4.6.9) определя критичното съотношение между  $q_0$  и минималното динамично импулсно налягане, при което черупката губи динамично своята устойчивост. Получената зависимост определя така наречената неутрална крива при комбинирано натоварване.

**II.2.** Вторият подход се състои в изключването на статичното налягане  $q_0$  от съответната система (4.2.8\* - 4.2.8\*\*) и получаване на зависимост ( $q\tau$ ) от  $h$ . За тази цел се използва уточнен израз за енергията на следкритичните деформации, в който е взето предвид сближаването на две деформационни ребра [7]:

$$U = U(\bar{h}) = \frac{3}{2} (2H)^{\frac{3}{2}} \pi (k_1 + k_2) \frac{\Delta_d^{\frac{3}{4}}}{\Delta_k^{\frac{1}{4}}} J \left[ \bar{h}^{\frac{3}{2}} \tilde{J}_1 + \varepsilon_0 \bar{h} (\tilde{J}_2 + \tilde{J}_3) \right] \quad (4.6.10)$$

където

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \frac{2\bar{J}_1}{3I(\infty)J} = \frac{2}{3\pi(1+k^2)J} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{D_1^3}{T} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{I(\tau)}{I(\infty)} Z dt \\ \tilde{J}_2 &= \frac{4}{3k(1+k^2)I(\infty)J} \iint_F [D_1^{(k)} + 2D_{12}^{(k)}k^2 + 2D_{22}^{(k)}k^4] \frac{dF}{a_k b_k \pi} \\ \tilde{J}_3 &= \frac{-4}{3k(1+k^2)I(\infty)J} \int_0^{2\pi} [D_1(k^4 \sin^2 t + \cos^2 t) + D_{12}k^2] dt \\ k^2 &= \frac{k_2}{k_1}, \quad a_k = \sqrt{\frac{2H}{k_1}}, \quad b_k = \sqrt{\frac{2H}{k_2}}, \quad \varepsilon_0 = \left[ \frac{\Delta_d \Delta_k}{(2H)^2} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad J = \frac{1}{\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{D^3}{T} \right]^{\frac{1}{4}} Z dt, \end{aligned}$$

От (4.2.8\*\*) имаме:

$$\frac{dU}{d\bar{h}} = \frac{dA}{d\bar{h}}, \quad q_0 = \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{4H^2 \bar{h} \pi} \frac{dU}{d\bar{h}} \quad (4.6.11)$$

Заместването на (4.6.11) в (4.2.8\*) води до получаване на зависимостта:

$$c(q\tau)^2 = \left[ U(\bar{h}) - \frac{\bar{h}}{2} \frac{dU}{d\bar{h}} \right], c = \frac{\pi H}{\delta\gamma \sqrt{k_1 k_2}} \quad (4.6.12)$$

Като се удовлетворят достатъчните условия за определяне на инфлексна точка за функционалната зависимост (4.6.12), получаваме:



➤ Критичното динамично импулсно налягане ( $q\tau$ ) в смисъл на инфлексна точка за теоретично изведената зависимост "динамично натоварване-провисване" се получава като функция от  $\bar{h}_{cr}$ , където  $\bar{h}_{cr} \rightarrow \frac{dU}{d\bar{h}} - \bar{h} \frac{d^2U}{d\bar{h}^2} = 0$ .

След преобразуване на (4.6.12) се получава:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\bar{h}} &= \frac{4\pi H^2 \bar{h}^2}{\sqrt{k_1 k_2}} q_{i0} [\tilde{J} + \varepsilon_0 (\tilde{J}_2 + \tilde{J}_3)] + O(\varepsilon_0^2) \\ \frac{dU}{d\bar{h}} &= \frac{4\pi H^2}{\sqrt{k_1 k_2}} q_{i0} \left[ \tilde{J} + \bar{h} \frac{d\tilde{J}}{d\bar{h}} + \varepsilon_0 (\tilde{J}_2 + \tilde{J}_3) \right] \\ \frac{dU}{d\bar{h}} - \bar{h} \frac{d^2U}{d\bar{h}^2} &= \frac{d\tilde{J}}{d\bar{h}} \\ \tilde{J} &= \frac{2}{3\pi(1+k^2)I(\infty)J} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\bar{h}} \frac{d}{d\bar{h}} \left[ \bar{h}^{-\frac{3}{2}} I(\tau) \right] \left( \frac{D_1^3}{T} \right)^{\frac{1}{4}} Z dt \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

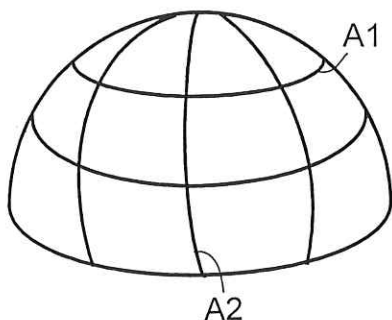
Задачата за екстремум на функционала  $\tilde{J}$  е подробно изследвана в [44], по повод определянето на долното критично налягане  $q_{i0}$  за ортотропни черупки. Оказва се, че стойността  $\bar{h}_{cr}$  от задачата с импулсно динамично налягане съвпада със стойността на  $\bar{h}_{ir}^*$  - провисването, което отговаря на уточнената стойност за долното критично статично налягане. Параметрите, които дават екстремум на функционала  $\tilde{J}$  са [44]:

$$\begin{aligned} \tau &\approx 5.68, \quad \kappa = 2\pi, \quad \sigma_0 = 1.25, \quad x = \sqrt{2}(\tau - \sigma_0) \\ I(\tau) &= I(\tau, \sigma_0) \\ I(\tau, \sigma_0) &= \frac{1}{\sigma_0} + 0.054\sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{9\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{shx + \sin x}{chx + \cos x - 2} \right] \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Разглеждат се два вида ортотропия -  $A$  и  $B$ . Параметрите от (4.6.10) приемат конкретния си вид.

### Ортотропия тип $A$

Строго изпъкнала полегата черупка притежава ортотропия от тип  $A$ , ако линиите на ортотропия са такива, че едното семейство  $A1$  от тях съвпада със сечения успоредни на основата, а второто семейство  $A2$  е ортогонално към първото. В този случай реброто  $\gamma$ , по което е станало огъването съвпада с една от линиите на семейство  $A2$  и затова, параметрите  $D$  и  $T$  в изразите (4.6.10) стават постоянни и могат да се изнесат пред знака на интегралите. Освен това:



$$J = d^{\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{4}}, \quad y = y_A \frac{\kappa}{2Z}, \quad y_A = \frac{1-\bar{h}}{\varepsilon_A}, \quad \tau = \frac{\kappa}{2Z} y_A \quad (4.6.16)$$

$$d = \left[ \frac{E_1}{E_2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad dt^* = 1, \quad Z = \kappa^2 \sin^2 t + \cos^2 t$$

За ортотропия тип  $A$  интеграла  $\tilde{J}$  има вида:

$$\tilde{J} = \frac{1+y_A \varepsilon_A / 2}{\pi(1+\kappa^2)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\bar{h}} \left\{ I(\tau) Z(t) - \frac{\kappa}{3\varepsilon_A} \frac{dI}{d\tau} \right\} dt$$

$$J_2 = \frac{2}{(t^* d^3)^{1/4} 3\pi\kappa(1+\kappa^2) I(\infty)} \int_0^{2\pi} [D_1^\kappa + 2D_{12}^\kappa \kappa^2 + D_2^\kappa \kappa^4] dt \quad \varepsilon_A = \varepsilon_0 \sqrt{D_1 T} \quad (4.6.17)$$

$$J_3 = \frac{-4}{3\pi\kappa(1+\kappa^2) I(\infty)} \frac{d^2(\kappa^4 + 11) + 2d\kappa^2}{(t^* d^3)^{1/4}}, \quad \kappa^2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

Екстремалната стойност на  $\tilde{J}$  е равна:

