

8116

СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ ПО
ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА ПРИ
ВАК

Светозар Димитров Маргенов

ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за получаване на научна степен
„Доктор на математическите науки“
Научна специалност: 01.01.09 „Изчислителна математика“

София, 2002

1 Съвременно състояние на проблема.

Компютърното моделиране е в основата на много от най-значимите достижения в съвременната наука и технологии. Това е сложен интердисциплинарен процес, който включва създаването на: а) математически модел, адекватно описващ резултатите от планирани експерименти и наблюдения; б) числени методи за дискретизация на диференциални и/или интегрални уравнения; в) ефективни методи и алгоритми за решаване на получените след дискретизацията системи от линейни алгебрични уравнения; г) алгоритми за визуализация и анализ на резултатите от проведените изчислителни експерименти; д) високопроизводителни компютърни програми, които в максимална степен използват възможностите и архитектурата на съвременните изчислителни системи. Компютърният модел дава възможност не само за икономии при скъпо струващи лабораторни и натурни експерименти. В редица случаи още по-важно е моделирането на характеристиките на нови материали и технологии, както и изследването на процеси, за които измерванията и наблюденията са невъзможни.

Методът на крайните разлики и методът на крайните елементи са основни средства за дискретизация на диференциални уравнения. След тяхното прилагане, задачата се свежда до система от линейни алгебрични уравнения. Едно от най-важните свойства на тези системи е, че съответната матрица е разрежена. Това означава, че броят на ненулеви елементи във всеки ред или стълб е ограничен от константа, която не зависи от параметъра на дискретизация на съответния метод и следователно не зависи от размерността на дискретната задача.

Известно е, че решаването на задачи на изчислителната линейна алгебра с разрежени матрици е определящо за ефективността на доминиращата част от съществуващите програми за компютърно моделиране на процеси, които се описват с диференциални уравнения. Това с особена сила се проявява при решаване на сложни задачи с голяма размерност. Понятието *голяма размерност* се променя с нарастване на производителността на изчислителната техника. И независимо от огромния прогрес в това отношение, определящи за развитието на компютърното моделиране са постиженията в областта на числените методи и алгоритмите за тяхната реализация. Съвременното разбиране за задачи с голяма размерност е свързано с брой на неизвестните от порядък $10^6 - 10^9$ и дори 10^{12} . Такъв клас задачи са предмет на направлението от изчислителната математика, което в буквален превод от английски се нарича *научни пресмятания за задачи с голяма размерност (Large Scale Scientific Computations)*. Представените резултати в настоящата дисертация са в тази област.

Методът на крайните елементи и методът на крайните разлики са представители на мрежовите методи и при определени предположения матриците на получаваните линейни системи са с близки свойства и дори могат да съвпадат. Независимо от това, методът на крайните елементи има определени предимства по отношение на общността и алгоритмите за неговата реализация. Изследванията в дисертацията системно използват терминологията и свойствата на метода на крайните елементи.

Нека е дадена елиптична гранична задача в областта $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и нека за нейното числено решаване е приложен мрежов числен метод. При много общи предположения диференциалната задача се свежда до система от линейни уравнения

Таблица 1: Изчислителна сложност на методи за решаване на системи със симетрични и положително определени разреждени матрици.

метод	$\mathcal{N}(A^{-1}b)$
Метод на Холецки: LDL^t факторизация.	$O(N^2)$
Метод на вложените сечения: ND.	$O(N^{3/2})$
Метод на спрегнатия градиент: CG.	$O(N^{3/2})$
Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне: PCG. Преобуславяне по метода на непълната факторизация.	$O(N^{5/4})$
Метод на спрегнатия градиент с преобуславяне: PCG. Оптимален преобусловител.	$O(N)$

със симетрична положително определена матрица A с размерност $N \times N$. В Таблица 1 са представени данни за изчислителната сложност на основните методи за решаване на такъв клас линейни системи. Предполага се, че методът на Холецки отчита лентовата структура или профила на матрицата при подходяща номерация на неизвестните. Този метод е все още най-разпространен в комерсиалните пакети и се прилага успешно за решаване на задачи с умерена размерност. Методът на вложените сечения (Nested Dissection) е най-бързият измежду преките методи. В основата на този метод е рекурсивното разделяне на графа, представящ структурата на ненулевите елементи на матрицата A . Следващите четири метода са итерационни. Виждаме, че още първият от тях, т.е. методът на спрегнатия градиент има изчислителна сложност, която асимптотично съвпада със сложността на най-добрия пряк метод. По тази причина е прието, че предимствата на итерационните методи за решаване на задачи с достатъчно голяма размерност са безспорни. Следват методи на спрегнатия градиент с преобуславяне, ефективността на които се определя от качествата на преобусловителя. В тази група специално ще отбележим метода на непълна факторизация. Най-често прилаганият вариант е т.н. MIC(0) (Modified Incomplete Cholecki). Достатъчно условие за неговото прилагане е матрицата A да бъде M -матрица.

Теорията на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне е представена в следващата глава, където е формулирана и стратегията за конструиране на ефективни преобусловители. Така стигаме до естествения въпрос за съществуването на оптимални методи за преобуславяне и отговорът на този въпрос е положителен. Основен подход при конструирането на оптимални преобусловители е използването на дискретизации върху последователности от мрежи. Настоящата дисертация е в това приоритетно направление на научните пресмятания за задачи с голяма размерност.

Определящи за съвременното състояние на проблема са работите на У. Акселсон, И. Бабушка, Д. Браас, П. Василевски, Дж. Брамбъл, А. Джордж, Х. Изермант, В. П. Илин, Р. Лазаров, Ю. А. Кузнецов, Ст. МакКормик, Р. Федоренко, В. Хакбуш. В този списък по азбучен ред са включени само част от имената на водещи учени, чиито работи представят някои от основните идеи и резултати, като претенциите на автора за пълнота са предварително изключени.

В тази област на изчислителната математика приносът на българската школа е определено значим. Настоящата дисертация е силно повлияна от резултатите на П. Василевски и Р. Лазаров, а така също от работите на О. Илиев, посветени на разработването на оптимални методи за решаване на уравненията на Навие-Стокс за големи числа на Рейнолдс.

2 Методология на изследването.

Отправна точка при изграждане на методологията на изследване в дисертацията е понятието изчислителна сложност. Получените резултати имат изразено конструктивен характер. Всички предложени и изследвани методи имат ясна алгоритмична структура. Това дава възможност за оценка на броя на аритметичните операции за тяхната реализация, което е и мярката за изчислителна сложност. Целта е получаването на оптимални итерационни методи. Това означава, че броят на итерациите n_{it} е равномерно ограничен от константа, която не зависи от N и изчислителната сложност на една итерация е $\mathcal{N}_{it} = O(N)$.

Итерационните методи в подпространства на Крилов са едно от десетте най-значими постижения в областта на алгоритмите през XX век. Независимо от субективния и много често спорен подбор при подобни класации, значението на този клас методи е безспорно. Най-изявеният от тях е методът на спрегнатия градиент с преобуславяне, който е в основата на съвременните оптимални итерационни методи.

Подходите, прилагани при конструиране на преобусловители могат да бъдат класифицирани в следните три групи:

- Известно е, че при точното решаване на системи от линейни алгебрични уравнения, в процеса на последователно изключване на неизвестните, разредената структура на матрицата се нарушава. В основата на методите на непълна факторизация е поддържане на контролирана разредена структура на допълнението на Шур (виж например [26, 27, 51]).
- Обобщение на класическия метод на Шварц са различните методи, свеждащи задачата в изходната област, до задачи в подобласти [31]. Методът на фиктивните области и методите за локално съгъстяване от тип FAS [39] и BEPS [30] могат да бъдат изследвани с помощта на обща алгебрична интерпретация, което дава основание да ги поставим в една и съща група, независимо от съществените различия в целите и крайния резултат (виж още [41, 52]).
- В съвременната теория на оптималните итерационни методи, основна роля играят методите построени върху последователност от мрежи (триангулации). Тези методи се разделят на мномомрежови (*multigrid*) и многонивови (*multilevel*). Терминологично това разделяне е непълно условно. Независимо от това, по традиция първата група се счита, че използва повече свойствата на диференциалната задача, докато при втората група конструкцията е в значителна степен алгебрична и се реализира в термините на метода на крайните елементи и съответните матрици на коравина. Изследванията

в тази област водят началото си от работата на Р. Федоренко [45], публикувана през 1961 г. Развитието на идеята през годините може да бъде проследена например в [12, 20, 29, 61, 65, 85, 89].

В представената дисертация са получени нови оптимални многонивови методи. Използваният апарат на изследване включва: а) конструиране на спектрално еквивалентни приближения за специални класове матрици, възникващи в процеса на многонивова факторизация; б) получаване на нови равномерни оценки на константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ); в) конструиране и изследване на Йерархични базиси за неконформни крайни елементи. В текста на дисертацията са представени ограничен брой числени експерименти, целта на които е: а) да илюстрират точността на получените равномерни оценки; б) да характеризират свойствата на нови методи и алгоритми, които дават възможност за формулиране на хипотези за следващи изследвания.

В някои от доказателствата са преодолен съществени трудности от изчислителен характер. В тези случаи, в качеството на помощни средства са използвани програмни системи за символни пресмятания.

Дисертацията е в областта на изчислителната математика. В същото време част от използваните подходи, както и възможните приложения на получените резултати, са непосредствено свързани с математическото моделиране и съвременната информатика.

3 Цели на дисертационния труд.

Сходимостта на метода на спрегнатия градиент се определя от числото на обусловеност на матрицата на системата, означено с $\kappa(A)$. Тъй като за изотропни елиптични задачи $\kappa(A) = O(N)$, то за изчислителната сложност на метода е в сила оценката $\mathcal{N}^{CG}(A^{-1}b) = O(N^{3/2})$. В този случай, многонивовите методи за преобуславяне имат относително число на обусловеност $\kappa(C_{ML}^{-1}A) = O(1)$ и оптимална изчислителна сложност относно размерността на задачата $\mathcal{N}_{ML}^{PCG}(A^{-1}b) = O(N)$. Съществено преимущество на алгебричните многонивови методи от тип АМЛІ е, че доказаните равномерни оценки са в сила без допълнителни условия за регулярност на решението, включително за задачи със скок на коефициентите (виж например [20]).

Предмет на изследване в дисертацията са лошо обусловени задачи, за които числото на обусловеност има вида

$$\kappa(A) = O(\epsilon^{-1}N),$$

където $\epsilon > 0$ е малък параметър. В този случай, константата в оценката за изчислителната сложност на стандартните оптимални РСГ методи има поведение $O(\epsilon^{-1/2})$. Така възниква проблемът за създаване на оптимални методи за задачи, зависещи от малък параметър.

Цел на изследванията в дисертацията е създаването на оптимални итерационни методи за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения с голяма размерност, които се получават при дискретизация по метода на крайните елементи на следните класове задачи:

- Елиптически гранични задачи със силна коэффициентна и/или мрежова анизотропия. Пример на такава задача е уравнение с ортотропни коефициенти. В този случай ролята на малък параметър играе ρ^{-1} , където $\rho \gg 1$ е коефициентът на анизотропия.
- Равнинна задача от теория на еластичността. Тук ролята на малък параметър играе $(1 - 2\nu)$, където $\nu \in (0, 1/2)$ е коефициентът на Поасон и задачата става лошо обусловена, когато средата е почти несвиваема, т.е. при $\nu \rightarrow 1/2$.

Тези задачи са възприети в литературата и в съвременната изчислителна практика, като базови тестове за ефективност на разработваните итерационни методи. Естествена постановка в случая е h -версията на метода на крайните елементи. Това означава, че предполагаме минимални по степен крайни елементи, като търсената точност се гарантира при достатъчно малки стойности на мрежовия параметър h . В съответствие с тези цели в дисертацията се изследват, както следва: а) линейни и билинейни конформни крайни елементи; б) линейни неконформни крайни елементи. Прилагането на неконформни крайни елементи е мотивирано от търсенето на методи за решаване на равнинната задача от теория на еластичността, за които както оценката на грешката в МКЕ, така и скоростта на сходимост на итерационния метод са оптимални в почти несвиваемия случай.

4 Структура и съдържание на дисертационния труд.

Дисертацията се състои от шест глави и библиография. Във възприетата нумерация, уводът е Глава 1.

ГЛАВА 2. Метод на спрегнатия градиент. Преобуславяне. Тази глава има характер на въведение в съвременните итерационни методи. Първите три раздела съдържат основни резултати от теорията на метода на спрегнатия градиент и възможностите за ускоряване на скоростта на сходимост на итерационния процес с помощта на техниката на преобуславяне. Поради фундаменталното значение на тези известни резултати, изложението е доста подробно, като е следвана общата схема възприета в [8]. Постоянен акцент в изложението, както в тази, така и във всички следващи глави, е анализът на методите и алгоритмите от гледна точка на тяхната изчислителна сложност. В този смисъл е формулирана и общата стратегия при конструиране на ефективни преобусловители. В последния раздел са представени оценки за характеристиките на системите от линейни алгебрични уравнения, които се получават при дискретизация на две моделни елиптически задачи в единичния квадрат, както и експериментални данни за поведението на различни итерационни методи. Нека разгледаме системата от линейни алгебрични уравнения

$$H\hat{x} = b,$$

където H е симетрична и положително определена матрица. Всеки итерационен метод се свежда до построяване на редица от приближени решения

$$x^0, x^1, \dots, x^k, \dots$$

Методът е сходящ, когато тази редица клони към точното решение. Известно е, че методът на спрегнатия градиент (CG метод) е изчислително най-ефективният измежду известните двуслойни явни методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения със симетрична и положително определена матрица.

Теорема 4.1 *За метода на спрегнатия градиент е в сила оценката*

$$p(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(H)} \ln(2/\epsilon) + 1,$$

където с $p(\epsilon)$ е означено най-малкото цяло положително число k , за което

$$\|x^k - \hat{x}\|_H \leq \epsilon \|x^0 - \hat{x}\|_H \quad \forall x^0 \in \mathbf{R}^N$$

Идеята на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне (Preconditioned Conjugate Gradient (PCG) method) е да се модифицира изходната система от линейни алгебрични уравнения по такъв начин, че числото на обусловеност на новата задача да бъде съществено намалено. Прекият метод на спрегнатия градиент с преобуславяне е известен в литературата, като алгоритъм PCG - В.

