

С. У. Св. „Климент Охридски“

273

Антоний Тодоров Попов

ДИСЕРТАЦИЯ

София, 1997 г.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "Св. Климент Охридски"  
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

---

Антоний Тодоров Попов

**МОРФОЛОГИЧЕН АНАЛИЗ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ФОРМИ И  
ПРИЛОЖЕНИЯТА  
МУ В РОБОТИКАТА И РАЗПОЗНАВАНЕТО НА ОБРАЗИ**

дисертация за присъждане на  
образователна и научна степен "Доктор"

Научна специалност 01.01.13

Научни консултанти :

проф., д.м.н. Любомир Лилов  
ст.н.с. II ст. д-р Светослав Марков

София, 1997

## Съдържание

УВОД	3
<b>1 Въведение в математическата морфология</b>	<b>11</b>
1 <i>Бинарни морфологични операции</i>	17
2 <i>Полутонови морфологични операции</i>	19
3 <i>Морфологични операции върху изпъкнали множества</i>	23
3.1 <i>Морфологични операции и хаусдорфови приближения на функции</i>	27
4 <i>Морфологични операции върху интервали</i>	28
<b>2 Приложение при планиране на движенията на работи в среда с препятствия</b>	<b>35</b>
<b>3 Анализ на текстурни изображения на грапави повърхности чрез пресмятане на фрактална размерност</b>	<b>43</b>
1 <i>Основни положения</i>	43
2 <i>Покрития и размерност на Минковски - Булиганд</i>	45

3	<i>Компютърна реализация . . . . .</i>	49
4	<b>Скелети на множества и построяването им с приближени методи</b>	<b>51</b>
1	<i>Скелети на множества – дефиниция и основни свойства . . . . .</i>	52
2	<i>Диаграми на Вороной и триангулации на Делоне . . . . .</i>	55
3	<i>Суперструктури и нестандартни разширения . . . . .</i>	57
4	<i>Триангулации на Делоне и тязната нестандартна версия . . . . .</i>	61
5	<i>Методи за приближено построяване на скелета на дадено множество</i>	63
5.1	<i>Трансформация на разстоянията и средна ос . . . . .</i>	63
5.2	<i>Приближаване на скелета с помощта на диаграми на Вороной . . . . .</i>	67
5	<b>Размити множества, морфологични оператори върху тях и приблизителна изпъкналост</b>	<b>73</b>
1	<i>Основни понятия и твърдения . . . . .</i>	75
2	<i>Размити изпъкнали множества и диференцируемост на размити функции . . . . .</i>	82
3	<i>Мерки за приблизителна изпъкналост и размити морфологични операции . . . . .</i>	90
3.1	<i>Практическа реализация на индикаторите на приблизителна изпъкналост . . . . .</i>	92



## УВОД

Методът на математическата морфология е създаден от Serra и Matheron [36, 53], работещи по проблемите на минералогията и петрографията, по-точно по определяне на свойствата на порести материали в зависимост от тяхната геометрична структура и топология. Основната идея на техния подход е сравняването на структурата на изображението с малки образци, налагайки ги на различни места по изображението. Изобщо, поради причини от психологически характер е напълно естествено човек да мисли геометрически и съответно да се стреми да приложи геометрични и топологични похвати при анализа на визуална информация. Понастоящем математическата морфология се използва широко в анализа на изображения и сигнали и ролята ѝ ще се засилва поради простата реализация на основните морфологични операции с помощта на оптичен хардуер.

Първоначално, математическата морфология е разработена за анализ на двоични изображения, които могат да бъдат интерпретирани математически като множества. Съответните морфологични оператори се изграждат на базата на теоретико - множествени операции обединение, сечение, допълнение и на прости геометрични преобразования. Основна роля също така играят Хаусдорфовото разстояние и топологията на Фел за оценка на "приликата" между изследваните обекти. В много литературни източници, например [24] или [55] се споменава, че математическата морфология е подход за извличане на геометрична информация от дадена сцена и по-точно, за анализ на формата на обектите от сцената. Както споменава Нејманс [24] три основни геометрични понятия лежат в основата на математическата морфология – *групи и алгебри от геометрични трансформации* като трансляции, ротации, перспективни проекции, *метрични пространства и изпъкналост*.

По-нататък се появява нуждата от по-мощна теория, работеща върху пространства от затворените множества на дадено топологично пространство, от изпък-

налите подмножества на линейно пространство, а също така и върху функционални пространства с цел анализ на полутонови изображения. Пръв Serra [54] забеляза, че пространството, върху което действат морфологичните оператори трябва да има свойствата на пълна решетка. Оттогава математическата морфология се използва като формализъм за изследвания не само в анализа на изображения и разпознаването на образи, но и в приложни науки като роботиката и изучаването на свойствата на композитните материали, както и в теоретични области на приложната математика като интервалните пресмятания и теорията на размитите множества.