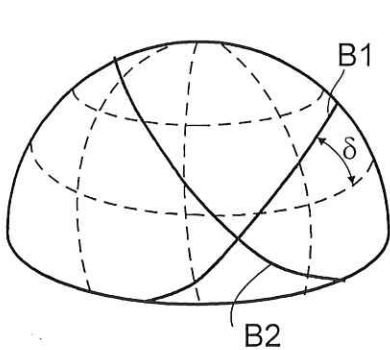
$$\text{extr} \tilde{J} = J^* = 1.04 - \frac{2.94 \varepsilon_A}{\kappa(1+\kappa^2)} (3\kappa^4 + 2\kappa^2 + 3)$$

Тъй като:  $\left\{ U(\bar{h}) - \frac{\bar{h}}{2} \frac{dU}{d\bar{h}} \right\} \frac{1}{\bar{h}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{dU}{d\bar{h}} - \bar{h} \frac{d^2 U}{d\bar{h}^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\bar{h}}$ , за пресмятането на критичния динамичен импулс окончателно се получава:

$$\triangleright \quad c(q\tau)_{cr}^2 = U(\bar{h}_{cr}) - \frac{\bar{h}_{cr}}{2} \frac{dU}{d\bar{h}_{cr}} \Big|_{\bar{h}_{cr}} = \frac{1}{2} J^*(\bar{h}_{cr}) \quad (4.6.18)$$

### Ортотропия тип $B$

Строго изпъкнала полегата черупка притежава ортотропия тип  $B$ , ако линиите на ортотропия представляват две ортогонални семейства  $B1$  и  $B2$  върху  $F$  такива, че линиите на семейство  $B1$  образуват постоянен ъгъл  $\delta$  с линиите на кривината  $k$ . Тогава параметрите се пресмятат по формулите:



$$D_1 = d \cos^4 \varphi + \beta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{d} \sin^4 \varphi$$

$$T = \frac{1}{t^*} \cos^4 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + t^* \sin^4 \varphi$$

$$\varphi = v - \delta, \quad v = \text{arctg}(\kappa t g t), \quad \alpha = 2 \left[ \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4G^2} - v_1 v_2 \right], \quad (4.6.17)$$

$$\beta = 2 \left[ \sqrt{\frac{4G^2}{E_1 E_2}} (1 - v_1 v_2) - \sqrt{v_1 v_2} \right], \quad d = \frac{1}{t^*} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$$

За интеграла  $\tilde{J}$  се получава, след опростяване, следният израз:

$$J^* \approx \frac{1}{\pi(1+\kappa^2)I(\infty)J} \left\{ \int_0^{2\pi} 1.151 \left[ \frac{D_1^3}{T} \right]^{\frac{1}{4}} Z dt + \varepsilon_0 \frac{5.68}{\kappa} \int_0^{2\pi} Z^2 D_1 dt \right\}, \quad \left. \frac{dI}{d\tau} \right|_{\tau^*} = 0$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{D_1^3}{T} \right]^{\frac{1}{4}} Z dt, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} [\kappa^2 \sin^2 t + \cos^2 t] D_1 dt \quad (4.6.18)$$

$$J^* \approx 1.04 + \frac{5.12}{J_2} \frac{\varepsilon_0}{\kappa} J_1$$

Критичният динамичен импулс при ортотропия тип  $B$  се определя с израза:

$$\triangleright \quad c(q\tau)_{cr}^2 = \frac{1}{2} J^*(\bar{h}_{cr}) \quad (4.6.19)$$

В Табл. 4.1 са дадени стойностите на критичния динамичен импулс при различни значения на параметрите, определящи ортотропията и геометрията на черупката. От табличните резултати се вижда чувствителното влияние на параметрите  $d$ ,  $k$ ,  $\delta$  и по-слабото влияние на  $\alpha$  и  $\beta$ . От сравняванията за двата типа ортотропия  $A$  и  $B$  се вижда, че при еднаква геометрия и ортотропия с нарастване на параметъра  $\delta$  има нарастване и на стойностите на динамичния импулс. Това показва, че черупките имащи ортотропия тип  $B$  са с по-голяма носимоспособност.

**Таблица 4.1**

$\kappa$	$d$	$\delta$	$\alpha$	$\beta$	$(q\tau)_{cr}$
0.1	0.3	0.8	1.0	0	2.58
0.1	0.3	0.8	1.0	1.0	2.27
0.1	0.3	0.8	1.0	2.0	2.09
0.1	0.3	0.8	1.0	3.0	1.96
0.1	0.5	0.8	1.0	0	2.85
0.1	0.5	0.8	1.0	2.0	2.13
0.5	0.3	0.0	1.0	0	1.67
0.5	3.0	1.6	1.0	0	2.16
1.0	0.3	0.0	1.0	0	1.40
1.0	1.5	0.8	1.0	0	1.78

В горепосочената таблица е взето:  $H = 0.05 \text{ m}$ ,  $h = 0.0005 \text{ m}$ .

В §4.7 на същата глава са показани резултати от сравнение с експерименти на цилиндрични черупки под действие на динамичен импулс на външно и вътрешно налягане и с времетраене  $\tau = 3.10^{-5} \text{ s}$  [26].

С цел сравнение на теоретичните резултати, които следват от основните енергетични съотношения (4.2.8\* - 4.2.8\*\*) е изключен деформационният параметър и е получена кривата на критична зависимост между статично

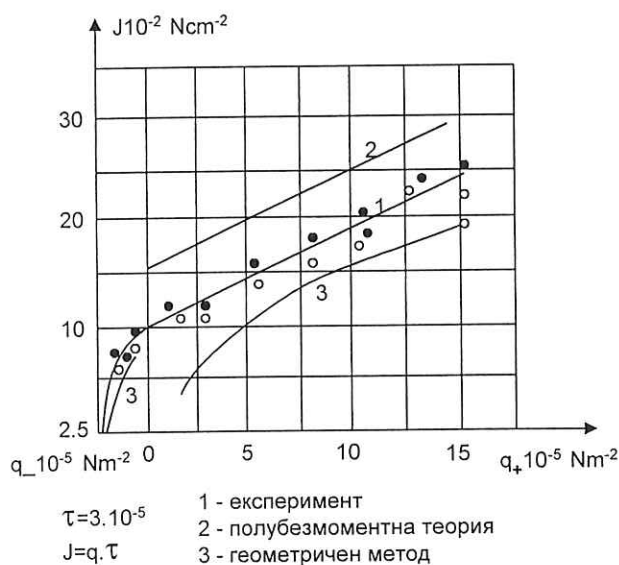
налягане (вътрешно  $q_-^0$  и външно  $q_+^0$ ) и амплитудата на динамичния импулс. В случай на вътрешно статично налягане в израза за работата  $A$  е взета пред вид посоката на действие на натоварването, което води до промяна на знака в (4.3.14).

$$q = \left\{ \frac{E_1^{5/2} E_2^{1/2} \delta^7 l_1^3 l_2^3 \varepsilon^{-1/6}}{n q_{\pm}^0 R^3 L^4 2^3} 1.11 / 0.36 - q_{\pm}^0 \sqrt{E_1 E_2} \frac{\delta}{R} \left[ 1 - \frac{\pi \cos^3 \frac{\pi}{2n}}{4n \sin \frac{\pi}{2n}} \right] - \frac{3.6 E_1^{1/2} E_2^{3/2} \delta^4}{n R^2 L} + q_s^2 \right\}^{1/2} \quad (4.7.4)$$

където в първия член коефициентът 1.11 се отнася за външно налягане, а 0.36 - за вътрешно налягане.

Върху зависимостите (4.7.4) се налагат допълнителни ограничения. Първото се отнася до големината на амплитудата на динамичния импулс  $q > q_s$ , а второто определя областите, в които зависимостите  $q = q(q_{\pm}^0)$ , съгласно експерименталните данни и обобщението на теоремата на Папкович [39] за разглеждания случай, са изпъкнали нагоре функции.