АЛГОРИТЪМ PCG - В

$$x^0, \quad g^0 = Hx^0 - b, \quad h^0 = C^{-1}g^0, \quad d^0 = h^0$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tau_k = \frac{g^{k^t} h^k}{d^{k^t} H d^k}$$

$$x^{k+1} = x^k + \tau_k d^k$$

$$g^{k+1} = g^k + \tau_k H d^k$$

$$h^{k+1} = C^{-1} g^{k+1}$$

$$\beta_k = \frac{g^{k+1^t} h^{k+1}}{g^{k^t} h^k}$$

$$d^{k+1} = -h^{k+1} + \beta_k d^k$$

Дефиниция 4.1 *Симетричната и положително определена матрица C , участваща в алгоритъм PCG-В, се нарича преобуславяща матрица или по-кратко преобусловител.*

Нека отбележим, че така описаният алгоритъм PCG-V на всяка стъпка от итерационния процес включва едно решаване на система с преобуславящата матрица C , едно умножение на матрицата H по вектор плюс две скаларни произведения и три векторни операции от типа умножение на скалар по вектор плюс вектор. Така за изчислителната сложност на една итерация получаваме оценката

$$\mathcal{N}_{it}^{PCG}(H^{-1}b) \approx \mathcal{N}(C^{-1}g^{k+1}) + \mathcal{N}(Hd^k) + 10N.$$

Теорема 4.2 *Достатъчно условие за получаване на относителна грешка в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне, удовлетворяваща неравенството*

$$\frac{\|x^k - \hat{x}\|_H}{\|x^0 - \hat{x}\|_H} \leq \epsilon$$

е

$$k \geq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(C^{-1}H)} \ln(2/\epsilon) + 1.$$

От оценката за изчислителната сложност на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне и от Теорема 4.2 следва общата стратегия за конструиране на ефективни преобусловители. Целта е, матрицата C в PCG алгоритъма да удовлетворява следните две условия:

- Съществува ефективен алгоритъм за решаване на системи с преобусловителя C . Това означава, че за изчислителната сложност искаме да е в сила условието

$$\mathcal{N}(C^{-1}x) \ll \mathcal{N}(H^{-1}x).$$

- Относителното число на обусловеност е съществено по малко от числото на обусловеност на изходната матрица, т.е.

$$\kappa(C^{-1}H) \ll \kappa(H).$$

Тези условия изглеждат на пръв поглед противоречиви. Действително, когато $\kappa(C^{-1}H)$ клони към минималната си стойност, C клони към A и $\mathcal{N}(C^{-1}x) \rightarrow \mathcal{N}(H^{-1}x)$. Тези разсъждения обаче са твърде песимистични на фона на съвременните постижения в областта на методите за преобуславяне.

Дефиниция 4.2 *Казваме, че преобусловителят C е оптимален, когато*

- $\mathcal{N}(C^{-1}x) = O(N)$
- $\kappa(C^{-1}H) = O(1)$

Основен въпрос в съвременната теория и изчислителна практика на итерационните методи е съществуването и алгоритмичната реализация на оптимални преобусловители за класове задачи. Преломен момент в това направление са много-нивовите методи за преобуславяне, област в която са и резултатите представени в този труд. Теоретичните оценки, както и представените резултати от числените експерименти в края на тази глава дават възможност да направим следните изводи:

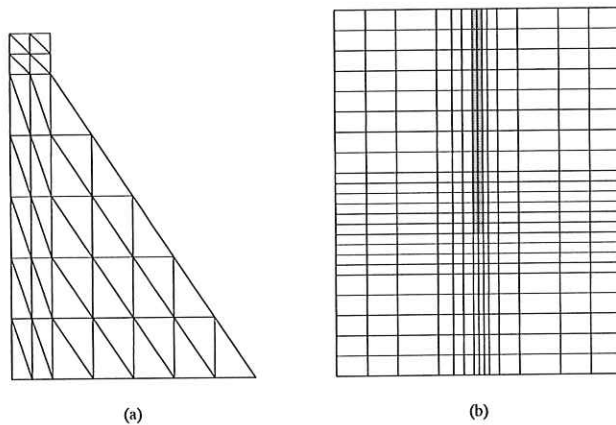
- Дори за моделната елиптична задача в единичния квадрат, при големи размерности, сходимостта на класическите итерационни методи е много бавна. Съществени са преимуществата на съвременните вариационни методи от тип метод на спрегнатия градиент и метод на спрегнатия градиент с преобуславяне. Разработването на оптимални и близки до оптималните преобусловители придобива особено важно значение, когато числото на обусловеност на изходната задача зависи от допълнителни параметри освен размерността. Такива параметри са скокове на коефициентите, коефициентната и/или мрежова анизотропия на задачата, коефициентът на Поасон в уравненията на Ламе. Подобна роля в други важни приложения играят дебелината в теория на плочите и черупките, числото на Рейнолдс в уравненията на Нвие-Стокс и др.
- При умерени стойности на коефициента на Поасон, ефективността на метода на спрегнатия градиент за решаване на системи за елиптични и еластични задачи е съпоставима. Това обаче не е в сила, когато $\tilde{\nu} \rightarrow 1$, т.е. когато еластичното тяло е от почти несвиваем материал. В този случай е необходимо прилагането на специализирани методи за преобуславяне на свързаната система.

ГЛАВА 3. Многонивови методи за ортотропни задачи върху правоъгълни мрежи.

3.1 Постановка на задачата. През 1989 Акселсон и Василевски [20, 21] публикуваха един нов клас алгебрични многонивови методи, известни в специализираната литература, като *AMLI* методи. В предложената конструкция е обобщен рекурсивно двунивовият мултипликативен преобусловител изследван от Акселсон и Густавсон в [12] и от Бенк и Дюпон в [12, 24]. Основна характеристика на така въведените *AMLI* методи е тяхната оптималност по отношение на размерността на дискретната задача (мрежовия параметър h). Получени са равномерни оценки за класове елиптични гранични задачи с прекъснати коефициенти, където за пръв път не се налагат допълнителни условия за регулярност на изходната задача. В тази глава е решена една значително по-сложна задача, където коефициентите са. В редица по-ранни работи (виж например [4, 40, 50, 64] са изследвани итерационни методи за ортотропни задачи, но в тях или скоростта на сходимост зависи от коефициента на анизотропия, или резултатът е в сила за задачи с постоянно направление на доминираща анизотропия. Това се отнася и за първата работа на автора по дисертацията [67]. Поведението на съответната константа (обикновено означавана с γ) в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ) за различни крайно-елементни пространства е изследвано числено в [86]. Нека разгледаме елиптичното уравнение

$$\begin{aligned} -(a(x, y)u_x)_x - (b(x, y)u_y)_y &= f, & \text{за } (x, y) \in \Omega, \\ u &= 0, & \text{за } (x, y) \in \Gamma_D, \\ au_x n_1 + bu_y n_2 &= 0, & \text{за } (x, y) \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

където $a(x, y)$ и $b(x, y)$ са положителни коефициенти, областта Ω е полигон, чието граница е съгласувана с правоъгълна мрежа (виж Фиг. 1), а $n = (n_1, n_2)$ е единичният външен нормален вектор относно границата Γ_N .



Фигура 1: Дискретизация върху ортогонална мрежа: а) триъгълни крайни елементи; в) правоъгълни крайни елементи.

За численото решаване на задачата прилагаме метода на крайните елементи (МКЕ). Изследванията в тази глава обхващат случая, когато областта Ω е дискретизирана с помощта на ортогонална мрежа, при което използваните крайни елементи са триъгълни или правоъгълни (виж Фиг.1). Стандартната изчислителна процедура на МКЕ свежда задачата до система от линейни алгебрични уравнения

$$Au = \mathbf{f},$$

където A е матрицата на коравина на съответната дискретна задача.

Дефиниция 4.3 *Реалното положително число*

$$\rho = \max_{(x,y) \in \Omega} \left\{ \frac{a(x,y)}{b(x,y)}, \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \right\}$$

ще наричаме коефициент на анизотропия за ортотропната елиптична гранична задача.

Коефициентът на анизотропия характеризира разглежданите в тази глава задачи. Така например, при много общи предположения, числото на обусловеност на матрицата на коравина A има асимптотика

$$\kappa(A) = O(\rho h^{-2}) = O(\rho N),$$

където h е мрежовият параметър на дискретизация в МКЕ, а N съответно е размерността на A . Така възниква необходимостта от изследване на свойствата на методите за преобуславяне за анизотропни задачи и създаването на специализирани преобусловители за такива задачи.

3.2 Оптимален многонивов метод за ортотропни задачи: линейни триъгълни крайни елементи. Нека означим с \mathcal{T}_1 една първа триангулация на Ω , която описва геометрията на областта. Ще предполагаме също така, че $a(x,y)$

и $b(x, y)$ са константи във всеки елемент $T_i \in \mathcal{T}_1$. С други думи, коефициентите $a_i = a|_{T_i}$ и $b_i = b|_{T_i}$ могат да бъдат прекъснати. За численото решаване на ортотропната елиптична гранична задача прилагаме стандартния МКЕ. Нека означим с $V_1 \subset H_0^1(\Omega)$ множеството от на части линейните функции, относно триангулацията \mathcal{T}_1 . На крайномерното пространство V_1 съответства системата от линейни алгебрични уравнения

$$A^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}.$$

За да получим числено решение с достатъчна точност прилагаме сгъстяване на мрежата. Така получаваме триангулациите $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$. Тук \mathcal{T}_{k+1} се получава посредством добавяне на средните отсечки във всеки елемент $T \in \mathcal{T}_k$. Така всеки триъгълник от по-грубата мрежа се разделя на четири еднакви триъгълника от по-финната мрежа, които са подобни на изходния. С триангулациите $\{\mathcal{T}_k\}_{k=1}^\ell$ са асоциирани крайноелементните пространства $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\ell$ и съответните матрици на коравина $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(\ell)}$. Матриците на коравина $A^{(k)}$ са пресметнати относно стандартния възлов базис. Цел на това изследване е създаването на оптимален преобусловител за матрицата $A = A^{(\ell)}$, съответстваща на последната най-финна мрежа. Алгебричният многоликов (AMLI) преобусловител, предложен и изследван от Акселсон и Василевски в [20] се дефинира с помощта на следната рекурсивна конструкция:

$$M^{(1)} = A^{(1)};$$

$$\text{за } k = 1, 2, \dots, \ell - 1$$

$$M^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & 0 \\ A_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{(k+1)^{-1}} A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

където

$$\tilde{A}^{(k)^{-1}} = \left[I - p_\beta \left(M^{(k)^{-1}} A^{(k)} \right) \right] A^{(k)^{-1}}.$$

Тук $p_\beta(t)$ е полином от степен β , такъв че $p_\beta(0) = 1$ и $0 \leq p_\beta(t) < 1$ за $t \in (0, 1]$. Нека

$$p_\beta(t) = \frac{1 + T_\beta \left(\frac{1 + \alpha - 2t}{1 - \alpha} \right)}{1 + T_\beta \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)},$$

където $\alpha \in (0, 1)$ е подходящо избран параметър, а T_β е полиномът на Чебишев от степен β .

Теорема 4.3 Ако за степента на скалирания и изместен полином на Чебишев е в сила неравенството

$$\beta^2 > \frac{1}{1 - \gamma^2},$$

то съществува $\alpha \in (0, 1)$, такава че AMLI преобуславящата матрица $M = M^{(\ell)}$ и матрицата на коравина $A = A^{(\ell)}$ са спектрално еквивалентни, т.е.

относителното число на обусловеност $\kappa(M^{-1}A)$ е ограничено от константа, която не зависи от броя на неизвестните N . По точно, в сила е оценката

$$\kappa(M^{-1}A) \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (4.2)$$

Непосредствено следствие от структурата на преобуславящата матрица M и от горната теорема е, че ако $\gamma^2 < 0.75$ и $\beta = 2$ или 3 , то в случая на равномерно сгъстяване на мрежата чрез разделяне на всеки триъгълник на четири еднакви, $AMLI$ алгоритъмът има оптимална изчислителна сложност относно броя на неизвестните N . По-точно, за достигане на относителна точност $\epsilon > 0$ в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне са достатъчни $O(N \log \frac{1}{\epsilon})$ аритметични операции. Тук обаче трябва да отбележим специално, че константата в оценката $O(N \log \frac{1}{\epsilon})$ зависи от числото на обусловеност на диагоналните блокове $A_{11}^{(k+1)}$. Реализацията на метода на спрегнатия градиент с дефинирания чрез (4.1) преобусловител M включва на всяка итерация решаване на системи с блоковете $A_{11}^{(k+1)}$, $k = 1, \dots, \ell - 1$. Тези матрици са симетрични и положително определени. Това е така защото числото на обусловеност $\kappa(A_{11}^{(k+1)})$ е равномерно ограничено относно броят на неизвестните N_k на k -тото ниво на сгъстяване на мрежата. Това свойство е в основата на оптималността на алгоритъма, когато изходната задача е изотропна. Ситуацията обаче съществено се променя, когато задачата е анизотропна. Известно е, че числото на обусловеност на $A_{11}^{(k+1)}$ клони към безкрайност заедно с коефициента на анизотропия ρ , т.е.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \kappa(A_{11}^{(k+1)}) \rightarrow \infty.$$

По тази причина, за задачи със силна анизотропия ще използваме вариант на $AMLI$ алгоритъм с модифицирани (приблизени) блокове $A_{11}^{(k+1)}$. Нека $B_{11}^{(k+1)}$ е подходящо избрана симетрична и положително определена апроксимация на $A_{11}^{(k+1)}$, за която е в сила неравенството

$$b = \text{const} \geq \kappa(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)}) - 1,$$

където положителната константа b не зависи от нивото на сгъстяване k . Резултатът от Теорема 4.3 е обобщен в [21] за модифицирания $AMLI$ алгоритъм с апроксимирани диагонални блокове. Доказано е, че равномерната оценка (4.2) остава в сила, ако

$$\beta^2 > \frac{1}{1 - \gamma^2},$$

където:

$$\text{за } \beta = 2$$

$$\alpha = \frac{4\mu - 1}{1 + 2b + (4\mu - 1 + (1 + 2b)^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mu = 1 - \gamma^2,$$

и за $\beta = 3$, $\alpha \in (0, 1)$ е минималният положителен корен на кубичното уравнение

$$bt^3 + (6b + 9 - \mu)t^2 + (9b + 6 - 6\mu)t + 1 - 9\mu = 0, \quad \mu = 1 - \gamma^2.$$

Такова α съществува, ако $\gamma^2 < \frac{8}{9}$.

Първият основен резултат, съдържащ се в тази глава представлява оригинален оптимален *AMLI* алгоритъм с апроксимирани диагонални блокове, числото на обусловеност на който, както и общата изчислителна сложност, не зависят от коефициента на анизотропия. За опростяване на изложението ще предположим, че \mathcal{T}_1 се състои от правоъгълни равнобедрени триъгълници. Това не води до допълнителни ограничения на общността на задачата, тъй като мрежовата и коефициентната ортотропия са еквивалентни по отношение на изследваните преобусловители. Също така, в случаите когато това не води до затруднения, ще изпусчаме горните индекси. Така например, ще записваме A_{11} вместо $A_{11}^{(k+1)}$. За да дефинираме апроксимираща матрица за A_{11} ще въведем блочно разделяне на възлите от $\mathbb{N}^{(k+1)} \setminus \mathbb{N}^{(k)}$ на две групи, означени съответно с квадратче и черно квадратче (виж Фиг. 2; възлите от $\mathbb{N}^{(k)}$ са маркирани с кръгче). Първата от тези групи съдържа възли принадлежащи на едно от следните две подмножества: а) центровете на успоредници Q_y съставени от два съседни триъгълника от мрежата \mathcal{T}_k , които имат общ катет, успореден на координатната ос Oy , ако $b/a \geq 1$ в Q_y ; б) центровете на успоредници Q_x съставени от два съседни триъгълника от мрежата \mathcal{T}_k , които имат общ катет, успореден на координатната ос Ox , ако $b/a \leq 1$ в Q_x . Втората група се състои от останалите възли от $\mathbb{N}^{(k+1)} \setminus \mathbb{N}^{(k)}$. В съответствие с това разделяне, матрицата A_{11} се записва в блочна 2×2 форма и може да се факторизира, както следва

$$A_{11} = \begin{bmatrix} D & F \\ F^t & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ F^t & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D^{-1}F \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

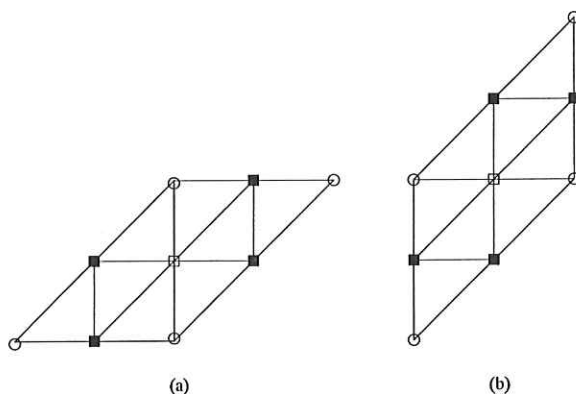
където $S = E - F^t D^{-1} F$. Тук е важно да отбележим, че D е диагонална матрица и следователно допълнението на Шур S може да се асемблира от съответните макроелементни допълнения на Шур S_Q (виж Фиг. 2).