На Фиг. 4.8 кривата 1 представлява усредняване на резултатите от експеримента [26].

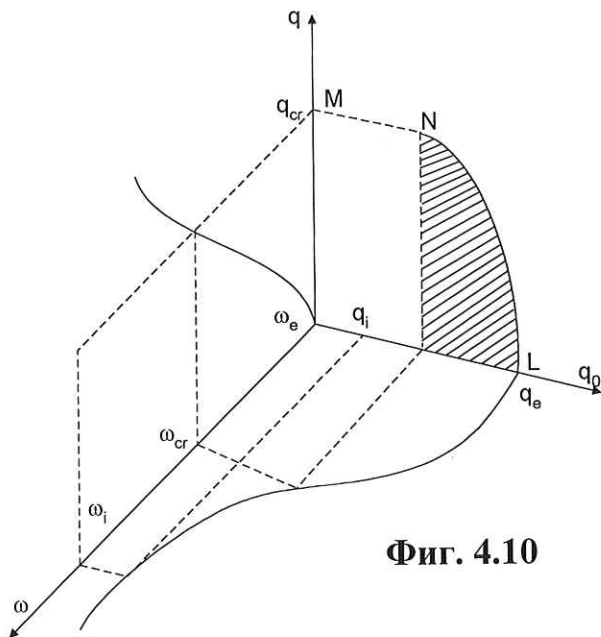


Фиг. 4.9

д друга страна, крива 2 е с 40% над крива 1. Това се обяснява с факта, че резултатите, получени с помощта на полубезмоментната теория, са като правило винаги по високи от резултатите, използващи нелинейна теория на черупките.

Полученото сравнение показва правилността на приложения геометричен метод при прогнозиране на загуба на устойчивост при комбинирано натоварване на черупки. Прогнозата, получена по формули (4.7.4) осигурява и то отдолу, загубата на устойчивост на изследвания клас черупки и е по-надеждна от прогнозата, получена по полубезмоментната теория.

В §4.9 се разглеждат ортотропни еласто-пластични черупки под действие на комбинирано натоварване от осев натиск, удовлетворяващо приетите в §4.1 условия за амплитудите на комбинирания товар [25]. Получена е безопасната



Фиг. 4.10

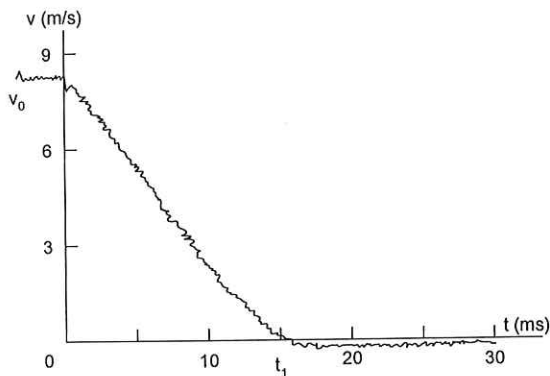
(неутрална) зона за оценка на устойчивост, както и са получени критичните параметри на загубата на динамична устойчивост. Даден е алгоритъм за оценка на параметрите при земетръс. На Фиг. 4.10 е дадена схематично връзката между критичните параметри на разглеждания процес.

## ГЛАВА 5

### СМАЧКВАНЕ НА ПЛАСТИЧНИ, ЧУВСТВИТЕЛНИ КЪМ СКОРОСТТА НА ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧНИ ЧЕРУПКИ ПОД ДЕЙСТВИЕ НА АКСИАЛЕН УДАР

В пета глава се разглежда процесът на смачкване на твърдопластични, чувствителни към скоростта на деформация цилиндрични черупки под действие на аксиален удар [19-22]. Основното приложение на геометричния метод тук е подходяща трансформация (Фиг.6.7 от гл. 6) на построената от Погорелов [5] изометрична повърхнина, добре апроксимираща смачканата повърхност на черупката за случая на неососиметрична и смесена форми на смачкване. Приети са следните предположения:

(i) През цялото време на смачкване на черупката от нула до  $t_1$ , където  $t_1$  е стойността на крайното време на смачкване на черупката, смачкващата маса  $M$



Фиг. 5.1

и горният край на черупката са в непрекъснат контакт. Поради този контакт, характерът на намаляване на стойността на началната скорост  $v_0$  на масата на чука се предава на горният край на черупката. Експериментално получената графика на скоростта на масата в зависимост от времето, след смачкване на черупката е показано на Фиг. 5.1 [27]. Тази графика е типична за маси с начални скорости  $v_0 \leq 50 \text{ ms}^{-1}$ .

(ii) Графиката на изменение на скоростта на масата от времето за типичен цилиндричен образец на (Фиг.5.1) може успешно да се апроксимира чрез права линия, както следва:

$$v(t) = v_0(1 - t/t_1), \quad (5.2.1)$$

където  $t_1$  е крайното време за смачкване на ударената цилиндрична черупка.

(iii) От самото начало на удара, черупката губи своята статична устойчивост и влиза в следкритичен режим на огъване. Това състояние не е устойчиво, черупката абсорбира началната кинетична енергия на удрящата маса и достига устойчива пластична или еласто-пластична конфигурация, която значително се различава от началната идеална цилиндрична повърхнина. Апроксимацията на следкритичната огъната средна повърхнина на черупката в ососиметричния и неососиметричния случай е обект на §5.3 и гл.6 §2.3.

(ii3) Поведението на материала на черупката се предполага да се описва като твърдо пластичен, чувствителен към скоростта на деформация и кривини.

Ще се използват емпиричните конститутивни уравнения на Купер-Саймондс, за да се опише пластичното, чувствително към скоростта на деформация поведение на материала на черупката при смачкване на цилиндричната черупка [29]. Следователно имаме:

$$\sigma^d(t)/\sigma_0 = 1 + [\dot{\epsilon}(t)/\dot{\epsilon}_0]^{1/n}, \quad M^d(t)/M_0 = 1 + [\dot{k}(t)/\dot{k}_0]^{1/n} \quad (5.3.4)$$

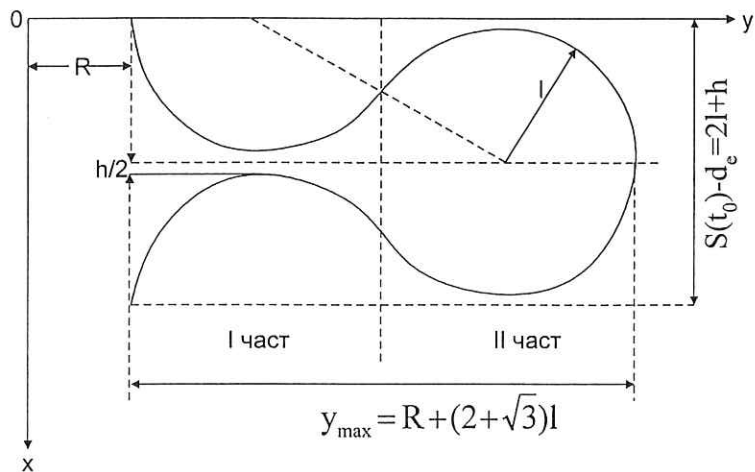
където  $\dot{\epsilon}_0, \dot{k}_0, n > 2$  са материални константи,  $\sigma_0$  е едноосната граница на пластичност,  $M_0 = \sigma_0 h^2 / 2\sqrt{3}$ ,  $\sigma^d(t)$  и  $M^d(t)$  са съответно динамичното напрежение и огъвния момент. Загубилата устойчивост черупка се пластифицира и формира ососиметрични пояси до момента на края на смачкващото действие на масата. Експериментите показват, че за предложените конститутивни уравнения [30] при постоянна стойност на  $\sigma_0$  напрежението е намаляваща функция на скоростта на деформация, следователно формула (5.3.4) е реверсивна по отношение на напрежения и деформации. Това свойство може да се изрази математично чрез  $\Delta\sigma \Delta\dot{\epsilon}_0 \leq 0$ .

Поради предложената геометрична апроксимация на деформирания ососиметрично пояс от черупката (Фиг. 5.2), материалните характеристики  $\dot{\epsilon}_0, \dot{k}_0$  в (5.3.4) могат да се определят теоретично в момента  $t=0$ . Тази независимост от експерименталните данни за  $\dot{\epsilon}_0, \dot{k}_0$ , (които от своя страна обикновено се вземат от експеримента и варират в широки граници), позволява да се получат по-строги теоретични резултати. За  $\dot{k}_0, \dot{\epsilon}_0$  са получени следните изрази:  $\dot{k}_0 = 2\dot{\epsilon}(0)/\sqrt{3}h$   $\dot{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}(0) = (2 + \sqrt{3})v_0/R$ . По този начин, само материалните характеристики  $n$  и  $\sigma_0$  трябва да се вземат от експерименталните данни за едноосен тест на материала на черупката.

(ii4) От предишните предположения следва, че всички геометрични и материални характеристики, освен  $n$  и  $\sigma_0$ , зависят от времето  $t$ . От друга страна експериментите показват [27-28], че геометрията на смачканите пояси за



статично и прогресивно смачкване са реално идентични. Тук се предполага само, че движението на смачкващата маса е равномерно закъснително (виж (5.2.1) с постоянно ускорение  $-v_0/t_1$ ). Поради непрекъснатия контакт на масата с черупката, процесът на образуване на поясите е също равномерен.



Фиг. 5.2

Част I

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= r(t) \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \\ y(t, \varphi) &= R + r(t)(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Част II

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= r(t) - r(t) \sin \left( \varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \\ y(t, \varphi) &= r(t)(1 + \sqrt{3}) + R - r(t) \cos \left( \varphi - \frac{2\pi}{3} \right); \frac{5\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Дефинирайки пълният енергетичен функционал в малка околност на  $t_0$  върху (5.3.2 – 5.3.3) и усреднявайки стойността му по времето, получаваме функционал, съдържащ един вариационен параметър  $r(t_0)$ . В следващия параграф е показано, че от оценката на параметрите, съдържащи влиянието на кинетичната енергия, динамичният характер на разглеждания процес може да се редуцира до квази-статичен.

(ii5) Нека  $t_1$  е стойността на времето за пълния процес на смачкване. Да разгледаме задачата за движението на смачкващата маса  $M$ , освободена от черупката, с помощта на нейната реакция (смачкваща сила)  $P(t)$ . Имаме:

$$M\dot{v}(t) = Mg - P(t) \quad (5.3.5)$$

където  $g$  е земното ускорение, а  $v(t)$  има апроксимация (5.2.1).

Интегрирайки уравнение (5.2.1) от 0 до  $t_1$  при следните условия:  $v(0) = v_0$ ,  $v(t_1) = 0$ , получаваме:

$$0 = Mv_0 + (-P_d^{th} + Mg)t_1$$

където  $P_d^{th}$  е средната стойност на смачкващата сила. Ако тази стойност е известна; тогава крайното време на смачкване  $t_1$  може да се пресметне от следната формула:

$$t_1 = Mv_0 / (P_d^{th} - Mg)$$

(iiб) Частта от височината  $\bar{s}(t_0)$  на недеформирания цилиндър, необходима за формиране на един смачкан ососиметрично пояс е:

$$\bar{s}(t) = 10\pi r(t)/3$$

Поради непрекъснатият контакт между смачкващата маса и горния край на черупката, имаме, че  $\dot{\bar{s}}(t) = v(t)$ , или еквивалентно:

$$\dot{r}(t) = 3v_0(1 - t/t_1)/10\pi \quad \text{и} \quad r(t) = 3v_0t(1 - t/2t_1)/10\pi$$

Тъй като разглеждаме всички характеристики на смачканата черупка, отнесени към момента  $t_0 \ll t_1$ , имаме, че:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t_0) &= 3v_0/10\pi \\ r(t_0) &= 3v_0t_0/10\pi \end{aligned}$$

Нашата цел е да намерим стойността на  $r(t_0)$ . За удобство означаваме  $r(t_0) = l$ . Релацията между ефективното смачкано разстояние  $\delta_e$  и  $\bar{s}(t_0)$ , и  $l$  е показана на Фиг. 5.2. Тъй като  $\bar{s}(t_0) - \delta_e = 2l + h$ , получаваме:

$$\delta_e = 10\pi l/3 - 2l - h \quad (5.3.6)$$

Крайната аксиална редуция  $\delta_f$  е точно равна на вертикалното разстояние, изминато от масата  $M$  в момента  $t = t_1$ . Интегрирайки (5.2.1) по  $t$ , удовлетворявайки условието  $x(t_1) = \delta_f$ , получаваме  $\delta_f = v_0t_1/2$ . Поради равномерния характер на движението, получаваме, че:  $\delta_f = k^c \delta_e$ , т.е.  $k^c = \delta_f/\delta_e$ , където  $k^c$  е броя на ососиметричните смачкани пояси.

Намирането на критичните стойности на параметъра  $l$  и на критичната смачкваща сила  $P_d^{th}$  в случай на ососиметрично смачкване на цилиндричната черупка (§5.4.1) се извършва с помощта на две релации, следствие на условията за стационарност на функционала на Хамилтън и стационарност на получената стойност на смачкващата сила. Там са получени следните критични стойности за горепосочените критични параметри:

$$u \approx 0.143 \quad , \quad l = 0.143R$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(t_0) = & -0.5 \frac{R}{h} \left\{ \frac{\rho_0 v_0^2}{\sigma_0} - 2(2 + \sqrt{3})u - \frac{h}{4R} \left[ \frac{1}{u} - \left( \frac{\sqrt{3}h/R}{2(2 + \sqrt{3})} \right)^{1/n} \frac{1}{u^{1+2/n}} \right] - \right. \\ & \left. - \left[ 1 - \frac{(2 + \sqrt{3})u}{2[1 + (2 + \sqrt{3})u]} \right] \left[ 2(2 + \sqrt{3})u + \frac{h}{4R} \left( -\frac{1}{u} + \left( \frac{\sqrt{3}h/R}{2(2 + \sqrt{3})} \right)^{1/n} \frac{n+2}{n} \frac{1}{u^{1+2/n}} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$



или, замествайки  $u$  в  $\bar{P}(t_0)$ , получаваме безразмерната стойност на критичната смачкваща сила. Използвайки размерната формула за  $P(t_0) = \bar{P} \sigma_0 \frac{h}{R} (2\pi R h) = P_d^{th}$  се получава теоретичното предвиждане за критична стойност на смачкващата сила  $P(t_0)$  ( $u = 0.143$ ):

$$P_d^{th} = - \left\{ 1.92 + 0.3 \frac{h}{R} \left[ 1 - 1.5 \left( \frac{h}{R} \right)^{\frac{1}{5}} \right] \right\} \sigma_0 \pi h R \quad (5.4.12)$$

или, ако се вземе предвид влиянието на кинетичния член, получаваме:

$$P_d^{th} = - \left\{ - \frac{\rho v_0^2}{\sigma_0} + 1.92 + 0.3 \frac{h}{R} \left[ 1 - 1.5 \left( \frac{h}{R} \right)^{\frac{1}{5}} \right] \right\} \sigma_0 \pi h R \quad (5.4.13)$$

където  $\sigma_0$  е границата на пластичност за различни видове мека стомана,  $\rho$  е плътността на материала на черупката. За меки стомани и за долната граница на  $\sigma_0$ , а така също за максималната стойност на началните скорости на удрящата маса  $v_0 = 50 \text{ ms}^{-1}$ , най високата стойност на кинетичния член е  $\frac{\rho v_0^2}{\sigma_0} \approx 0.08$ .