Нека означим с $\{Q\}$ множеството от успоредниците Q_x , за които $a \geq b$ и съответно Q_y в случая $b \geq a$. Върховете на тези успоредници са възли от триангулацията \mathbb{N}_k . Независимо от това, $\{Q\}$ е определено еднозначно от началната триангулация \mathcal{T}_1 (нека напомним, че a и b са на части константи, относно елементите от \mathcal{T}_1). След така въведените означения, допълнението на Шур S може да се представи във вида

$$S = \bigcup_{Q \in \{Q\}} S_Q,$$

където с \bigcup сме означили процеса на асемблиране. При тези предположения, разглеждаме апроксимираща матрица за A_{11} във вида

$$B_{11} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ F^t & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D^{-1}F \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$



Фигура 2: Блочно разделяне на възлите от $N^{(k+1)} \setminus N^{(k)}$: (a) $Q_y : \frac{b}{a} \geq 1$ в Q_y ; (b) $Q_x : \frac{a}{b} \geq 1$ в Q_x .

Така дефинираната матрица B_{11} може да се интерпретира, като симетричен преобусловител от тип Гаус-Зайдел за A_{11} . Тук допълнението на Шур S е заменено (апроксимирано) с блока E . Нека отново напомним, че в разглеждания от нас случай, блокът D е диагонален, а на въпроса за решаването на системи с блока E ще отделим специално внимание в края на раздела.

Теорема 4.4 Нека апроксимираният блок B_{11} е дефиниран посредством (4.4). Тогава за числото на обусловеност на B_{11} относно A_{11} е в сила оценката

$$\kappa(B_{11}^{-1}A_{11}) \leq 2. \quad (4.5)$$

Представената стратегия за подреждане на възлите, съответстващи на блока E в контекста на конструиране на преобусловителя (апроксимиращата матрица) B_{11} може да бъде интерпретирана, като „запазване на връзките по направление на доминиращата ортотропия“ (виж [71]). Тази стратегия в общия случай води до такава структура на разредената преобуславяща матрица, даваща възможност за конструиране на оптимален пряк метод за решаване на системи с E и следователно с B_{11} . Такава конструкция в много по-обща постановка ще бъде представена и анализирана подробно в следващата глава.

Теорема 4.5 Относителното число на обусловеност $\kappa(M^{-1}A)$, съответстващо на модифициран многонивов метод с дефинираните в този раздел апроксимиращи блокове $\{B_{11}^{(k+1)}, k = 1, 2, \dots, \ell - 1\}$ и степен на стабилизиращия полином $\beta \in \{2, 3\}$, е равномерно ограничено с константа, която не зависи нито от размерността на дискретната задача N , нито от ортотропните коефициенти на изходната гранична задача. Съответният PCG метод има изчислителна сложност $O(N)$.

3.3 Оптимален многонивов метод за ортотропни задачи: билинейни правоъгълни крайни елементи. В този раздел ще разгледаме един нов клас

оптимални многонивови методи за ортотропната задача. Нека Ω е правоъгълен полигон и нека ω_1 е начална дискретизация с правоъгълни крайни елементи. Нека означим с V_1 пространството от билинейни крайни елементи асоциирано с ω_1 и нека $A^{(1)}$ е съответната матрица на коравина. За разлика от предишния раздел, тук допускаме възможността правоъгълната мрежа да бъде ортотропна. Това означава, че тя може да е много финна по направление на едната от координатните оси и съответно много груба по второто направление. Такава постановка е естествена за използваната схема от вложени мрежи, където на всяка стъпка се прилага сгъстяване на мрежата по едно от координатните направления. В литературата тази процедура се означава съкратено със SC (*semi-coarsening*). Нека $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_\ell$ е последователност от вложени мрежи, построени с помощта на SC процедура. Като следваме възприетия общ подход, с $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\ell$ и $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(\ell)}$ означаваме крайноелементните пространства и матриците на коравина, съответстващи на нивото на сгъстяване на началната дискретизация. За да намерим търсеното приближение по МКЕ е необходимо да решим системата линейни алгебрични уравнения за неизвестните от най-финната мрежа, т.е.

$$A^{(\ell)} \mathbf{u}^{(\ell)} = \mathbf{f}^{(\ell)}.$$

За опростяване на изложението ще предполагаме, че процедурата на сгъстяване на мрежата е равномерна, т.е. ω_{k+1} се получава, като всеки елемент от ω_k се разделя на ϱ нови елемента, както е показано на Фиг. 3 ($\varrho = 4$).

Лема 4.1 *Константа в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на рафиниране на мрежата от тип SC (сгъстяване по едно координатно направление) с параметър $\varrho = 4$ е равномерно ограничена, като е в сила оценката*

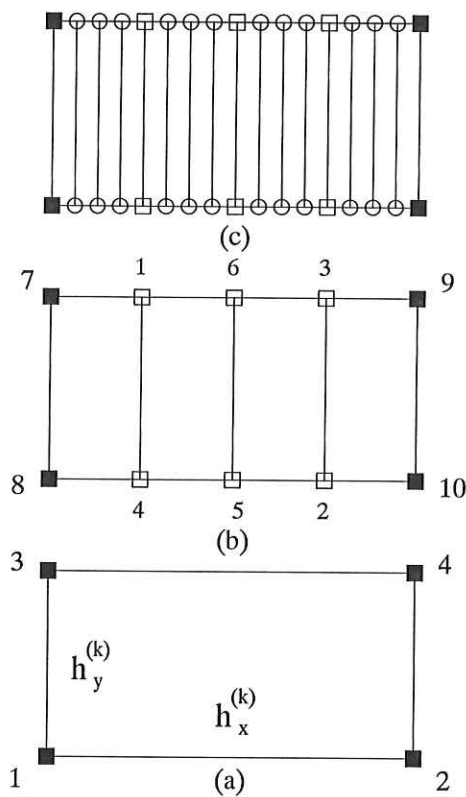
$$\gamma^2 < \frac{6}{7}. \quad (4.6)$$

Нека сега разгледаме $SCAMLI$ алгоритъм, при който вложените мрежи $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_\ell$ са построени с помощта на въведената SC процедура. За изследване на този алгоритъм ще приложим следната модификация на Теорема (4.3).

Теорема 4.6 *PCG итерационният метод с многонивов преобусловител $SCAMLI$ има оптимална изчислителна сложност, ако константата в усиленото неравенство на КБШ γ , степента на стабилизиращия полином β и параметърът на сгъстяване ϱ удовлетворяват неравенствата*

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} < \beta < \varrho. \quad (4.7)$$

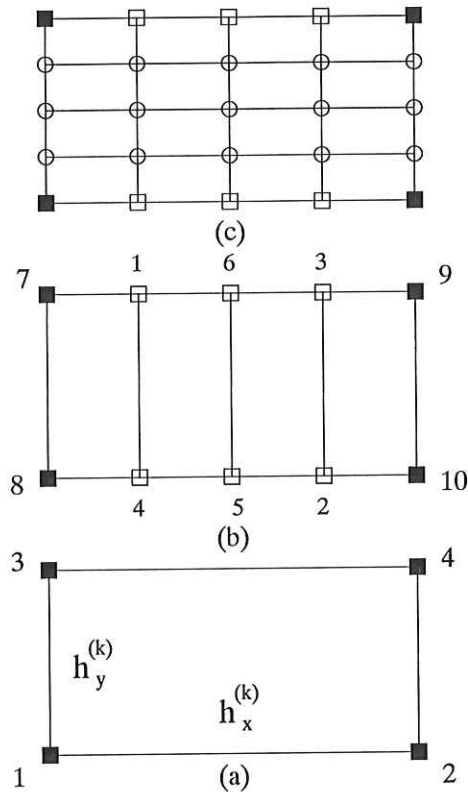
Нека отбележим, че $\varrho \approx \frac{N_{k+1}}{N_k}$, където N_k е броят на неизвестните (степените на свобода), съответстващи на (k) -то ниво на дискретизация. Доказателството на теоремата следва непосредствено от общата теория на алгебричните многонивови методи. От доказаната в Лема 4.1 равномерната оценка (4.6) и Теорема 4.6 получаваме крайния резултат от изследванията в този раздел.



Фигура 3: SC равномерно сгъстяване на мрежата, $\rho = 4$: а) ниво (k) ; б) ниво $(k + 1)$; в) ниво $(k + 2)$.

Теорема 4.7 *Многонивовият преобусловител $SCAMLI$ с параметри $\rho = 4$ и $\beta = 3$ има оптимална изчислителна сложност, която не зависи от коефициента на анизотропия на ортотропната елиптична задача ρ , както и от мрежовата ортотропия на съответната дискретна задача.*

Забележка 4.1 *Лесно се вижда, че резултатите от анализа представен в този раздел е в сила също така за случая, когато SC алгоритъмът използва алтернативно променящи се направления на сгъстяване, както е показано на Фиг. 4. Така например, на всяка нечетна стъпка ($k = 1, 3, 5, \dots$) може да се приложи сгъстяване по направление Oy и съответно на всяка четна стъпка ($k = 2, 4, 6, \dots$) сгъстяване по направление Ox . При този вариант се получава последователност от балансирани мрежи, като отпада изискването за определяне на началната стъпка $h_x^{(1)}$ в зависимост от $h_y^{(1)}$ и броя на нивата на сгъстяване l . Тази модификация не води до промени в доказателството на основната Лема 4.1, тъй като съответният анализ се отнася само до две последователни нива.*



Фигура 4: Балансирано SC равномерно сгъстяване на мрежата, $\rho = 4$: а) ниво (k) ; б) ниво $(k + 1)$; в) ниво $(k + 2)$.

Забележка 4.2 Важно свойство на $SCAMLI$ алгоритъма е, че блоковете $A_{11}^{(k+1)}$, след подходящо номериране на неизвестните, имат лентова структура с фиксирана ширина на полулентата равна на ρ . Това означава, че за разлика от конструкцията в предишния раздел, не се налага използване на приближение за $A_{11}^{(k+1)}$, като съответните системи се решават с помощта на обобщен метод на прогонката. Тук трябва да направим два важни извода. Първо, за разглеждания клас задачи върху правоъгълни мрежи, $SCAMLI$ алгоритъмът има преимущество в сравнение с модифицирания $AMLI$ алгоритъм от предходния раздел, което се изразява в постоянната структура на алгоритъма, която не зависи от промени на направлението на доминираща ортотропия в различни подобласти на Ω . От друга страна обаче, възможностите за обобщение на SC подхода за по-сложни мрежи е силно ограничен. Както ще покажем в следващата глава, модифицираният $AMLI$ алгоритъм има много по-голям потенциал за задачи в много обща постановка. Определен недостатък на $SCAMLI$ алгоритъма е и по-високата степен $\beta = 3$ на стабилизиращия полином.

ГЛАВА 4. Оптимални многонивови методи за елиптични задачи с коефициентна и мрежова анизотропия.

4.1 Многонивови методи за елиптични гранични задачи. Резултатите, представени в Глава 3, бяха последвани от поредица от изследвания (виж например [7, 18, 38, 48, 56, 76, 77, 78, 81, 82]) в областта на методите за преобуславяне на задачи със силна анизотропия. Тази глава съдържа резултати от последните години, които са получени при много-общи предположения, както за коефициентната матрица на елиптичния оператор, така и за началната триангулация на областта Ω . Нека разгледаме елиптичната гранична задача

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) &= f, & \text{за } (x, y) \in \Omega, \\ u &= 0, & \text{за } (x, y) \in \Gamma_D, \\ \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i &= 0, & \text{за } (x, y) \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

където коефициентната матрица $[a_{ij}]$ е симетрична и положително определена. В тази глава са представени резултати за многонивови преобусловители C с оценки за числото на обусловеност $\kappa(C^{-1}A)$, които са равномерни относно: а) параметъра на дискретизация h ; б) коефициентите $[a_{ij}]$ (т.е. относно анизотропията на елиптичния оператор); в) формата на триъгълните елементи (т.е. относно мрежовата анизотропия); г) възможни скокове на коефициентите относно различните триъгълници от началната мрежа на многонивовия метод. Тези резултати са съществено обобщение на представените в § 2 на Глава 3.

Като запазваме в максимална степен въведените в предишни глави означения, разглеждаме последователност от матрици на коравина записани в блочна 2×2 форма:

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ A_{21}^{(k+1)} & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, \ell - 1,$$

където $A = A^{(\ell)}$, ℓ е нивото на най-финната мрежа, а $A^{(1)}$ е матрицата на коравина за началната най-груба мрежа. Размерността на $A^{(k+1)}$ и $A_{22}^{(k+1)}$ е съответно N_{k+1} и N_k , т.е. $A_{22}^{(k+1)}$ и $A^{(k)}$ имат еднакви размерности. В този раздел на дисертацията е представен кратък преглед на известни подходи и резултати за конструиране на многонивови преобусловители в адитивна и мултипликативна форма. Целта на този аналитичен обзор е да покаже, че новите алгоритми за преобуславяне на блоковете $A_{11}^{(k+1)}$ не само обобщават резултатите от предходната глава, но са в основата на много други класове от оптимални многонивови методи.

4.2 Локален анализ на многонивови методи. Във всички цитирани оценки за алгебричните двунивови и многонивови преобусловители неизменно участва константата γ , известна като константа в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц. Това определя ключовата роля на поведението на γ за изследване на скоростта на сходимост на многонивовите итерационни методи. В сила е следният по-общ резултат, който дава възможност за три еквивалентни интерпретации на този важен параметър (виж за повече подробности обзорната статия [42], както и [8, 12]).

Лема 4.2 Нека

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$$

е симетрична и положително определена матрица записана в блочен вид, който съответства на блочно представяне на векторите $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in V$. Нека $\gamma \in (0, 1)$ е най-малката константа, за която е в сила неравенството

$$v^t A w \leq \gamma (v^t A v)^{\frac{1}{2}} (w^t A w)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_1, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \in V_2.$$

Тогава в сила са еквивалентни неравенства, които са точни.

- за всяко $i \neq j, i, j = 1, 2$

$$\gamma^2 = \sup_{v_i} \frac{v_i^t A_{ij} A_j^{-1} A_{ji} v_i}{v_i^t A_i v_i}; \quad (4.8)$$

- за всяко $v \in V_1$ и $w \in V_2$

$$(1 - \gamma)(v^t A v + w^t A w) \leq (v + w)^t A (v + w) \leq (1 + \gamma)(v^t A v + w^t A w); \quad (4.9)$$

- за всяко $i = 1, 2$

$$v_i^t S_A^{(i)} v_i \geq (1 - \gamma^2) v_i^t A_i v_i, \quad (4.10)$$

където $S_A^{(i)} = A_i - A_{ij} A_j^{-1} A_{ji}$, $i \neq j, i, j = 1, 2$, е съответното допълнение на Шуур.