Стойностите за ефективното осево смачкване  $\delta_e^c$ , тоталното време на смачкване  $t_1$  и броя на поясите  $k^c$  за ососиметрична (концертина) форма на смачкване се получават по следните формули:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_0 &= (2 + \sqrt{3}) v_0 / 10\pi; \quad R = 0.356 v_0 / R; \quad n = 5; \\ l &= 0.143R; \quad \delta_e^c = 8.4l - h; \quad \delta_f = v_0 t_1 / 2; \quad k^c = \delta_f / \delta_e^c; \quad b = 10\pi l / 3; \\ \Delta_e^c &= b' = 2l + h \end{aligned}$$

$$t_1 = M v_0 / (P_d^{th} - Mg)$$

В §5.4.2 се разглежда математичното моделиране на поведението на ударена аксиално цилиндрична черупка за случая на неососиметрично смачкване [20-23]. В гл.6 е дадено построяването на изометричната повърхнина  $Z$  на началната недеформирана повърхнина, която добре апроксимира повърхнината на цилиндрична черупка в следкритичен стадий. Използвайки същият усреднен вариационен принцип на Хамилтън, както в §4.1, дефиниран върху повърхнината  $Z$ , е показано, че процесът на смачкване на черупката за стойности на началната скорост  $v_0 \leq 50 \text{ ms}^{-1}$ , може да се квалифицира като квазистатичен. За теоретичната стойност на смачкващата сила е получено:

$$\bar{P}_d^{th} = 0.00568, \quad P_d^{th} = 0.00568 \sigma_0 \frac{h}{R} \quad (5.4.29)$$

За неососиметрична (диамантна) форма на смачкване стойностите за ефективното осево смачкване  $\delta_e^d$ , тоталното време на смачкване  $t_1$  и броя на поясите  $k^d$  се получават по следните формули:

$$m = 0.91\sqrt{R/h} \quad \text{и} \quad \delta_e^d = \Delta b = 4R \sin^2(\pi/2m);$$

$$b = 4R \sin^2(\pi/2m) + 2l + 4h = \delta_e^d + \Delta_e^d;$$

$$\delta_f = v_0 t_1 / 2 = \kappa^d \delta_e^d, \quad \text{следователно} \quad \kappa^d = \delta_f / \delta_e^d;$$

$$t_1 = Mv_0 / (P_d^{th} - Mg).$$

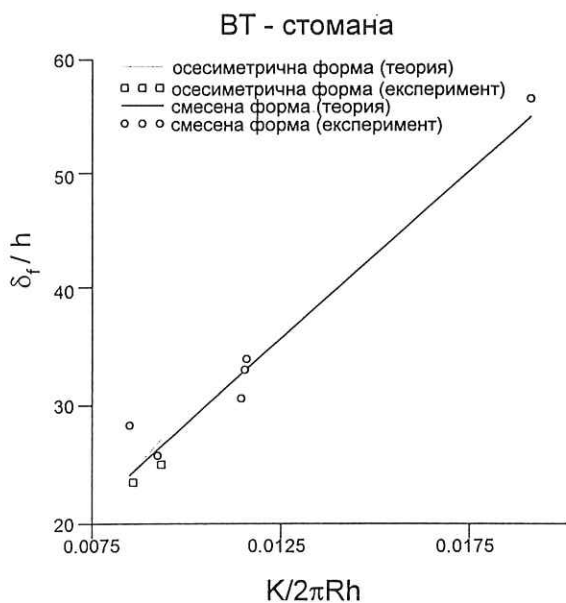
Сравнението между теоретичните и експерименталните резултати [27] за образците с ососиметрична (концертина) форма на смачкване е показано на Табл. 5.1.

**Таблица 5.1**

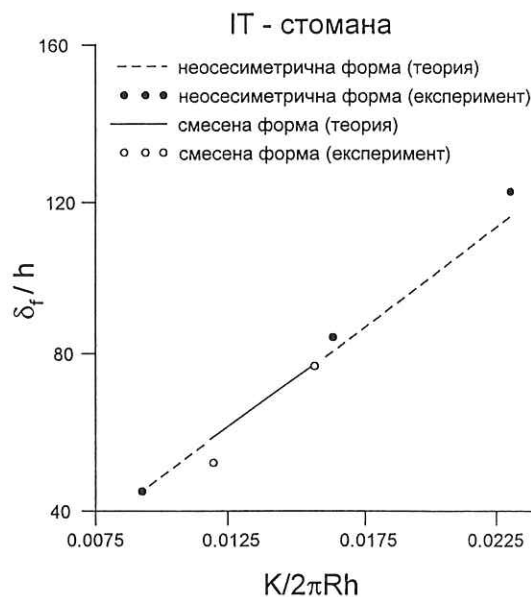
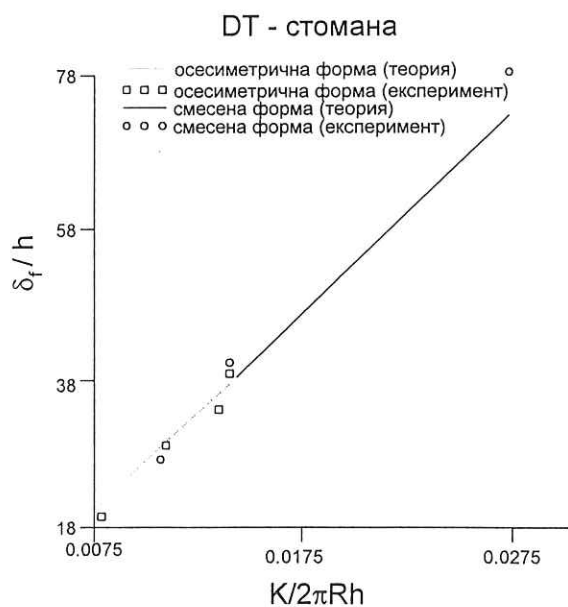
Образец No.	M [kg]	$v_0$ [m/s]	$\delta_f^{\text{exp}}$ [mm]	$P_d^{\text{exp}}$ [N]	$\delta_f^{\text{th}}$ [mm]	$P_d^{\text{th}}$	$k^c$ [теор.]
T 1	73.6	9.23	73	43	68.9	46.2	2
T 4	73.6	10.37	90.3	43.9	86.9	46.2	2.5
T 5	73.6	9.153	69.1	44.6	67.7	46.2	2
T 37	73.6	5.504	25.2	44	24.5	46.2	0.5
T 39	73.6	6.401	34.2	44.2	33.1	46.2	1
T 41	73.6	8.667	64	43.1	60.7	46.2	2
T 43	26.6	9.73	25.2	50	27.4	46.2	0.5
T 45	26.6	10.19	29.3	47.1	30.1	46.2	1
T 46	73.6	7.197	42.6	44.8	41.9	46.2	1.5

Експерименталният брой  $k^c$  на пълните пояси за смачканите черупки не са дадени в [27] и поради това не е направено сравнение с теоретичното предвиждане. От Табл. 5.1 се вижда, че експерименталните стойности за крайното смачкване на черупката  $\delta_f^{\text{exp}}$  и съответната му теоретична стойност  $\delta_f^{\text{th}}$  са много близки. Що се отнася до експерименталните и теоретичните стойности за смачкващата сила, разликата е по-голяма и това е следствие от въведеното усредняване по времето.

Нека коментираме Фиг. 5.4-5.8. Стойностите на  $L$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $v_0$  за всеки образец могат да се видят в [27] (там Табл.1) и [28] (там Табл.2). За Фиг. 5.4-5.8 въвеждаме декартова координатна система, където на хоризонталната ос ( $x$ ) са подредени стойностите на  $K/2\pi hR$  ( $K = Mv_0^2/2$ ). На вертикалната ос ( $y$ ) са дадени стойностите на съответното отношение  $\delta_f/h$ . Нека означим формално типът на средна стомана с означенията, приети за групите от опитни образци в [27] и [28], например като стомана - Т, за групата образци, означени с Т, и т.н.

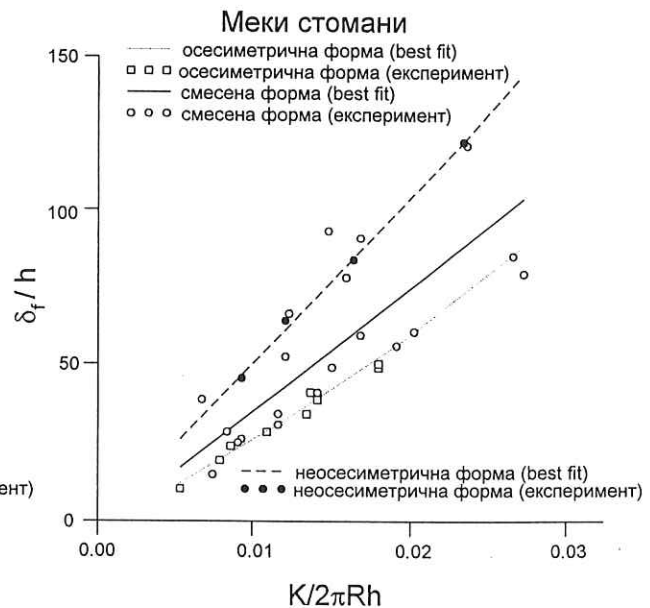
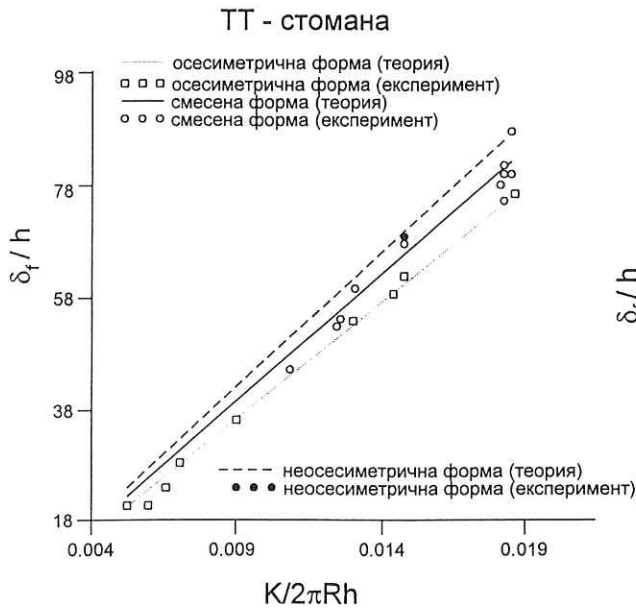


случая на концертина (Фиг. 5.7, 5.8).



Ще отбележим, че образците от Табл. 2 на [2] с нерегулярно или цялостно огъване, както и с усукване и разрушение не са сравнявани с теоретичните резултати. Пунктираната и правата линии на Фиг. 5.8 са най-добрите приближения на експерименталните данни от [28]. От направеното сравнение на Фиг. 5.4-5.7 се вижда, че теоретичните резултати са достатъчно близки до експерименталните и че избраната мярка  $K/2\pi Rh$  за оценка на  $\delta_f/h$  е адекватна.

Сравнението между експерименталните данни и нашите теоретични предвиждания за стомани BT, DT, IT са показани на Фиг. 5.4-5.6. На Фиг. 5.7 са показани експерименталните резултати за смачкани черупки от T-стомана [27], заедно с теоретичните предвиждания за ососиметрична (концертина), смесена и неососиметрична (диамантна) форми. Накрая, на Фиг. 5.8 експерименталните резултати за смачкани черупки направени от стомани AT, BT, DT, D1T, GT, FT, IT – (виж [28]) са дадени графично. Както можем да видим, случая на смесена форма е ограничен отгоре от диамантната форма и ограничен отдолу от



Получените теоретични резултати на Фиг. 5.7 представляват една нова прогноза за подредба на формите на смачкване, зависещи от нивото на кинетичната енергия отдолу нагоре както следва: първа форма – ососиметрична, втора - смесена, трета – неососиметрична.

## ГЛАВА 6

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Последната шеста глава отделя от основните текстове на глави 1-5 построяването на специални изометрични преобразувания, които са основа на дефиниционната област на изведените вариационни принципи за глобална устойчивост на разглежданите видове черупки. В §6.1 са дадени основните свойства на развиваемите върху равнина повърхнини, както следва:

**Свойство 1.**

Развиваемите повърхнини допускат налагане върху равнината със запазване на дължините на кривите и ъглите между тях.

**Свойство 2.**

Всяка гладка точка от развиваемата повърхнина е вътрешна точка от праволинейна отсечка (праволинейна образуваща на повърхнината), лежаща изцяло на повърхнината.

**Свойство 3.**

Ако някаква точка от праволинейната образуваща има равнинна околност, то всяка вътрешна точка от образуващата също има такава околност.

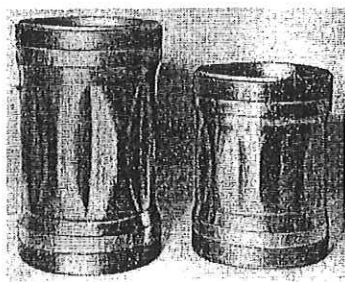
#### Свойство 4.

Ако праволинейната образуваща няма свойство 3, то тя се опира с краищата си или в реброто, или в края на повърхнината.

#### Свойство 5.

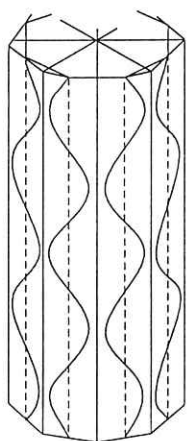
Ако геодезичната кривина на реброто  $\gamma$  на развиваемата повърхнина е различна от нула, то това ребро не може да има равнинна полуоколност.

В §6.2.1 е дадено построяването на изометрична на началната цилиндрична повърхнина  $Z$ , имаща периодичен строеж. Експериментите

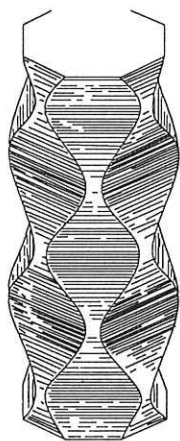


Фиг. 6.1

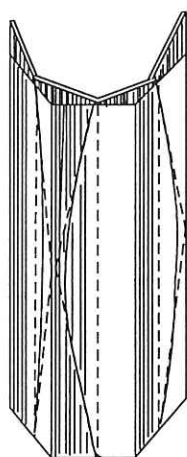
показват, че следкритичната деформация на геометрично свършена цилиндрична черупка в основните случаи на натоварване (осов натиск, външно налягане, усукване) притежава определено регулярен строеж. Именно, отчетливо се наблюдава периодичност на формата на деформираната цилиндрична повърхнина в окръжна посока (Фиг. 6.1).



Фиг. 6.3

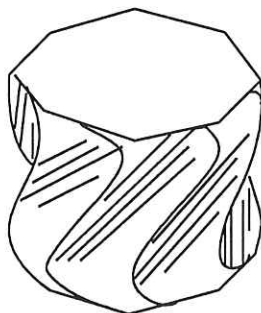
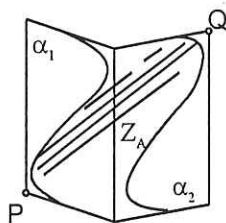
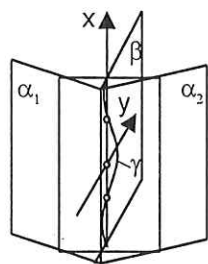


Фиг. 6.4



Фиг. 6.6

В §§6.2.1-3 е даден начина за построяване на изометрични повърхнини с периодичен строеж и винтова симетрия, приложени в предишните глави при

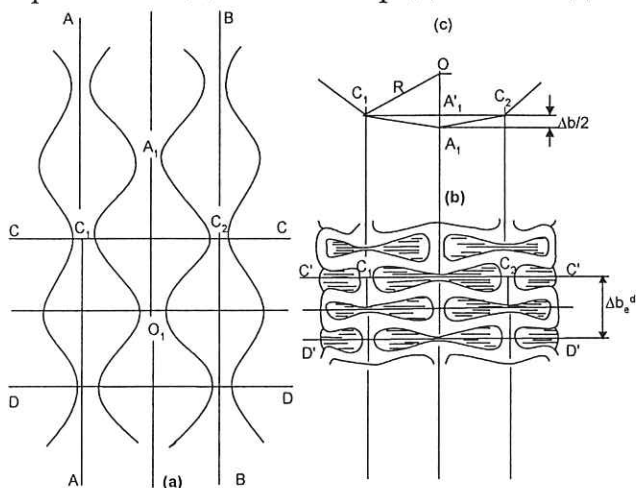


Фиг 6.5

конкретни задачи, а именно: цилиндрични черупки под действие на осов натиск (Фиг. 6.3) и (Фиг. 6.4), цилиндрични черупки под действие на външно налягане (Фиг. 6.6), цилиндрични черупки под действие на усукване (Фиг. 6.5). Тези изометрични повърхнини са описани подробно в [6].