В дисертацията многократно използваме последното неравенство за локален анализ на константата γ . Той се свежда до решаване на обобщена задача за собствени числа, относно макроелементните матрици, съответстващи на матриците от (4.10).

Както е известно,

$$a(u, v) = \sum_{e \in \mathcal{T}} a_e(u, v),$$

където $a_e(u, v)$ е приносът на елемента $e \in \mathcal{T}$ към глобалната билинейна форма. Намирането на елементната матрица за произволен тръгълен елемент $e \in \mathcal{T}$ с координати на върховете (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ може да се сведе до пресмятания относно еталания тригъленник \tilde{e} с координати на върховете $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Прилагаме стандартната техника на изопараметрична трансформация и получаваме елементната билинейна форма във вида:

$$a_e(u, v) = \tilde{a}_e(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{d} \int_{\tilde{e}} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right] \begin{bmatrix} (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} d\tilde{x} d\tilde{y},$$

където $0 \leq \tilde{x}, \tilde{y} \leq 1$ и $d = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$. Този резултат може да се запише във вида

$$\tilde{a}_e(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\tilde{e}} \sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_j} d\tilde{x} d\tilde{y},$$

където $\tilde{x}_1 = \tilde{x}$, $\tilde{x}_2 = \tilde{y}$ и където коефициентите \tilde{a}_{ij} зависят от координатите на върховете на елемента $e \in \mathcal{T}$, както и от коефициентите a_{ij} на разглежданата гранична задача. Следователно, за да получим оценка за константата γ в усиленото неравенство на КБШ, а както ще видим малко по-късно и за числото на обусловеност $\kappa(B_{11}^{-1}A_{11})$, е достатъчно да разглеждаме локалната задача или за еталонния триъгълник при произволни коефициенти $[a_{ij}]$, или алтернативно, за оператора $-\Delta$ и произволен триъгълник $e \in \mathcal{T}$ (виж [14]). Така получаваме, че фундаменталната оценка на Метр и Муси (виж [65])

$$\gamma^2 < \frac{3}{4},$$

доказана през 1982 г. при произволна триангулация за оператора $-\Delta$, е в сила и за произволна триангулация и произволни коефициенти на елиптичния оператор $[a_{ij}]$.

4.3 Оптимални алгоритми за преобуславяне на блоковете $A_{11}^{(k+1)}$. Предложени са и са изследвани три алгоритъма за построяване на оптимални преобусловители $B_{11}^{(k+1)}$ за матриците $A_{11}^{(k+1)}$.

4.3.1 Основни свойства и зависимости. Нека разгледаме две последователни нива на равномерно съгъстяване на мрежата (k) и $(k+1)$. Те съответстват на триангулациите \mathcal{T}_k и \mathcal{T}_{k+1} , където всеки елемент от \mathcal{T}_k е разделен на четири еднакви триъгълника от \mathcal{T}_{k+1} с помощта на средните отсечки. Следвайки стандартната процедура на асемблиране в МКЕ, матрицата $A_{11}^{(k+1)}$ може да бъде записана във вида

$$A_{11}^{(k+1)} = \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} L_E^{(k+1)t} A_{11:E}^{(k+1)} L_E^{(k+1)}, \quad (4.11)$$

където с $L_E^{(k+1)}$ е означено изображението на рестрикция на глобалния вектор от възлови неизвестни до локалния вектор, съответстващ на макроелемента E . Като отчетем общия вид на елементната матрица на коравина, съответстваща на елемента $T \in \mathcal{T}_1$, получаваме следното представяне на $A_{11:E}^{(k+1)}$, (виж например [8]),

$$A_{11:E}^{(k+1)} = 2 r_T \begin{bmatrix} a_T + b_T + c_T & -c_T & -b_T \\ -c_T & a_T + b_T + c_T & -a_T \\ -b_T & -a_T & a_T + b_T + c_T \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

където коефициентът r_T зависи от формата на $T \in \mathcal{T}_1$ и от съответните коефициенти на диференциалния оператор. Нека напомним, че и в този раздел предполагаме, че коефициентите $[a_{ij}]$ са константи за всеки елемент от началната триангулация, т.е. върху $T \in \mathcal{T}_1$. Нека предположим, че $|a| \leq b \leq c$. Това допускане не е свързано с ограничения на общността на изследването и е строго обосновано в дисертацията. Следователно

$$A_{11:E}^{(k+1)} = 2 r c \begin{bmatrix} \alpha + \beta + 1 & -1 & -\beta \\ -1 & \alpha + \beta + 1 & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & \alpha + \beta + 1 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

където $\alpha = a/c$, $\beta = b/c$. Тук $a = \cot \hat{\theta}_1$, $b = \cot \hat{\theta}_2$ и $c = \cot \hat{\theta}_3$, където $\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 = \pi$ могат да се интерпретират (виж например [8]), като ъгли в спомагателен триъгълник \hat{T} , който зависи от $T \in \mathcal{T}_1$ и от съответните коефициенти на диференциалния оператор $a_{ij}(T)$. Следователно, $(\alpha, \beta) \in D$, където $\alpha > -1/(1+c/b) \geq -1/2$, т.е.

$$D = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 : -\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \alpha + \beta > 0 \text{ и } |\alpha| \leq \beta\}. \quad (4.14)$$

4.3.2 Адитивен преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$. Адитивният преобусловител дефинираме с помощта на равенството

$$B_{11}^{(k+1)} = \sum_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} L_E^{(k+1)\dagger} B_{11:E}^{(k+1)} L_E^{(k+1)}. \quad (4.15)$$

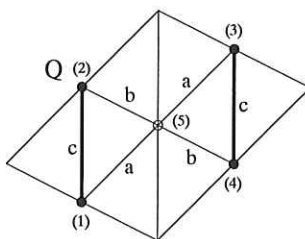
Конструираме локалната матрица $B_{11:E}^{(k+1)}$, като запазваме в $A_{11:E}^{(k+1)}$ само *доминиращите*, т.е. максималните по абсолютна стойност извъндиагонални елементи. Така получаваме

$$B_{11:E}^{(k+1)} = 2 r c \begin{bmatrix} \alpha + \beta + 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha + \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Теорема 4.8 Числото на обусловеност на адитивния преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$ е равномерно ограничено, като е в сла оценка

$$\kappa \left(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)} \right) < \frac{1}{4} (11 + \sqrt{105}) \approx 5.31. \quad (4.17)$$

Тази оценка е равномерна, както относно размерността на дискретната задача (т.е. не зависи от броя на нивата на съгъстяване), така и спрямо формата на елементите на триангулацията (без ограничения за минимален или максимален ъгъл), а така също относно анизотропните коефициенти на диференциалния оператор.



Фигура 5: Мултипликативен преобусловител. Блочно разделяне на възлите в макроелемента Q .

4.3.3 Първи мултипликативен преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$. В този параграф ще разгледаме преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$, който се дефинира с помощта на приближена блочна факторизация. За тази цел разделяме възлите, съответстващи на блока $A_{11}^{(k+1)}$ на две групи, където в първата са включени центровете на успоредниците Q (виж Фиг. 5), които са слабо свързани в смисъл на неравенствата между коефициентите $|a| \leq b \leq c$. Тук е важно да подчертаем, че успоредниците $Q \subset T \in \mathcal{T}_1$, т.е. не се допуска Q да бъде съставен от триъгълници, които са от съседни елементи относно началната триангулация \mathcal{T}_1 . В съответствие с това разделяне, $A_{11}^{(k+1)}$ се записва в блочна две на две форма, при което е в сила факторизацията

$$A_{11}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k+1)} & F_{11}^{(k+1)} \\ F_{11}^{(k+1)t} & E_{11}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k+1)} & 0 \\ F_{11}^{(k+1)t} & S_{11}^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D_{11}^{(k+1)-1} F_{11}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

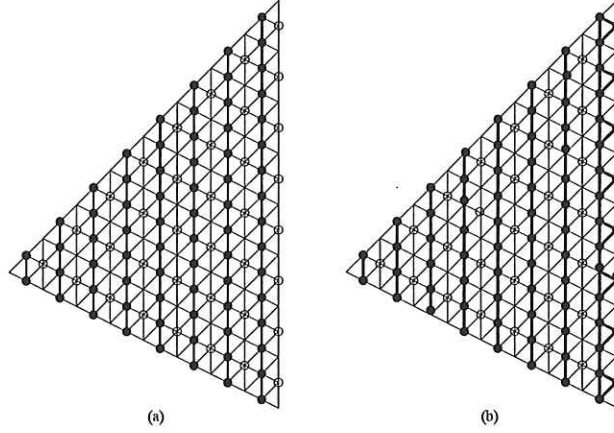
където $S_{11}^{(k+1)}$ е допълнението на Шур. Аналогично на разглежданията в предходната глава, дефинирем $B_{11}^{(k+1)}$ във вид, съответстващ на преобусловител от тип симетричен Гаус-Зайдел, т.е.

$$B_{11}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k+1)} & 0 \\ F_{11}^{(k+1)t} & E_{11}^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D_{11}^{(k+1)-1} F_{11}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Тъй като $D_{11}^{(k+1)}$ е диагонална матрица, то непосредствено се вижда, че $S_{11}^{(k+1)}$ може да се асемблира от съответните локални допълнения на Шур за всеки от дефинираните макроелементи, т.е.

$$S_{11:Q}^{(k+1)} = E_{11:Q}^{(k+1)} - F_{11:Q}^{(k+1)t} D_{11:Q}^{(k+1)-1} F_{11:Q}^{(k+1)}.$$

Структурата на ненулевите елементи на матрицата $E_{11}^{(k+1)}$, съответстваща на един триъгълник $T \in \mathcal{T}_1$ е илюстрирана на Фиг. 6.(б). Плътните линии показват запазените връзки по направление на доминиращата анизотропия. Както се вижда, единствената разлика между съответните матрици за адитивния и мултипликативния преобусловители е в свързаността на възлите от приграничния слой



Фигура 6: Структура на свързаност на възлите от $T \in \mathcal{T}_1$: (а) адитивен преобусловител $B_{11}^{(4)}$; (б) първи мултипликативен преобусловител $B_{11}^{(4)}$.

относно страната на $T \in \mathcal{T}_1$, успоредна на направлението на доминираща анизотропия. Конструкцията на този мултипликативен преобусловител е обобщение на разглежданата в предходната глава (виж още [71]), където се ограничихме до случая на ортотропна задача върху правоъгълна мрежа. Очевидно, изследването в този параграф е при значително по-общи предположения.

Теорема 4.9 *Числото на обусловеност на първия мултипликативен преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$ е равномерно ограничено, като е в сла оценка*

$$\kappa \left(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)} \right) < \frac{15}{8} = 1.875 \quad (4.20)$$

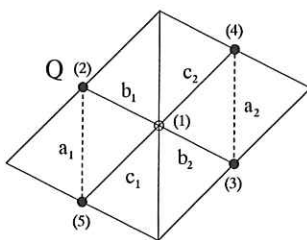
При следващи разглеждания ще означаваме съкратено този мултипликативен алгоритъм с $(M1)$.

4.3.4 Втори мултипликативен преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$. Нека отново предположим, че $|a| \leq b \leq c$ и нека разгледаме факторизацията (4.18), където разделянето на възлите съответства на макроелемент Q , съставен от два съседни триъгълника, за които направлението на недоминиращата (слаба) анизотропия (а) е успоредно на общата им страна (виж Фиг. 7). Ще означим обединението на всички такива макроеlementи с \mathcal{T}_{k+1}^Q . При тези предположения, конструираме втория мултипликативен преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$, посредством блочно диагонална апроксимация на съответното допълнение на Шур, както следва

$$B_{11}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k+1)} & 0 \\ F_{11}^{(k+1)t} & \hat{S}_{11}^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D_{11}^{(k+1)-1} F_{11}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

където

$$S_{11}^{(k+1)} = S_{11:I}^{(k+1)} + \sum_{Q \in \mathcal{T}_{k+1}^Q} S_{11:Q}^{(k+1)}, \quad \hat{S}_{11}^{(k+1)} = S_{11:I}^{(k+1)} + \sum_{Q \in \mathcal{T}_{k+1}^Q} \hat{S}_{11:Q}^{(k+1)} \quad (4.22)$$



Фигура 7: Номерация на възлите в макроелемент Q , съответстваща на блокното разделяне във втория мултипликативен преобусловител.

и

$$S_{11:Q}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{11:Q}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}.$$

Тук блоковете S_{ij} , $i, j = 1, 2$ са матрици с размерност 2×2 , където разделянето е в съответствие с локалната номерация на възлите показана на Фиг. 7.

Теорема 4.10 Числото на обусловеност на втория (M2) мултипликативен преобусловител $B_{11}^{(k+1)}$ е равномерно ограничено, като е в сила оценката

$$\kappa \left(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)} \right) < 3. \quad (4.23)$$

Забележка 4.3 Както лесно се вижда, оценката (4.23) на числото на обусловеност за мултипликативния преобусловител (M2) не е по-добра от получената в предходния параграф оценка за преобусловителя (M1). По този повод е важно да отбележим, че предимството на новия резултат се състои в това, че той е получен при по-общо предположение, което създава предпоставки за възможни следващи обобщения. В частност, тук ние никъде не използваме, че a, b и c са котангенси на ъглите на триъгълник.

4.3.5. Пример. В този параграф ще се върнем към ортотропната задача, когато матрицата на коефициентите на елиптичния оператор е диагонална, т.е. $[a_{ij}(x)] = \text{diag}[a_{11}(x), a_{22}(x)]$ и началната триангулация \mathcal{T}_1 съдържа само правоъгълни триъгълници с катети, успоредни на координатните оси. Целта на това разглеждане е още по-ясно да илюстрираме поведението на съответните числа на обусловеност. Както вече беше отбелязано в предходната глава, такава моделна задача е изследвана през годините от много автори, като за целта са прилагани различни методи за преобуславяне (виж например [4, 71, 76]). Това дава възможност за лесно съпоставяне на резултатите и още по-точно разграничаване на предимствата на алгоритмите представени в тази глава. В този случай $\cot \hat{\theta}_1 = 0$ и следователно $a_T = \alpha_T = 0$. Тук параметърът $\beta_T \in (0, 1]$ е точно коефициентът на анизотропия за разглежданата ортотропна задача. При тези предположения, оценките (4.17), (4.20) и (4.23), съответно за адитивния и двата мултипликативни преобусловители се записват в следния явен вид:

$$\kappa^{(A)} \left(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)} \right) \leq \max_{T \in \mathcal{T}_1} \left\{ 1 + \beta_T + \sqrt{\beta_T(\beta_T + 2)} \right\} < 2 + \sqrt{3} \approx 3.73$$

$$\kappa^{(M1)} \left(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)} \right) < \max_{T \in \mathcal{T}_1} \left\{ 1 + \frac{\beta_T}{2} \right\} < \frac{3}{2}$$

$$\kappa^{(M2)} \left(B_{11}^{(k+1)-1} A_{11}^{(k+1)} \right) \leq \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 2.$$

Нека още веднъж отбележим, че тази моделна задача включва важния и нетривиален случай, когато направлението на доминираща анизотропия може да се променя в различните елементи от началната триангулация $T \in \mathcal{T}_1$.

4.3.6 Решаване на линейни системи с преобусловителите $B_{11}^{(k+1)}$. Възможностите за ефективно решаване на системи с предложените преобуславящи матрици $B_{11}^{(k+1)}$ се определя от структурата на техните ненулеви елементи, или казано с други думи, от структурата на запазените връзки между възлите. Основна хипотеза в настоящия анализ е, че за решаването на тези системи използваме точни методи.