В §6.2.4 е дадена модификация на изометричната повърхнина за задачи на смачкване на цилиндрични черупки. Нека е известно построяването на специална изометрична повърхнина с периодичен строеж (§6.2.1), приложима за изследване на глобалната устойчивост на черупка, подложена на осов натиск. Последвалата по долу модификация на тази повърхнина се базира на физическото явление масов удар върху горния край на черупката и следствието от него - равномерно закъснително вертикално движение надолу на ударната маса, която е в непрекъснат контакт с горния край на черупката. Това вертикално движение предизвиква допълнително огъване на вече построената



Фиг. 6.7

изометрична повърхнина (Фиг. 6.7). Допълнителното огъване - осовото смачкване на разглежданата цилиндрична черупка изчерпва изцяло възможностите на геометрията на изометричната и повърхнина. За да намерим точната стойност на аксиалното смачкване, когато пояс от черупката с  $m$  диамантни (неососиметрични) форми  $Q \in Z (C_1 O_1 A_1 C_2$  (Фиг.6.7(a)) заема крайна смачкана форма, ще използваме ограниченията, следващи от геометрията на смачканата форма на пояса (виж Фиг. 6.7(b)), поясът между  $C' C' - D' D'$ ). Този смачкан пояс с диамантни (ромбоидни) моди е генериран по следния начин: черупката губи устойчивост и образува пояс с диамантни форми (формата  $C_1 O_1 A_1 C_2$ , виж Фиг. 6.7(a)). Вертикалното движение на масата надолу води до сближаване на върховете  $A_1, O_1$ . поради това, че края на черупката е закрепен и има съответна реакция на удрящата маса, то тези върхове се движат нагоре и съответно надолу, успоредно на оста на черупката  $Ox$ , едновременно образувайки къси ребра със средни точки  $C_1$  и  $C_2$  (Фиг. 6.7 (b)). Височината на тези ребра е вариационен параметър даващ екстремум на енергиен функционал и се получава от решаване на съответната задача. В гл. 5 е намерен съответният вариационен параметър и другите необходими диференциални и геометрични характеристики на смачканата черупка.

Относно доказателството за изометричност на повърхнината на Фиг. 6.7 (b) ще отбележим, че за целия интервал от време  $0 \leq t < t_1$  на смачкване изометричността на параметричното семейство от повърхнини  $Z(t)$  се запазва. Единствено се поставя въпросът за изометричност за  $t = t_1$ . В този граничен случай на параметричното (от  $t$ ) семейство на изометричните повърхнини би трябвало да се нарушава изометричността, защото при  $t = t_1$  се получава лемниската на Бернули. Поради това, че черупката има дебелина, то тя не позволява да бъде реализиран този граничен случай.



## БИБЛИОГРАФИЯ КЪМ АВТОРЕФЕРАТА

- [1] Mallock A., Note on the instability of tubes subjected to end pressure and on the folds in a flexible material, Proc. Roy. Soc., 1908, 81, No. A 549, pp.388-393
- [2] Kirste L., Abwickelbare Verformung dunnwandiger Kreiszylinder, Osterr. Ing. Arch., 1954, 8, 2-3, pp.149-151
- [3] Yoshimura Y., Nisava M., Lower buckling stress of circular cylindrical shells, subjected to torsion, J. Aeron. Sci., 24(3), 1957, pp.211-216
- [4] Pugsley A., Macaulay M., The large scale crumpling of thin cylindrical columns, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, 13, No. 1, pp.1-9
- [5] Pogorelov A., Geometric methods in non-linear theory of elastic shells (in Russian), M., Nauka, 279 pp.
- [6] Pogorelov A., Geometric theory of shell stability (in Russian), M., Nauka, 1966, 296 pp.
- [7] Ivanova J. A., Post critical behaviour of thin elastic shells, Post-bucl. Elast. Str., Proc. Euromech. Colloq. 200, Matrafured 5-7 Oct., 1985, Budapest, 1986, pp.139-153
- [8] Ivanova J., Cylindrical orthotropic shell under external pressure - geometric theory of stability of postcritical deformations (in Russian), TAM, 1982, 13, No 3, pp/79-85
- [9] Ivanova J., Postcritical deformations of elastic thin orthotropic cylindrical shells under torsion (in Russian), TAM, 1982, 13, N0 1, pp.65-71
- [10] Ivanova J., Mechanical interpretation of the Berger hypothesis for the global stability of statically loaded shells, International Journal of the Non-Linear Mechanics, 22, 1, 1987, pp.73 - 77
- [11] Ivanova J., Variational principle A for anisotropic thin shells with linear memory, Proceedings of IV NCTAM, Varna, 1981, v.1, pp.381-386
- [12] Ivanova J., Postcritical deformations of orthotropic elastic shells with linear memory -p. I (in Russian), TAM, 1983, 14, No 2, pp.86-90
- [13] Ivanova J., Postcritical deformations of thin elastic shells with linear memory - p. II (in Russian), TAM, 1983, No 4, pp.93-98
- [14] Ivanova J., Global stability of orthotropic cylindrical shells with linear memory under torsion, TAM, 1984, 15, No 1, pp.69-76
- [15] Ivanova J. A., Variational principle for global stability of elasto-plastic thin shells, International Journal of Non-Linear Mechanics, 1991, v.26, No. 1, pp.117-124

- [16] Pirgov P., Ivanova J., Stability of rotatory elastic orthotropic shells under combine static and dynamic loads (in Bulgarian), Proc. VI NCTAM, Varna, 1990, v. 4, pp.241-245
- [17] Pirgov P., Ivanova J., Stability of rotatory elastic shells under combine load - static external pressure and dynamic pulse. Critical dynamic load - p.I (in Bulgarian), TAM, 1990, No 3, pp.82-87
- [18] Ivanova J., Pirgov P., Stability of elastic orthotropic cylindrical shells under combined static axial compression and short impulse of external pressure, TAM, 1991, No. 4, pp. 67-72
- [19] Ivanova J., Cylindrical shells under dynamic axial impact, Proc. of IUTAM symposium, 1991, pp. 182-185
- [20] Ivanova J., Progressive crushing of plastic cylindrical shells under axial impact, TAM, 1993, No. 3, pp.141-149
- [21] Ivanova J., Parashkevova L., Pastrone F., Progressive crushing of plastic cylindrical shells under axial load, Quaderni di matematica, February 1996, University of Torino
- [22] Ivanova J., Parashkevova L., Pastrone F., Progressive crushing of plastic cylindrical shells under axial load, Rendiconti del seminario matematico dell'Universita e del Politecnico di Torino, (accepted)
- [23] Mechanics of solid deformable bodies, Itogi nauki, Moskow, 1969
- [24] Galletly G., Blachut J., Axially-compressed cylindrical shells - a comparison of experiment and theory, Proc. of 27th Polish Solid mechanics Conf., 1988
- [25] Ivanova J., Pastrone F., Dynamic instability of cylindrical elasto-plastic shell under combined static load and dynamic short pulse, Transactions of the 12th Inter. Conf. on SMiRT, 1993, v.J, pp. 285-290
- [26] Mihailov V., Chistuhin V., Experimental investigation of stability of cylindrical shell under external pressure (in Ukrainian), DAN USSR, Ser. A, 1967, No 6, pp.517-5198
- [27] Abramowicz and N. Jones, Dynamic axial crushing of circular tubes, Int. J. Impact Eng., 1984, 2, 3, 263-281.
- [28] Abramowicz and N. Jones, Dynamic progressive buckling of circular and square tubes, Int. J. Impact Eng., 1986, 4, 243-270.
- [29] Symonds P. S., Approximative technics for impulsively loaded stunts of rate sensitive plastic behavior, SIAM J. Appl. Math., 1973, 25, 462-473.
- [30] Werzbicki, Approximate analysis of strain rate sensitive structures, Lecture notes at the CISM course on Dynamic of Plastic Structures, 1979, Udine .