Адитивен алгоритъм (A): В този случай матрицата $B_{11}^{(k+1)}$ има обобщена тридиагонална структура (виж например [77]). Това означава, че решаването на системи с матрица $B_{11}^{(k+1)}$ има изчислителна сложност, пропорционална на броя на неизвестните в съответната система. По подробно, ако разгледаме структурата на макроелементната матрица $B_{11:E}^{(k+1)}$, виждаме че в глобалната матрица възелите са или несвързани, или най-много имат два съседни. Това означава, че възлите са или изолирани, или са свързани с начупена линия, която може да бъде и затворена, т.е. полигон. Съществено е, че тези полигони не се пресичат. Ако преномерираме възлите, следвайки линиите които ги свързват, то очевидно ще получим представяне за матрицата $B_{11}^{(k+1)}$ в блочно диагонален вид, където блоковете са диагонални или тридиагонални. По този начин системата се разделя на независими части, всяка от които се решава точно с изчислителна сложност пропорционална на нейната размерност. Важно е да отбележим, че и преномерирането на неизвестните може да се направи с оптимална изчислителна сложност.

Мултипликативен алгоритъм (M1): Оказва се, че и за този алгоритъм е възможно сравнително лесно да направим преход от моделната задача към общия случай. За тази цел ще се наложи да използваме метода на *вложените сечения* (ND). Известно е, че това е един от най-ефективните преки методи за решаване на системи с разредени матрици. В частност, ако графът представящ свързаността на матрицата е равнинен, т.е. ако той може да бъде начертан в равнината, така че никои две от ребрата да не се пресичат, то изчислителната сложност на ND алгоритъма е

$$O(n^{3/2}),$$

където n е размерността на системата (виж [46]). Нека сега означим с N_{k+1} размерността на блока $B_{11}^{(k+1)}$. На първата стъпка от нашия алгоритъм изключваме неизвестните, съответстващи на възли от вътрешността на триъгълниците от началната мрежа \mathcal{T}_1 . На практика това означава да решим определен брой тридиагонални системи и следователно необходимите за целта аритметични операции са не повече от $O(N_{k+1})$. Получената редуцирана система има очевидно равнинен

граф, представящ свързаността на матрицата и размерност $O(N_{k+1}^{1/2})$. Това означава, че решаването на редуцираната система с помощта на ND алгоритъма има изчислителна сложност

$$O(N_{k+1}^{3/4})$$

и следователно общата изчислителна сложност е $O(N_{k+1})$.

Мультипликативен алгоритъм (M2): За съжаление, току що разгледаният подход не може директно да се приложи за втория мультипликативен алгоритъм. Причината за това е, че съответният граф на свързаност не е равнинен. Това означава, че за да е възможно ефективното прилагане на ND метода за тази задача, е необходимо да съществува подходящ алгоритъм за разделяне на този специален клас графи. Тук ще ограничим нашия анализ до един важен частен случай. Алгоритъм (M2) има сериозни преимущества, ако обединението на макроелементите, използвани в конструкцията (виж Фиг.7) е равно на Ω . Тогава, системата се декомпозира на независими задачи с тридиагонални блокове. Горното допускане е очевидно в сила за ортотропни задачи дискретизирани, върху правоъгълни мрежи. Нека отбележим, че общата оценка на числото на обусловеност е в сила и за граничния случай, когато $\nu = 0$. Това дава възможност да прилагаме този метод и в случая, когато хипотенузата на триъгълник от \mathcal{T}_1 е част от границата на Ω .

Основните резултати получени в тази глава могат да бъдат сумирани в следната теорема.

Теорема 4.11 *Адитивният преобусловител и първият мультипликативен преобусловител на $A_{11}^{(k+1)}$ са оптимални. Оценкаите на изчислителната сложност са равномерни относно коефициентите на анизотропната елиптичната гранична задача и триангулацията.*

Забележка 4.4 *Нека $\mathcal{T}_{k+1}^Q = \Omega$. Това е достатъчно условие, при което вторият мультипликативен алгоритъм има оптимална изчислителна сложност.*

ГЛАВА 5. Многогонинови методи за преобуславяне на уравненията на Ламе. Конформни крайни елементи.

5.1 Постановка на задачата. Напрегнатото и деформирано състояние на еластично тяло се описва от система от диференциални уравнения, относно неизвестните премествания. Предмет на изследванията в тази глава е равнинната задача на теория на еластичността

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i &= 0 & x \in \Omega & \quad i = 1, 2 \\ u &= 0 & x \in \Gamma_D \\ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} n_j + g_i &= 0 & x \in \Gamma_N & \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{4.24}$$

където областта Ω е полигон, (n_1, n_2) е единичният външен нормален вектор относно границата $\Gamma = \partial\Omega$. Напреженията σ_{ij} и деформациите ε_{ij} са определени,

както следва:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \delta_{ij} \lambda \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad (4.25)$$

и

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Линейната зависимост между напрежения и деформации (4.25) представлява класическия закон на Хук. Неизвестни в граничната задача са преместванията $\mathbf{u}^t = (u_1, u_2)$. За коефициентите на Ламе λ и μ са в сила зависимостите

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

където с E е означен модулът на еластична деформация, а с $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ съответно коефициентът на Поасон. Ще използваме термина *почти несвиваем* за случая, когато $\nu = \frac{1}{2} - \delta$, където $\delta > 0$ е малък параметър. Когато материалът е несвиваем, т.е. $\nu = \frac{1}{2}$, граничната задача (4.24) е некоректна. Нека A е матрицата на коравина, която се получава при дискретизация на равнинната задача на теория на еластичността по метода на крайните елементи. Известно е, че в случая на *почти несвиваем* материал, числото на обусловеност на A клони към нула, като

$$\kappa(A) = O\left(\frac{1}{2\nu - 1}\right)$$

за всяко фиксирано разделяне на Ω на крайни елементи. В тази и следващата глави, цел на изследванията е разработването на многонивови алгоритми, за които са в сила равномерни оценки относно коефициента на Поасон $\nu \in (0, \frac{1}{2})$. Нека още веднъж отбележим, че тази задача е един от еталонните тестове за ефективност на съвременните итерационни методи. Някои от етапите в развитието на изследванията в тази област могат да бъдат проследени хронологично в работи [1, 2, 10, 19, 26, 35, 37, 49, 53, 54, 55, 57, 68, 69, 83]. Едва през последните години бяха получени първите оптимални оценки на базата на многонивови методи. В тази област, съществен принос имат и резултатите представени в настоящата глава.

5.2 Линейни триъгълни крайни елементи. Оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ. Нека разгледаме вариационна формулировка на граничната задача (4.24), записана във вида (виж например [10]): търсим $\mathbf{u}^t = (u_1, u_2) \in H_1^0 \times H_1^0$, такова че

$$\begin{aligned} a(u_1, \tilde{u}_1) + e_{12}(u_2, \tilde{u}_1) &= \bar{f}_1 \\ e_{21}(u_1, \tilde{u}_2) + b(u_2, \tilde{u}_2) &= \bar{f}_2 \end{aligned} \quad \text{за всяко } (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H_1^0 \times H_1^0, \quad (4.26)$$

където $H_1^0 = \{v \in H_1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$, където билинейните форми са дефинирани, както следва

$$a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1 - \tilde{\nu}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega,$$

$$b(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1 - \tilde{\nu}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega,$$

$$e_{12}(\psi, \phi) = e_{21}(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\tilde{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1 - \tilde{\nu}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\Omega.$$

В тази формулировка на задачата се оказва по-удобно да използваме модифицирания коефициент на Поасон

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \in (0, 1). \quad (4.27)$$

Нека отбележим, че в случая $\Gamma_D = \partial\Omega$, очевидно е в сила равенството

$$e_{12}(\psi, \phi) = e_{21}(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \frac{1 + \tilde{\nu}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} d\Omega.$$

Ще следваме стила на изложение от втори раздел на Глава 3. Нека Ω е полигон, границата на който е съгласувана с триангулация \mathcal{T}_1 , състояща се от равнобедрени правоъгълни триъгълници, катетите на които са успоредни на координатните оси. С други думи, елементите $T \in \mathcal{T}_1$ се получават след съгласувано разделяне с помощта на подходящ диагонал на квадратните клетки от зададена равномерна правоъгълна мрежа. Нека $V_1 \subset H_1^0 \times H_1^0$ е крайноелементното пространство от на части линейни функции, съответстващи на триангулацията \mathcal{T}_1 . Отново използваме последователност от вложени триангулации $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$, където \mathcal{T}_{k+1} се получава посредством добавяне на средните отсечки във всеки елемент $T \in \mathcal{T}_k$. Асоциирани с тези триангулации са крайноелементните пространства $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\ell$ и съответните матрици на коравина $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(\ell)}$. Матриците на коравина $A^{(k)}$ са пресметнати относно стандартния възлов базис. В съответствие с двунивовото разделяне (виж §3.2), записваме матрицата $A^{(k+1)}$ в блочения вид

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ A_{21}^{(k+1)} & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Основният резултат в този раздел е представен в следващата теорема.

Теорема 4.12 *Константата γ в усиленото неравенство на КБШ за разглежданата равнинна задача от теория на еластичността е равномерно ограничена относно коефициента на Поасон $\tilde{\nu} \in (0, 1)$, като е в сила оценката*

$$\gamma^2 < 0.75 \quad (4.29)$$

Забележка 4.5 *Както знаем, оценката на константата в усиленото неравенство на КБШ има фундаментално значение за анализа на сходимостта на алгебричните многонивови методи. Така, от Теорема 4.12 и от равномерната оценка (4.29) следва, че АМЛИ методът има оптимална скорост на сходимост за степен на стабилизиращия полином $\beta = 3$, включително в почти несвиваемия случай. Нещо повече, за всяка фиксирана стойност на коефициента на Поасон, съществуват алгебрични многонивови методи, които имат оптимална изчислителна сложност относно размерността на $A = A^{(\ell)}$.*

Забележка 4.6 Независимо, че броят на итерациите за реализиране на AMLI метода във формулировката от Теорема 4.12 не зависи от коефициента на Поасон, числото на обусловеност на $A_{11}^{(k+1)}$ е неограничено, т.е.

$$\lim_{\bar{\nu} \rightarrow 1} \kappa(A_{11}^{(k+1)}) = \infty.$$

За съжаление, оказва се че локалните методи за преобуславяне на $A_{11}^{(k+1)}$, за които в предходните глави доказахме оптимални оценки за елиптически задачи със силна коефициентна и/или мрежова анизотропия, не са приложими за разглежданата еластична задача.

В заключение ще отбележим още веднъж, че представената в този раздел равномерна оценка на константата γ от усиленото неравенство на КБШ, е първият подобен резултат за почти несвиваемия случай. Умишлено, изложението в максимална степен следва оригинала, публикуван през 1994 г. в [67]. През следващите години редица учени работиха активно в тази област, като в резултат бяха получени равномерни оценки за произволна триангулация в двумерния случай, както и за регулярна триангулация в тримерния случай. Беше изследвано също така поведението на γ при двунивови разделяния в контекста на p -версията на МКЕ. Тези резултати са публикувани в [1, 2, 54, 55].

5.3 Билинейни правоъгълни крайни елементи. Оптимален многоников метод. В този раздел е разгледано едно обобщение на AMLI методите изследвани в §3.3. Основната идея тук е, че при многоникови алгоритми от тип SC, тоест когато се прилага съгъстяване на мрежата последователно по координатните направления, водещите диагонални блокове $A_{11}^{(k+1)}$ имат блочно диагонална структура с фиксирана ширина на полулентата. Така, независимо че тяхното число на обусловеност може да зависи от коефициента на Поасон, оптималността на многониковия метод се определя единствено от равномерната ограниченост на броя на итерациите.

5.3.1 Формулировка на дискретната задача. Нека разгледаме вариационна формулировка на граничната задача (4.24), записана във вида: за $\mathbf{f} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N) \times L^2(\Gamma_N)$ търсим $\mathbf{u} \in H_1^0 \times H_1^0$, такава, че

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \mathbf{v} ds, \quad \text{за всяко } \mathbf{v} \in H_1^0 \times H_1^0, \quad (4.30)$$

където

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\mu a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (4.31)$$

В този запис, билинейните форми $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ имат следния вид

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega$$

и

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega.$$

Тук в максимална степен ще следваме постановката на SC схемата на дискретизация, въведена в §3.3 за случая на скаларна елиптична задача. Нека Ω е правоъгълен полигон и нека ω_1 е начална дискретизация с правоъгълни крайни елементи. Означаваме с $V_1 \subset H_1^0 \times H_1^0$ пространството от билинейни крайни елементи, асадирано с ω_1 и нека $A^{(1)}$ е съответната матрица на коравина. Нека $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_\ell$ е последователността от вложени мрежи, построени с помощта на SC процедура. Ще припомним, че това означава, че ω_{k+1} се получава, като всеки елемент от ω_k се разделя с помощта на отсечки успоредни на една от неговите страни на ϱ нови елемента. Като следваме възприетите означения, с $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_\ell$ и $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(\ell)}$ са означени крайноелементните пространства и матриците на коравина, съответстващи на нивото по съгъстяване на началната дискретизация. За да намерим търсеното приближение по МКЕ е необходимо да решим системата линейни алгебрични уравнения за неизвестните премествания върху най-финната мрежа, т.е.

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (4.32)$$

където $A = A^{(\ell)}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(\ell)}$ и $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(\ell)}$.

5.3.2 Модифициран многоников алгоритъм. В този раздел ще приложим модификация на алгебричен многоников алгоритъм, където степента на стабилизиращия полином може да бъде променлива. Така, ще изследваме AMLI преобусловител $M = M^{(\ell)}$ за системата (4.32) дефиниран, както следва:

$$M^{(1)} = A^{(1)},$$

за $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$

$$M^{(k+1)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k+1)} & 0 \\ A_{21}^{(k+1)} & P^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{(k+1)^{-1}} A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

където

$$P^{(k)^{-1}} = [I - p_{\beta_k}(M^{(k)^{-1}} A^{(k)})] A^{(k)^{-1}},$$

и както в стандартната формулировка $p_{\beta_k}(t)$ е подходящо скалиран и изместен полином на Чебишев от степен β_k . Известно е, че за получаване на ефективен AMLI преобусловител не е задължително да прилагаме полиномиална стабилизация на всяко ниво на съгъстяване.

Теорема 4.13 *Методът на спрегнатия градиент с многоников AMLI преобусловител (4.33) има оптимална изчислителна сложност, ако*

$$\beta_k = 1 \quad \text{за } (k \bmod k_0) \neq 0$$

и

$$(1 - \gamma^{(k_0)^2})^{-1/2} < \beta_k < \varrho_{k_0} \quad \text{за } (k \bmod k_0) = 0.$$

Тук N_k е броят на възловете неизвестни, съответстващи на дискретизацията ω_k ,

$$\varrho_{k_0} = \frac{N_{(j+1)k_0}}{N_{jk_0}}$$

е коефициентът на сгъстяване след k_0 последователни стъпки на рафиниране на мрежата, а $\gamma^{(k_0)}$ е константата в усиленото неравенство на КБШ, съответстваща на вложените пространства $V_{(j+1)k_0}$ и V_{jk_0} .

Този вариант на метода е известен, като *хибриден V-циклически AMLI* алгоритъм. Предложен е в [84], където е дадено и доказателство на теоремата. Очевидно, стандартният алгебричен многонивов алгоритъм се получава при $k_0 = 1$.

5.3.3 SC алгоритъм. В този параграф ще разгледаме SC алгоритъм с равномерно сгъстяване на мрежата, където ω_{k+1} се получава при разделяне на правоъгълниците от ω_k , както е показано на Фиг. 3. Така, всеки елемент $e \in \omega_k$ се разделя на ϱ нови елемента с помощта на отсечки, които са успоредни на вертикалните страни. Това означава, че $h_2 = h_2^{(1)}$ не зависи от нивото на сгъстяване. С други думи, ако искаме дискретизацията на най-финната мрежа да бъде балансирана, h_2 трябва да бъде от порядъка на $h_1^{(\ell)} = \varrho^{1-\ell} h_1^{(1)}$, където $h_1^{(1)}$ е мрежовият параметър по направление на координатната ос Ox_1 , относно началната мрежа. Нека отбележим, че в разглеждания от нас случай $A_{11}^{(k+1)}$ е блочно диагонална матрица, като всеки блок е с фиксирана ширина на лентата $2(\varrho + 1)$. Следователно, ефективността на многонивовия алгоритъм се определя еднозначно от повезението на константата в усиленото неравенство на КБШ. В следващия моделен анализ ще изследваме поведението на γ и въз основа на получените резултати ще търсим параметри, удовлетворяващи условията на Теорема 4.13.

Теорема 4.14 *Разглеждаме SC алгоритъм с коефициент на сгъстяване $\varrho = 2$ и нека $\epsilon^{(k+1)} = \frac{h_2^{(k+1)}}{h_1^{(k+1)}} = 1$. Тогава, константата γ_e в усиленото неравенство на КБШ е равномерно ограничена относно коефициента на Поасон, като е в сила оценката*

$$\gamma_e^2 < 0.75. \quad (4.34)$$

Получената оценка е в един частен случай. Независимо от това тя показва, че условията за оптималност на многонивовия SC алгоритъм не могат да бъдат удовлетворени при $\varrho = 2$. По-точно, не съществува цяло положително число β , такова че да е в сила условието от Теорема 4.13, тъй като $1/\sqrt{1-\gamma^2} \approx 2$. В този смисъл теорема представлява един съдържателен негативен резултат. Нека отбележим, че представените в дисертацията резултати от числени експерименти показват, че този резултат е в сила и за $\varrho > 2$.

5.3.4 Балансиран SC алгоритъм. В този параграф е разгледан вариант на хибридният V-циклически многонивов алгоритъм (4.33) в случая $k_0 = 2$, и покоординатно сгъстяване с алтернативна смяна на направленията, както е показано на Фиг. 4 при $\varrho = 2$. Изследван е балансиран SC AMLI алгоритъм в случая, когато началната мрежа ω_1 е квадратна, което означава, че $h_1^{(2j)} = h_2^{(2j)}$, за всяко j .

Теорема 4.15 *Разглеждаме балансиран SC AMLI алгоритъм с параметри $\varrho = 2$, $k_0 = 2$ и квадратна начална мрежа ω_1 . Тогава, константата в усиленото*

неравенство на КБШ е равномерно ограничена относно коефициента на Поасон и е в сила оценката

$$\gamma^2 < \frac{6}{7}. \quad (4.35)$$

Тази теорема дава възможност да конструираме оптимален многонивов алгоритъм за разглежданата задача от теория на еластичността. Така, прилагайки Теорема 4.13 в комбинация с оценката (4.35) от Теорема 4.15 получаваме следния резултат.

Теорема 4.16 *Хибридният V-цикличен алгоритъм от тип балансиран SC AMLI, дефиниран с помощта на (4.33) върху квадратна начална мрежа ω_1 и параметри $\varrho = 2$, $k_0 = 2$ и $\beta_{2j} = 3$, има оптимална изчислителна сложност относно коефициента на Поасон $\nu \in (0, 1/2)$.*

Резултатът от тази теорема е многонивов преобусловител за решаване на системата от линейни алгебрични уравнения, получена при дискретизация с билинейни правоъгълни крайни елементи на системата от диференциални уравнения на Ламе. Броят на итерациите в метода на спрегнатия градиент е равномерно ограничен, като общата изчислителна сложност е пропорционална на размерността. При това, получените оценки не зависят от коефициента на Поасон, включително в почти несвиваемия случай. На автора на е известен друг оптимален резултат за разглежданата задача на дискретната задача. В заключение, важно е да подчертаем още веднъж, че представените в тази глава оптимални резултати се отнасят до решаването на системите от линейни алгебрични уравнения, които се получават при прилагане на стандартни съгласувани крайни елементи за дискретизация на равнинната задача от теория на еластичността. Те не решават по-общия проблем, известен в литературата, като *феномен на блокиране*. За тази цел се налага да бъдат създадени и изследвани LF (*locking-free*) итерационни методи за съответните LF дискретизации на тази лошо обусловена диференциална задача.

ГЛАВА 6. Многонивови методи за преобуславяне на уравненията на Ламе. Неконформни крайни елементи.

6.1 Въведение. Както беше отбелязано в края на предишната глава, известен проблем при прилагане на конформни линейни крайни елементи е така нареченият *феномен на блокиране* (*locking phenomenon*) (виж например [34, 35, 44]). Той се проявява, когато коефициентът на Поасон клони към границата на несвиваемост, т.е. когато $\nu \rightarrow 0.5$. Оказва се, че в този случай константата в съгласуваната оценка на грешката в МКЕ клони към безкрайност, както $O((1 - 2\nu)^{-1})$. С други думи, за всяка фиксирана мрежа, грешката в МКЕ е неограничена в почти несвиваемия случай. Методи и алгоритми за които е преодолян *феномена на блокиране* ще означаваме с LR (*locking-free*). Един от най-често прилаганите подходи за получаване на LF алгоритми се основава на дискретизация на диференциалната задача, с помощта смесения МКЕ [19, 44]. Недостатък на смесения метод е относително големият брой на възловите параметри (неизвестните) на задачата. При прилагане на подходящи неконформни крайни елементи

е възможно допълнителните (дуални) неизвестни да бъдат изключени локално, което води до дискретна формулировка само относно основните неизвестни, т.е. относно преместванията [66, 83]. Една алтернатива за получаване LF дискретизация относно преместванията се получава с помощта на добавяне на подходящ стабилизиращ член (L_2 -проектор) към стандартната формулировка на вариационния функционал в МКЕ. Оказва се обаче, че при определени предположения, е възможно да получим LF алгоритъм относно неизвестните премествания, като приложим директно (след подходящо преобразуване на вариационния функционал) неконформни линейни триъгълни крайни елементи. Именно този вариант на LF алгоритъм за дискретизация е предмет на изследване в тази глава. Следвайки [35, 44], прилагаме линейни крайни елементи на Крозе-Равиар за получаване на LF числено решение на граничната задача на Дирихле за системата от диференциални уравнения на Ламе.

6.2 Формулировка на дискретната задача. Следвайки въведените в предходната глава означения, разглеждаме вариационна формулировка на граничната задача на Дирихле (4.24), записана във вида: за $\mathbf{f} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, търсим $\mathbf{u} \in V = H_1^0 \times H_1^0$, такова че

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \text{за всяко } \mathbf{v} \in V = H_1^0 \times H_1^0, \quad (4.36)$$

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} d\Omega,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\mu a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

където

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega$$

и

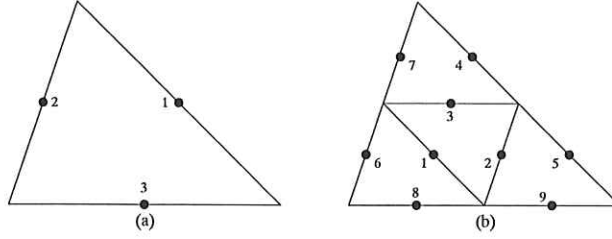
$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega.$$

В този параграф ще покажем формулировка на LF дискретизация по МКЕ с помощта на неконформни линейни крайни елементи на Крозе-Равиар. Предполагаме отново, че \mathcal{T}_h е регулярна триангулация на Ω и нека означим с $\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)$ множеството от средите на страните на триъгълниците $T \in \mathcal{T}_h$. Ще определим най-напред пространството за разглежданите неконформни крайни елементи в скаларния случай.

$$\mathcal{V}_{cr,h}^0 = \{v : v|_T \text{ е линейна; } v \text{ е непрекъсната в } \mathcal{N}(\mathcal{T}_h) \text{ и } v = 0 \text{ в } \mathcal{N}(\mathcal{T}_h) \cap \partial\Omega\}.$$

Нека дефинираме $\mathcal{V}_h = [\mathcal{V}_{cr,h}^0]^2$. Отново ще отбележим, че $\mathcal{V}_h \not\subset [C(\Omega)]^2 \Rightarrow \mathcal{V}_h \not\subset [H^1(\Omega)]^2$, което всъщност означава, че крайноелементното пространство е неконформно. Тъй като разглеждаме задачата на Дирихле с хомогенни гранични условия, лесно се вижда, че билинейната форма $a(\cdot, \cdot)$ е еквивалентна на формата

$$a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v})^t].$$



Фигура 8: Крайни елементи на Крозе-Равиар: а) триъгълник $e \in \mathcal{T}_k$; б) рафиниран макроелемент $E \in \mathcal{T}_{k+1}$.

Нека отбележим, че модификацията на вариационната формулировка на базата на билинейната форма $a^s(\cdot, \cdot)$ е от съществено значение за получаването на коректна задача, с помощта на използваните в тази глава крайни елементи на Крозе-Равиар. Дискретният вариант на $a^s(\cdot, \cdot)$ в неконформния случай се дефинира с помощта на разделяне на интеграла поелементно, т.е.

$$a_h^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}|_T)(\nabla \cdot \mathbf{v}|_T) + \mu \nabla \mathbf{u}|_T : (\nabla \mathbf{v}|_T)^t].$$

При тези предположения, ако \mathbf{u}_h е решение на дискретната задача

$$\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h : a_h^s(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \text{за всяко } \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h,$$

то в сила е съгласувана по норма оценка за грешката (виж например [35]).

Теорема 4.17 *Съществува константа $C_{\Omega, \theta}$, която не зависи от h, λ, μ (θ е минималният ъгъл в мрежата), такава че*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq C_{\Omega, \theta} h \|\mathbf{f}\|_{[L_2(\Omega)]^2},$$

където $\|\cdot\|_h := \sqrt{a_h^s(\cdot, \cdot)}$.

Теоремата показва, че дефинираната крайноелементна апроксимация е от тип LF, т.е. за разглежданата задача е преодолян феномена на блокиране.

Като следваме възприетия подход, прилагаме съгъстяване на мрежата $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$. Така получаваме триангулациите $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \dots \subset \mathcal{T}_\ell$. Тук \mathcal{T}_{k+1} се получава посредством добавяне на средните отсечки във всеки елемент $T \in \mathcal{T}_k$. Така всеки триъгълник от по-грубата мрежа се разделя на четири еднакви триъгълника от по-финната мрежа. С триангулациите $\{\mathcal{T}_k\}_{k=1}^\ell$ са асоциирани крайноелементните пространства V_1, V_2, \dots, V_ℓ и съответните матрици на коравина $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(\ell)}$. Както вече беше отбелязано, тук V_k не е подмножество на V_{k+1} . Огново, цел на изследването е създаването на оптимален преобусловител за матрицата $A = A^{(\ell)}$, съответстваща на най-финната мрежа.

6.3 Конструкция на алгебричен двунивов алгоритъм. В този раздел е представена конструкцията на алгебричен двунивов алгоритъм за преобуславяне на матрицата на коравина $A^{(k+1)}$. За целта използваме специално конструиран

двунивов базис. Нека \mathcal{T}_k и \mathcal{T}_{k+1} са две последователни триангулации, \mathcal{V}_k и \mathcal{V}_{k+1} са крайнолементните пространства, а $A^{(k)}$ и $A^{(k+1)}$ са съответните матрици на коравина. Нека A_e е елементната матрица на коравина, съответстваща на елемент $e \in \mathcal{T}_k$ и нека A_E е макроелементната матрица на коравина, където макроелементът $E \in \mathcal{T}_{k+1}$ е получен след равномерно сгъстяване на мрежата, както е показано на Фиг. 8. Тогава

$$A^{(k)} = \bigcup_{e \in \mathcal{T}_k} A_e, \quad A^{(k+1)} = \bigcup_{E \in \mathcal{T}_{k+1}} A_E,$$

където с \bigcup отново означаваме процеса на асемблиране. Нека означим с $\phi_E^t = \{\varphi(x, y)_i\}_{i=1}^9$ макроелементния вектор от възловите базисни функции. Във всички локални матрици в тази глава ще предполагаваме, че номерацията на възлите е в съответствие с Фиг. 8. Дефинираме локално йерархичен двунивов базис $\tilde{\phi}_E$ с помощта на линейна трансформация J_E , както следва:

$$\tilde{\phi}_E = J_E \phi_E, \quad J_E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad 2T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Тук, както и в цялата дисертация, с I означаваме единичната матрица, като навсякъде предполагаваме, че тя има съответната размерност. С вълничка означаваме всички вектори и матрици, които съответстват на двунивовия базис. При тези предположения глобалната матрица на коравина, пресметната относно двунивовия базис, може да се запише във вида:

$$\tilde{A}^{(k+1)} = \bigcup_{E \in \mathcal{T}_k} \tilde{A}_E, \quad \text{където } \tilde{A}_E = J_E A_E J_E^t.$$

Записваме матрицата $\tilde{A}^{(k+1)}$ в 2×2 блочен вид, след което я факторизираме, както следва.

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{A}_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & 0 \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & \tilde{B}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}_{11}^{(k+1)-1} \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Блокът $\tilde{A}_{11}^{(k+1)}$ съответства на вътрешните възлови неизвестни относно макроелементите $E \in \mathcal{T}_{k+1}$, а с $\tilde{B}^{(k+1)}$ е означено полученото допълнение на Шур. Важно е да отбележим, че $\tilde{A}_{11}^{(k+1)}$ е блочно диагонална матрица, блоковете на която са матрици с размерност 6×6 . На следващата стъпка в конструкцията на двунивовия алгоритъм апроксимираме матрицата $\tilde{B}^{(k+1)}$, която отново записваме в 2×2

блочна форма

$$\begin{aligned}\tilde{B}^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}^{(k+1)} & \tilde{B}_{12}^{(k+1)} \\ \tilde{B}_{21}^{(k+1)} & \tilde{B}_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}^{(k+1)} & 0 \\ \tilde{B}_{21}^{(k+1)} & \tilde{S}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{B}_{11}^{(k+1)-1} \tilde{B}_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.39}$$

където водещият блок $\tilde{B}_{11}^{(k+1)}$ съответства на функциите от двунивовия базис, които са дефинирани, като полуразлики на възлови базисни функции (виж (4.37)), а \tilde{S}_h е новото допълнение на Шур. Нека дефинираме двунивов преобусловител

$$M_{2L} = J^{-1} \tilde{M}_{2L} J^{-T},\tag{4.40}$$

където

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{2L} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & 0 \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & M_{\tilde{B}^{(k+1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}_{11}^{(k+1)-1} \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\ M_{\tilde{B}^{(k+1)}} &= \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11}^{(k+1)} & 0 \\ \tilde{B}_{21}^{(k+1)} & \tilde{B}_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{D}_{11}^{(k+1)-1} \tilde{B}_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тук

$$\tilde{D}_{11}^{(k+1)} = \omega \tilde{B}_{11}^{(k+1)(d)},$$

където с $\tilde{B}_{11}^{(k+1)(d)}$ сме означили диагоналната част на $\tilde{B}_{11}^{(k+1)}$, а $\omega > 0$ е параметър който ще бъде определен допълнително. Следващата теорема се получава директно от общата теория на двунивовите итерационни методи.