- [31] Babenko V., Ivanova J., Investigations of postcritical deformations of thin anisotropic shells part II (in Russian), *Theoretical and Applied Mechanics*, 1975, 6, No 1, pp.47-62
- [32] Ivanova J., Pastrone F., Buckling of cylindrical plastic shells under axial load, *Bolletino U.M.I.*, 1988, 2-B, No. 7, pp.529-540
- [33] Pogorelov A., Babenko V., Geometrical method in the stability theory of thin shells, *Prikladnaia Mekhanika*, 28 (10), 1992, pp.3-22 (in Russian)
- [34] Mihailov V., Determination of low critical load of conical shell under axial compression (in Russian), *Vest. Harkov Univ., Ser. Mech-Math*, 1965, 31, No 3, pp.94-100
- [35] Vorovich I., Minakova N., Investigation of stability of non-shallow spherical cap in hi-approximations (in Russian), *Izv. AN SSR, MTT*, No 2, 1969, pp.21-128
- [36] Kristensen R., Introduction in theory of viscoelastic bodies (in Russian), M., Mir, 1974
- [37] Manevich L., Michailov G., Pavlenko I., Prokopalo E., Investigation on stability of shells under static and dynamic loads (in Russian), *PM*, 1977, No 1
- [38] Lukasiewicz S. A., Glockner P. G., Collapse by pounding of shells, *Int. J. Sol. and Str.*, 1983, 19, No. 3, pp.251-261
- [39] Volmir A., Stability of elastic shells (in Russian), GIPhML, 1963
- [40] Vishik M., Lusternik L., Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter (in Russian), *Uspehi matematicheskikh nauk*, 1957, 12, No 5, pp.3-122
- [41] Babenko V., Ivanova J., Investigations of postcritical deformations of thin anisotropic shells (in Russian), *Theoretical and Applied Mechanics*, 1973, 4, No 4, pp.95-105
- [42] Babenko V., Ivanova J., Investigations of postcritical deformations of thin anisotropic shells part II (in Russian), *Theoretical and Applied Mechanics*, 1975, 6, No 1, pp.47-62
- [43] Babenko V., Ivanova J., Investigations of postcritical deformations of thin anisotropic shells part III (in Russian), *Theoretical and Applied Mechanics*, 1975, 6, No 2, pp.59-66
- [44] Babenko V., Ivanova J., Investigations of postcritical deformations of thin anisotropic shells part IV (in Russian), *Theoretical and Applied Mechanics*, 1977, 8, No 3, pp.27-3
- [45] Babenko V., Ivanova J., Postcritical deformations of thin orthotropic cylindrical shells under axial compression (in Russian), *Theoretical and Applied Mechanics*, 1978, 9, No 4, pp.43-51

## АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Основните резултати са докладвани на: семинари и отчетни годишни сесии и обединени семинари на ЕЦММ и Института по механика 1976-98 г., на семинара по диференциални уравнения на Института по математика и информатика 1999 г., на 10 лекции по покана в Департамента по математика на Университета в Торино 1992-97 г., 2 лекции в Университети Рим-1 - 1986 г., 2 лекции в Рим-2 - 1986 г., 2 лекции в Политехниката в Бари - 1986 г., Solid Mechanics Conference-PAS - 1977, 1981 г.; Евромех 200 - 1985 г., Евромех 317 - 1994 г., IUTAM' 90, II, III, IV, V, VI НКТПМ - Варна, 10 конференция по нелинейни колебания' 84 - Варна, семинари на Института по термодинамика - Новосибирск, Института по теоретична и приложна механика - Прага, Института по фундаментални проблеми на техниката - Варшава, Обединен семинар на Университета и Политехниката в Харков, Института по механика в Киев, Катедрата по механика в Университета в Букурещ, Института по приложна механика в Москва, Института по механика в Кемниц.

## АВТОРСКА СПРАВКА

Основните резултати в дисертационния труд по мнение на автора могат да се резюмират в следното:

1. Вариационният принцип  $A$  на геометричната теория за глобална устойчивост на тънки еластични черупки е приложен за първи път за статично натоварени черупки от следните важни за практиката нелинейни конструкционни материали:
  - ◆ Еласто-анизотропни материали
  - ◆ Еласто-анизотропни материали с линейна наследственост
  - ◆ Еласто-пластични материали
2. С помощта на асимптотичен анализ на нелинейните частни диференциални уравнения на полегати черупки е доказана валидността на хипотезите на геометричния метод за указаните по-горе нелинейни конструкционни материали.
3. Използвайки асимптотиката на следкритичната енергия и хипотезите на геометричния метод е дадена механична интерпретация на хипотезата на Бергер за опростяване на нелинейните частни диференциални уравнения за статично натоварени черупки.
4. Показана е валидността на приложението на хипотезите на вариационния принцип  $A$  за нелинейни задачи за динамично натоварени анизотропни черупки.

5. Доказан е инфлексния характер на точката на динамична загуба на устойчивост от теоретичната диаграма натоварване-деформационен параметър. За целта са използвани уравненията за баланс на енергията при решаване на задачи за еласто-ортотропни и еласто-пластични черупки под действие на комбинирано натоварване (статично и динамичен кратковременен импулс).
6. Намерени са критичните параметри за черупки под действие на комбинирано натоварване и са построени неутрални криви, разделящи устойчивата от неустойчивата зона.
7. С помощта на подходяща трансформация е построено ново изометрично преобразуване на началната повърхнина на черупка под действие на аксиален масов удар. Изометричното преобразуване е използвано за апроксимиране на устойчивата конфигурация на неососиметрично смачкана черупка.
8. Показан е квази-статичния характер на процеса на смачкване на твърдопластична, чувствителна към скоростта на деформация цилиндрична черупка под действие на аксиален удар (за начални скорости  $v_0 \leq 50 \text{ ms}^{-1}$  на удрящата маса).
9. Получените резултати за критичните параметри на изследваните класове черупки са апробирани с експериментални данни. Сравнението показва валидността на новите приложения на геометричния метод на Погорелов.

\*  
\*                      \*

Считам за мой приятен дълг да благодаря на колегите си от секция "Механика на твърдото деформируемо тяло" на ИМех - БАН за творческите разисквания и подкрепата им по време на подготовката на дисертацията. Искам да изкажа благодарността си за творческите обсъждания и конструктивни забележки върху предварителния вариант на дисертацията на ст.н.с. I ст. д.н. А. Балтов и проф. дмн К. Марков. Не на последно място искам да благодаря на акад. А. В. Погорелов и ст.н.с. I ст. дмн В. Бабенко от Физико-техническият институт по низки температури – отдел Геометрия за модерната тематика и школата им при прилагане на геометрични методи за изследване на нелинейната теория на черупките. Бих искала да благодаря на ст.н.с. В. Вълева за високо професионалната и работа при редакцията на дисертацията. Изключително съм признателна и на моето семейство и приятелите ми за голямата морална подкрепа.