Теорема 4.18 *Нека параметърът ω от дефиницията на двунивовия метод (4.40) е избран така, че*

$$\mathbf{v}^t \tilde{B}_{11}^{(k+1)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^t \tilde{D}_{11}^{(k+1)} \mathbf{v} \leq \delta \mathbf{v}^t \tilde{B}_{11}^{(k+1)} \mathbf{v}.\tag{4.41}$$

Тогава за относителното число на обусловеност на двунивовия преобусловител е в сила оценката

$$\kappa(\mathcal{M}_{2L}^{-1} A^{(k+1)}) \leq \frac{\delta}{1 - \gamma^2},\tag{4.42}$$

където γ е константата в усиленото неравенство на КБШ, съответстващо на блочното представяне (4.39) на матрицата $\tilde{B}^{(k+1)}$.

6.4 Число на обусловеност на дунивовия метод. В този, както и в следващите раздели от тази глава ще предполагаме, че $\Omega = \bigcup\{T : T \in \mathcal{T}_1\}$, където елементите от \mathcal{T}_1 са равнобедрени правоъгълни триъгълници с катети успоредни на координатните оси. Очевидно същото свойство се запазва и за всяка от следващите триангулации \mathcal{T}_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$. В следващата теорема е представен основният теоретичен резултат за тази глава.

Теорема 4.19 *Относителното число на обусловеност на двумивовия преобусловител (4.40) е равномерно ограничено, както относно нивото на сгъстяване (k), така и спрямо коефициента на Поасон $\nu \in (0, 1/2)$, както следва*

$$\kappa(M_{2L}^{(k+1)-1} A^{(k+1)}) \leq \frac{\delta^{lim}}{1 - (\gamma_E^{lim})^2} = 25.683 \dots,$$

където

$$\delta \leq \delta^{lim} = 8.301 \dots, \quad \gamma \leq \gamma_E \leq \gamma_E^{lim} = \frac{\sqrt{8 + \sqrt{8}}}{4} = 0.822 \dots \quad \forall \nu \in (0, 1/2).$$

6.5 Алгебрични многонивови алгоритми. Ще разгледаме два варианта на многонивов AMLI преобусловител, които имат следния общ вид:

$$M_{AMLI}^{(1)} = A^{(1)}$$

за $k = 0, 1, \dots, \ell - 1$

$$M_{AMLI}^{(k+1)} = J^{-1} \tilde{M}_{AMLI}^{(k+1)} J^{-T},$$

където

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{AMLI}^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^{(k+1)} & 0 \\ \tilde{A}_{21}^{(k+1)} & M_B^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}_{11}^{(k+1)-1} \tilde{A}_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\ M_B^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11}^{(k+1)} & 0 \\ \tilde{B}_{21}^{(k+1)} & \hat{A}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{D}_{11}^{(k+1)-1} \tilde{B}_{12}^{(k+1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

където

$$\hat{A}^{(k+1)-1} = [I - p_\beta (M_{AMLI}^{(k)-1} R^{(k)})] R^{(k)-1}.$$

Следвайки възприетите означения, $\tilde{D}_{11}^{(k+1)} = \omega_k \tilde{B}_{11}^{(k+1)(d)}$, където $\tilde{B}_{11}^{(k+1)(d)}$ е диагоналната част на $\tilde{B}_{11}^{(k+1)}$, а p_β е подходящо скалиран стабилизиращ полином от степен β . Следващите два варианта на многонивовия алгоритъм се различават единствено по дефиницията на $R^{(k)}$.

Вариант V1: $R^{(k)} = \tau_k A^{(k)}$

Вариант V2: $R^{(k)} = \tilde{B}_{22}^{(k+1)}$

Предполага се, че положителните параметри ω_k и τ_k са избрани така, че:

$$\mathbf{v}^t \tilde{B}_{11}^{(k+1)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^t \tilde{D}_{11}^{(k+1)} \mathbf{v} \leq \delta_k \mathbf{v}^t \tilde{B}_{11}^{(k+1)} \mathbf{v}$$

и

$$(1 - \gamma_k^2) \mathbf{v}^t R^{(k)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^t \tilde{S}^{(k+1)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^t R^{(k)} \mathbf{v}.$$

AMLI алгоритъмът (4.43) има оптимална изчислителна сложност, ако параметрите δ_k са равномерно ограничени и

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} < \beta < 4, \quad \text{където} \quad \gamma = \max_k \gamma_k. \quad (4.44)$$

Таблица 2: Многонивов алгоритъм: вариант V2; $\beta = 2$

ℓ	N	ν				
		0.3	0.4	0.49	0.499	0.4999
4	1472	13	13	12	13	13
5	6016	12	12	12	14	13
6	24320	12	12	12	12	13
7	97792	11	11	11	12	13
8	196096	11	11	11	12	12

В дисертацията са представени резултати от числени експерименти, които илюстрират, както поведението на параметрите на двунивовия и многонивовите алгоритми, така и тяхната оптимална скорост на сходимост.

Вариант V1: В този случай, допълненията на Шур се апроксимират рекурсивно с една и съща по вид матрица, съответстваща на предходната по-груба мрежа на ниво k . Това означава, че на всяка стъпка е в сила доказаната за двунивовия алгоритъм равномерна оценка за параметъра δ . Проведените експерименти показват, че съответната константа γ е равномерно ограничена относно коефициента на Поасон $\nu \in (0, 1/2)$, като е в сила оценката

$$\frac{1}{1 - \gamma^2} < \frac{25}{8 - \sqrt{8}} \approx 4.83.$$

Следователно съществува стабилизиращ полином p_β при $\beta = 3$, такъв че вариант V1 на многонивовия алгоритъм (4.43) има оптимална изчислителна сложност.

Вариант V2: Вторият алгоритъм има чисто алгебрична структура. Рекурсивно дефинираните допълнения на Шур се апроксимират с матриците $\tilde{B}_{22}^{(k+1)}$, които само формално се асоциират с матрица на коравина за текущата предходна по-груба мрежа на ниво k . В този случай параметрите γ_k , δ_k и ω_k са променливи. Следващите числени резултати имат за цел да илюстрират оптималната скорост на сходимост на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне за изследваните преобусловители. При експериментите са вариран размерността на дискретната задача N и коефициента на Поасон $\nu \in (0, 1/2)$, като специално е акцентирано на *почти несвиваемия случай*. Тестов пример е задачата в единичния квадрат $\Omega = (0, 1)^2$, където $E = 1$. Използван е относителен критерий за край на итерационния процес във вида

$$\frac{(M^{-1}\mathbf{r}^{Nit}, \mathbf{r}^{Nit})}{(\mathcal{M}^{-1}\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0)} < \varepsilon^2,$$

където \mathbf{r}^i е означен резидуала на i -тата итерационна стъпка. Броят на итерациите е представен, като мярка за ефективността на използваните преобусловители. Резултатите са получени за $\varepsilon = 10^{-3}$. В Таблица 2 са показани резултати за вариант V2 на многонивовия алгоритъм при степен на стабилизиращия полином $\beta = 2$. Ясно се вижда равномерната ограниченост на броя на итерациите. В Таблица 3 са показани резултати от една по-особена модификация на многонивовия алгоритъм във вариант V2. Тук вместо полинома $[I - p_\beta(\cdot)]$ за стабилизиация

Таблица 3: Модифициран многонивов алгоритъм: PCG стабилизация

ℓ	N	ν				
		0.3	0.4	0.49	0.499	0.4999
4	1472	10	10	11	10	10
5	6016	10	11	11	11	11
6	24320	10	11	11	11	11
7	97792	11	11	11	11	11
8	196096	10	11	11	11	11

на прехода между нивата на дискретизация са използвани вътрешни PCG итерации. Работната хипотеза е, че е достатъчно броят на тези итерации да бъде равен на степента на стабилизиращия полином. Така, в конкретния случай, използваме две вътрешни PCG итерации. Както лесно се вижда, по този начин се запазва оптималност на изчислителната сложност на една итерация. Числените резултати показват, че за модифицирания алгоритъм скоростта на сходимост дори се подобрява в сравнение с резултатите показани в Таблица 2. Едно възможно обяснение за това е по-добрата адаптивност на модифицирания алгоритъм. Важно е да отбележим, че модифицираният преобусловител е нестационарен. Той се променя на всяка поредна итерация и следователно за него не е в сила общата теория на метода на спрегнатия градиент.

5 Списък на публикации по дисертацията.

- [M1] S. Margenov, *Inverse-free multilevel methods I*, Technical Report No 4, Center of Informatics and Computer Technology, Sofia (1989).
- [M2] S. Margenov, *Upper bound of the constant in the strengthened C.B.S. inequality for FEM 2D elasticity equations*, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 1(1) (1994), 65 - 74.
- [M3] S. Margenov, P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning of anisotropic elliptic problems*, SIAM J. Sci. Comp., V.15(5) (1994), 1026-1037.
- [M4] S. Margenov, L. Xanthis, *On an iterative multilevel method of arbitrary lines*, in: Proceedings of the Second Hellenic European Conference on Mathematics and Informatics HERMIS'94, (1994), 257 - 272.
- [M5] S. Margenov, L. Xanthis, L. Zikatanov, *On the optimality of the semicoarsening AMLI algorithm*, in: Iterative Methods in Linear Algebra II, IMACS Series in Computational and Applied Mathematics, New Jersey, USA, Vol. 3 (1996), 270-279.
- [M6] T. Chan, S. Margenov, P. Vassilevski, *Performance of block-ILU factorization preconditioners based on block-size reduction for 2D elasticity systems*, SIAM J. Sci. Comp., 18(1997), 1355-1366.
- [M7] I. Lirkov, S. Margenov, L. Zikatanov, *Circulant block-factorization preconditioning of anisotropic problems*, Computing, Vol. 58(3) (1997), 245-258.
- [M8] S. Margenov, P.S. Vassilevski, *Algebraic two-level preconditioning of non-conforming FEM systems*, in: Large-Scale Scientific Computations of Engineering and Environmental Problems, Vieweg Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 62 (1998), 239-248.

- [M9] S. Margenov, *Semicoarsening AMLI algorithms for elasticity problems*, Numerical Linear Algebra with Applications , Vol. 5(5) (1998), 347 - 362.
- [M10] Tz. Kolev, S. Margenov, Two-level preconditioning of pure displacement non-conforming FEM systems, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 6(7) (1999), 533-555.
- [M11] O. Axelsson, S. Margenov, An optimal order multilevel preconditioner with respect to problem and discretization parameters, Department of Mathematics, *in*: Advances in Computation: Theory and Practice, Nova Science Publishers, Huntington, New York, Vol. 7 (2001), 3-18.
- [M12] Tz. Kolev, S. Margenov, AMLI preconditioning of non-conforming elasticity FEM systems, *in*: Proceedings of the Second International Conference on NAA 2000, Springer LNCS 1988 (2001), 482-489.
- [M13] S. Margenov, AMLI preconditioning of pure displacement non-conforming FEM systems, *in*: Proceedings of 2001 International Conference on Preconditioned Robust Iterative Solution Methods for Problems with Singularities, PRISM'01, University of Nijmegen, The Netherlands (2001), 81-86.
- [M14] O. Axelsson, L. Laayonni, S. Margenov, *On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters*, submitted to SIAM J. Matr. Anal. Appl. (2001)

Седем от представените публикации по дисертацията са в списания и поредици с „импакт-фактор“. Те са, както следва:

- Numerical Linear Algebra with Applications: impact factor 1.083 (3)
- SIAM Journal on Scientific Computing: impact factor 1.196 (2)
- Computing: impact factor 0.349 (1)
- Lecture Notes on Computer Science: impact factor 0.872 (1)

6 Аprobация на резултатите.

Представените за защита резултати са добре известни на научната колегия. Те са докладвани многократно на научни семинари в Централната лаборатория по паралелна обработка на информация (ЦЛ ПОИ - БАН) и Института по математика и информатика (ИМИ - БАН), както и в следните университети и научни институти в чужбина: University of Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands; University of Wyoming, Laramie, Wyoming, USA; Texas A&M University, College Station, Texas, USA; Institute of Geonics, Czech Academy of Sciences, Ostrava, Czech Republic; Technical University of Ostrava, Ostrava, Czech Republic; Institute of Informatics, GfAI, Berlin, Germany; Institute of Industrial Mathematics, Kaiserslautern, Germany.

Съществени части от дисертацията са представени на следните специализирани научни конференции: Hellenic European Conference on Mathematics and Informatics, Athens, Hellas, September 1994 (поканен доклад) ; Second IMACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra, Blagoevgrad, Bulgaria, June 1995; 9th International GAMM Workshop on Parallel Multigrid Methods,

St. Wolfgang, Austria, May 1996 (поканен доклад) ; Conference on Algebraic Multi-level Iteration Methods with Applications, University of Nijmegen, The Netherlands, June 1996; Conference on Preconditioned Iterative Solution Methods for Large Scale Problems in Scientific Computations, University of Nijmegen, The Netherlands, May 1997 (поканен доклад) ; First Workshop on Large-Scale Scientific Computations, Varna, Bulgaria, June 1997; Fourth International Conference on Numerical Methods and Applications, Sofia, Bulgaria, August 1998; Second Workshop on Large-Scale Scientific Computations, Sozopol, Bulgaria, June 1999; Second Conference on Scientific Computing and Applications, Kananskis, Canada, May 2000 (поканен доклад) ; Second Conference on Numerical Analysis and Applications, University of Rousse, Rousse, Bulgaria, June 2000; International Conference on Preconditioned Robust Iterative Solution Methods for Problems with Singularities, University of Nijmegen, The Netherlands, May 2001 (поканен доклад) ; Third Conference on Large-Scale Scientific Computations, Sozopol, Bulgaria, June 2001.

7 Основни научни приноси.

В дисертацията е разработена конструктивна теория на оптимални многонивови методи.

1. Формулирани са общи принципи за конструиране на многонивови преобусловители за анизотропни елиптични задачи.
2. Доказани са нови равномерни оценки за константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц, при прилагане на конформни и неконформни крайни елементи.
3. Получена е характеристика на многонивови методи от тип SC AMLI за ортотропни елиптични задачи. Определени са минимални параметри на оптималност, които не зависят от коефициента на анизотропия.
4. Конструирани са и са изследвани преобусловители с оптимална изчислителна сложност и числото на обусловеност, което е равномерно ограничено относно коефициентната и мрежова анизотропия.
5. Получена е характеристика на многонивови методи от тип SC AMLI за равнинната задача от теория на еластичността. Определени са минимални параметри на оптималност, които не зависят от коефициента на Поасон $\nu \in (0, 1/2)$, включително в почти несвиваемия случай.
6. Предложен е и е изследван общ подход за конструиране на йерархични бази за неконформни крайни елементи. Тук е важно да отбележим, че за разлика от стандартните елементи, удовлетворяващи условията за съгласуваност, при неконформните елементи, пространствата съответстващи на последователни вложени триангулации не са вложени.
7. Изследвана е дискретизация на равнинна задача от теория на еластичността с неконформни линейни крайни елементи. Получен е метод за който, както оценката на грешката, така и сходимостта на итерационния процес

са равномерно ограничени относно коефициента на Поасон $\nu \in (0, 1/2)$. Така, за изследваната задача е преодолян известния феномен на блокиране в почти несвиваемия случай.

Литература

- [1] B. Achchab, O. Axelsson, L. Laayouni, A. Souissi, *Strengthened Cauchy-Bunyakovski-Schwarz inequality for a three dimensional elasticity system*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 8(3) (2001), 191-205.
- [2] B. Achchab, J. F. Maitre, *Estimate of the constant in two strengthened C.B.S. inequalities for F.E.M. systems of 2D elasticity. Application to multilevel methods and a posteriori error estimators*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 3 (1996), 147-159.
- [3] Arnold, D.N., *Discretization by finite elements of a parameter dependent problem*, Numer. Math., Vol. 37 (1981), 404-421.
- [4] O. Axelsson, *On algebraic multilevel iteration methods for selfadjoint elliptic problems with anisotropy*, Rend. Sem. Math. Univers. Politech. Torino, Fascicolo Speciale, Numerical Methods (1991), 31-61.
- [5] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, Cambridge, University press (1996).
- [6] O. Axelsson, *The stabilized V-cycle method*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 74 (1996), 33-50.
- [7] O. Axelsson, *Stabilization of algebraic multilevel iteration methods; additive methods*, Numerical Algorithms, Vol. 21 (1999), 23-47.
- [8] O. Axelsson and V.A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computations*, Academic Press, Orlando, Fl.(1983).
- [9] O. Axelsson and V. Eijkhout, *Analysis of recursive 5-point/9-point factorization method*, in: Proceedings of the Conference on PCG Methods, Nijmegen, The Netherlands, June, 1989, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 1457 (1990), 154-173.
- [10] O. Axelsson and I. Gustafsson, *Iterative methods for the Navier equations of elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrn, 15 (1978), 241-258.
- [11] O. Axelsson and I. Gustafsson, *A preconditioned conjugate gradient method for finite element equations, which is stable for rounding errors*, in: Information Processing 80, North-Holland, IFIP (1980), 723-728.
- [12] O. Axelsson and I. Gustafsson, *Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximation*, Math. Comp., Vol. 40 (1983), 219-242.
- [13] O. Axelsson, L. Laayouni, S. Margenov, *On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters*, submitted to SIAM J. Matr. Anal. Appl. (2001)
- [14] O. Axelsson and S. Margenov, *An optimal order multilevel preconditioner with respect to problem and discretization parameters*, in: Mineev, Wong and Lin eds., Advances in Computation: Theory and Practice, Nova Science Publishers, Huntington, New York, Vol. 7 (2001), 3-18.
- [15] O. Axelsson, S. Margenov, *On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters*, submitted to SIAM J. Matr. Anal. Appl.
- [16] O. Axelsson and M. Neytcheva, *The short length AMLI method I*, Report 9417, Department of Mathematics, University of Nijmegen (1994).

- [17] O. Axelsson and M. Neytcheva, *Algebraic multilevel iterations for Stieltjes matrices*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 1 (1994), 213-236.
- [18] O. Axelsson and A. Padiy, *On the additive version of the algebraic multilevel iteration method for anisotropic elliptic problems*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 20 (1999), 1807-1830.
- [19] O. Axelsson and A. Padiy, *On a robust and scalable linear elasticity solver based on a saddle point formulation*, Int. J. Numer. Meth. Enging., Vol. 44 (1999), 801-818.
- [20] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods, I*, Numer. Math., Vol. 56 (1989), 157-177.
- [21] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods, II*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 27 (1990), 1569-1590.
- [22] O. Axelsson and P. S. Vassilevski, *A survey of a class of algebraic multilevel iteration methods for positive definite symmetric matrices*, in: Numerical Mathematics and Advanced Applications, World Scientific (2000), 16-30.
- [23] I. Babuška and M. Suri, *Locking effects in the finite approximation of elasticity problems*, Numer. Math., Vol. 62 (1992), 439-463.
- [24] R. Bank and T. Dupont, *Analysis of a two-level scheme for solving finite element equations*, Report CNA-159, Center for Numerical Analysis, The University of Texas at Austin, USA (1980).
- [25] R. Bank, T. Dupont and H. Yserentant, *The hierarchical basis multigrid method*, Numer. Math., Vol. 52 (1988), 247-458.
- [26] R. Blaheta, *Displacement decomposition-incomplete factorization preconditioning techniques for linear elasticity problems*, Numer. Linear Algebra Appl., 1 (1994), 107-128.
- [27] R. Beauwens, *Factorization iterative methods, M-operators, H-operators*, Numer. Math., 31 (1979), 335-357.
- [28] D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge, University press (1997).
- [29] J. Bramble, *Multigrid Methods*, Longman Scientific & Technical, UK (1993).
- [30] J. Bramble, R. Ewing, J. Pasciak and A. Schatz, *A preconditioning technique for the efficient solution of problems with local grid refinement*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 67 (1988), 149-159.
- [31] J. Bramble, J. Pasciak and A. Schatz, *An iterative method for elliptic problems on regions partitioned into substructures*, Math. Comp., 46 (1986), 361-370.
- [32] J. Bramble, J. Pasciak and X. Zhang, *Two-level preconditioners for 2m'th order elliptic finite element problems*, East-West J. Numer. Math, Vol. 4(2) (1996), 99-120.
- [33] S.C. Brenner, *A nonconforming mixed multigrid method for the pure displacement problem in planar linear elasticity*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 30 (1993), 116-135.
- [34] S. Brenner and L. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Texts in applied mathematics, Vol. 15, Springer-Verlag (1994).
- [35] S. Brenner and L. Sung, *Linear finite element methods for planar linear elasticity*, Math. Comp., Vol. 59 (1992), 321-338.
- [36] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Verlag, New York (1991).

- [37] T. Chan, S. Margenov, P. Vassilevski, *Performance of block-ILU factorization preconditioners based on block-size reduction for 2D elasticity systems*, SIAM J. Sci. Comp., 18(1997), 1355-1366.
- [38] Z. Chen, R. Ewing, R. Lazarov, S. Maliasov and Yu. Kuznetsov, *Multilevel preconditioners for mixed methods for second order elliptic problems*, Numer. Lin. Alg. Appl., Vol. 3 (1996), 427-453.
- [39] S. McCormic, *Fast adaptive composite grid (FAC) methods: Theory for the variational case*, Computer Supplement, Vol. 5 (1984), 115-121.
- [40] J. Donato and T.F. Chan, *Fourier analysis of incomplete factorization preconditioners for 3-D anisotropic problems*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 13 (1992), 319-338.
- [41] R. Ewing, R. Lazarov, P.S. Vassilevski, *Local refinement techniques for elliptic problems on cell-centered grids; II. Optimal order two-grid iterative methods*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 1 (1994), 337-368.
- [42] V. Eijkhout and P.S. Vassilevski, *The role of the strengthened C.-B.-S. inequality in multilevel methods*, SIAM Review, Vol. 33 (1991), 405-419.
- [43] V. Eijkhout and P.S. Vassilevski, *Positive definiteness aspects of vectorizable preconditioners*, Parallel Computing, Vol. 10 (1989), 93-100.
- [44] R.S. Falk, *Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity*, Mathematics of Computation, Vol. 57 (1991), 529-550
- [45] R. Fedorenko, *On a relaxation method for solving discrete elliptic equations*, J. Comp. Math. and Math. Phys., Vol. 1-5 (1961), 922-927 (in Russian)
- [46] A. George and J. W. H. Liu, *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1981).
- [47] A. Georgiev, S. Margenov, M. Neytcheva, *Multilevel algorithms for 3D simulation of nonlinear elasticity problems*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 50 (1999), 175-182
- [48] I. Gustafsson, *An incomplete factorization preconditioning method based on modification of element matrices*, BIT, Vol. 36(1) (1996), 86-100.
- [49] I. Gustafsson, G. Lindskog, *Parallel algorithms for orthotropic problems*, Numer. Lin. Alg. Appl., Vol. 3 (3) (1996), 185-203.
- [50] W. Hackbusch, *The frequency decomposition multi-grid method. 1. Application to anisotropic equations*, Numer. Math., Vol. 56 (1989), 219-245.
- [51] V.P. Il'in, *Incomplete factorization methods*, Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 3 (1988), 179-198.
- [52] O. Iliev, D. Stoyanov, *Multigrid-adaptive local refinement solver for incompressible flows*, in: Large-Scale Scientific Computing, Springer Lecture Notes in Computer Science, LNCS 2179 (2001), 361-368.
- [53] M. Jung, U. Langer and U. Semmler, *Two-level hierarchically preconditioned conjugate gradient methods for solving linear elasticity finite element equations*, BIT, Vol. 29 (1989), 748-768.
- [54] M. Jung and J.F. Maitre, *Some remarks on the constant in the strengthened C.B.S. inequality: application to h- and p-hierarchical finite element discretization of elasticity problems*, Preprint SFB393/97-15, TU Chemnitz-Zwickau (1997).

- [55] M. Jung and J.F. Maitre, *Some remarks on the constant in the strengthened C.B.S. inequality: estimates for hierarchical finite element discretization of elasticity problems*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol. 15(4) (1999), 469-488.
- [56] B.N. Khoromskij and G. Wittum, *Robust Schur complement methods for strongly anisotropic elliptic equations*, Numer. Lin. Alg. Appl., Vol. 6(8) (1999), 621-654.
- [57] M. Kocvara and J. Mandel, *A multigrid method for three-dimensional elasticity and algebraic convergence estimates*, Appl. Math. Comp., Vol. 23 (1987), 121-135.
- [58] Tz. Kolev, S. Margenov, *Two-level preconditioning of pure displacement non-conforming FEM systems*, Numer. Linear Algebra Appl., Vol. 6 (1999), 533-555.
- [59] Tz. Kolev, S. Margenov, *Multilevel HB preconditioning of non-conforming FEM systems*, in: Recent Advances in Numerical Methods and Applications II, World Scientific (1999), 603-610.
- [60] Tz. Kolev, S. Margenov, *AMLI preconditioning of non-conforming elasticity FEM systems*, in: Numerical Analysis and Its Applications, Lecture Notes in Computer Science, LNCS 1988 (2001), 482-489.
- [61] Y.A. Kuznetsov, *Algebraic multigrid domain decomposition methods*, Soviet J. Numer. Methods and Math. Modelling, Vol. 4 (1989), 351-380.
- [62] R. Lazarov, S. Margenov, *Pointwise local refinement and BEPS preconditioning for elliptic problems on cell-centered grids*, Report 1992-09, Enhanced Oil Recovery Institute, University of Wyoming, Laramie, Wyoming (1992).
- [63] I. Lirkov, S. Margenov, P.S. Vassilevski, *Circulant block-factorization preconditioners for elliptic problems*, Computing, Vol. 53(1) (1994), 59-74.
- [64] I. Lirkov, S. Margenov, L. Zikatanov, *Circulant block-factorization preconditioning of anisotropic problems*, Computing, Vol. 58(3) (1997), 245-258.
- [65] J.F. Maitre and F. Musy, *The contraction number of a class of two-level methods; an exact evaluation for some finite element subspaces and model problems*, Multigrid Methods, Proceedings, Koln-Porz 1981, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 960 (1982), 201-216.
- [66] D. Malkus and T. Hughes, *Mixed finite element methods. Reduced and selective integration techniques: a uniform concepts*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 15 (1978), 63-81
- [67] S.D. Margenov, *Inverse-free multilevel methods I*, Report No. 4, Bulgarian Academy of Sciences, Center of Informatics and Computer Technology, Sofia, Bulgaria (1989).
- [68] S.D. Margenov, *Upper bound of the constant in the strengthened C.B.S. inequality for FEM 2D elasticity equations*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 1 (1994), 65-74.
- [69] S.D. Margenov, *Semi-coarsening AMLI algorithms for elasticity problems*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 5 (1998), 347-362.
- [70] S. Margenov, *AMLI preconditioning of pure displacement non-conforming FEM systems*, in: Proceedings of 2001 International Conference on Preconditioned Robust Iterative Solution Methods for Problems with Singularities, PRISM'01, University of Nijmegen, The Netherlands (2001), 81-86.
- [71] S.D. Margenov and P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning of anisotropic elliptic problems*, SIAM J. Sci. Comp., Vol. 15(5) (1994), 1026-1037.
- [72] S. Margenov and P.S. Vassilevski, *Algebraic two-level preconditioning of non-conforming FEM systems*, in: Large-Scale Scientific Computations of Engineering and Environmental Problems, VIEWEG Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.62 (1998), 239-248.

- [73] S.D. Margenov and L.S. Xanthis, *On an iterative multilevel method of arbitrary lines*, in: Proceedings of the Second Hellenic European Conference on Mathematics and Informatics - HERMIS '94 (1994), 246-260.
- [74] S. Margenov, L. Xanthis, L. Zikatanov, *On the optimality of the semi-coarsening AMLI algorithm*, in: Iterative Methods in Linear Algebra II, IMACS Series in Computational and Applied Mathematics, New Jersey, USA, Vol. 3 (1996), 270-279.
- [75] M. Neytcheva, *Arithmetic and communication complexity of preconditioning methods*, Ph.D. Thesis, KUN, The Netherlands (1995).
- [76] Y. Notay, *An efficient multilevel preconditioner robust with respect to anisotropy*, Report GANMN 96-03, ULB Brussels (1996).
- [77] Y. Notay, *A multilevel block incomplete factorization preconditioning*, Applied Numerical Mathematics, Vol. 31 (1999), 209-225.
- [78] Y. Notay and A. van de Velde, *Coarse grid acceleration of parallel incomplete preconditionings*, in: Iterative Methods in Linear Algebra II, Series in Computational and Applied Mathematics, IMACS 3 (1996), 106-130.
- [79] M. Ong, *Hierarchical basis preconditioners for second order elliptic problems in three dimensions*, Technical Report No 89-3, Department of Applied Mathematics, University of Washington (1989).
- [80] M. Ong, *Hierarchical basis preconditioners in three dimensions*, SIAM J. Sci. Comput, Vol. 18 (1997), 479-498.
- [81] A. Padiy, *Reliable iterative methods for solving ill-conditioned algebraic systems*, Ph.D. Thesis, KUN, The Netherlands (2000).
- [82] A. Reusken, *A multigrid method based on incomplete Gaussian elimination*, Num. Lin. Alg. Appl., Vol. 3 (5) (1996), 427-454.
- [83] J. Schöberl, *Robust multigrid preconditioner for parameter-dependent problems I: The Stokes-type case*, Technical Report No 97-2, Johannes Kepler University, Linz, Austria (1997).
- [84] P.S. Vassilevski, *Hybrid V-cycle algebraic multilevel preconditioners*, Math. Comp., Vol. 58 (1992), 489-512.
- [85] P.S. Vassilevski, *On two ways of stabilizing the hierarchical basis multilevel methods*, SIAM Review, Vol. 39 (1997), 18-53.
- [86] P.S. Vassilevski and M.H. Etova, *Computation of constants in the strengthened Cauchy inequality*, SIAM J. Sci. Statist. Comp, Vol. 13 (1992), 655-665.
- [87] P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods*, John Wiley & Sons (1992).
- [88] J. Xu, *Iterative methods by space decomposition and subspace correction*, SIAM Review, Vol. 34 (1992), 581-613.
- [89] H. Yserentant, *On the multilevel splitting of finite element spaces*, Numer. Math., Vol. 49 (1986), 379-412.