В момента морфологичният анализ на форми е бурно развиваща се област. Така например, само по въпроса на скелетизацията на изображения през последните 10 години има публикувани голям брой работи, които се занимават както с теоретично изследване на скелетните трансформации, така и с ефективни методи за тяхното пресмятане. Ще споменем само най-основните от тях – на Matheron [55], Meyer [56], Maragos и Schafer [35], Kresch и Malah [52].

Въпреки наличието на такава обширна литература, все още остават много открити въпроси като например този за пренебрежимостта по отношение на Лебеговата мярка.

Също така активно се налагат методи за изследване на форма, базирани на геометрия и топология на размити множества. Такива са например работите на Rosenfeld [47], Foster [17], Bloch [12], Bloch и Maître [11].

Полето на приложение на морфологичния анализ се разширява непрекъснато и навлиза в нетрадиционни области като теорията на динамичните системи [37], диференциалната геометрия [49] и др. Обратно, формулирането на нетривиални приложни проблеми обогатява теорията на математическата морфология и по-специално морфологичния анализ на геометрични форми [33].

Пример за бурното развитие на областта е и провеждането на многобройни международни прояви като школата на НАТО Shape in picture, Амстердам, 1992г. и на Лятната школа по морфологични методи в обработката на сигнали и изоб-

ражения, 1995 г., Закопане, Полша. На големите международни конференции по анализ на изображения и разпознаване на образи като 5-тата международна конференция по обработка на изображения и приложения IPA 95, Единбург, 3 – 7 юли 1995 и 13-тата международна конференция по разпознаване на образи ICPR 96, Виена, 25 – 29 август 1996, има специални сесии посветени на морфологичните методи.

Настоящият дисертационен труд е посветен на анализа на геометрични форми и на математическата формализация на някои характеристики на формите, за които съществува интуитивна представа. Такива са например характеристиките “изпъкналост” и “грапавост” – така например две повърхности интуитивно могат да сравняват според тяхната грапавост, както и да се прецени кой измежду два обекта изглежда по-изпъкнал. Настоящият труд си е поставил за задача на базата на морфологични операции да се въведат характеристики на грапавостта на дадена повърхност, както и индикатори на приблизителна изпъкналост на даден обект, да се изучат основните свойства на така въведените характеристики и експериментално да се потвърди адекватността им по отношение на човешките възприятия. Важен от теоретична и практична гледна точка математически апарат характеризиращ както глобално така и локално формата на обектите е скелетизацията им. На понятието скелет на множество е посветена обширна литература, но въпреки това остават неизяснени много въпроси както от чисто математическата страна, така и относно методите за компютърно представяне и ефективно построяване. Цел на настоящия труд е и разглеждането на въпроса за приближено построяване на скелети чрез средни оси и диаграми на Вороной, което дава възможност за ефективно построяване на скелети в много случаи. Разгледани са приложения в планирането на движения на работи в среда с препятствия и в координирането на движенията на работи в обща работна среда.

Основните резултати в дисертационния труд са получени на базата на морфологични операции над подходящо зададена пълна решетка. За въвеждането на индикаторите на изпъкналост е използвана още теорията на размитите множества и изпъкналия анализ. При анализа на грапавостта на повърхнините са

използвани известни факти от фракталната геометрия. При изучаването на скелетите на множествата е използван въведението от А. Robinson [46] през 1961 г. нестандартен математически анализ, който намира приложения в изследвания в областта на частните диференциални уравнения, статистиката, теорията на Банаховите пространства и др. свеждайки задачата от анализ на непрекъснати обекти до анализ на дискретни [27]. За програмната реализация са използвани езиките за програмиране C и Parallel C и системата за геометрично моделиране KNOCKOUT, част от самата която е дело на дисертанта.

В първа глава на дисертацията представя алгебричната основа на математическата морфология както и някои необходими факти от теорията на изпъкналите множества и Хаусдорфовата метрика. Показани са някои характерни конструкции на морфологични операции – бинарни и полутонови операции и операции върху изпъкнали множества. техни приложения. Тази глава има обзореен и встъпителен характер и съдържа главно известни факти. Авторският принос в тази глава се съдържа в параграф 3, по-точно в частта касаеща хаусдорфовите приближения на функции, и в параграф 4, в който се описва връзката между известните интервални аритметични операции [29]. Тези две части са изцяло дело на дисертанта.

Втора глава на дисертацията разглежда проблема с планиране на безконфликтни движения на работи в среда с препятствия. При решаването на тази задача от особена важност е построяването на модел на работната среда. За ефективното планиране на безконфликтни движения се налага да се построят образите на препятствията в конфигурационното пространство на работата, вж. например [42], тоест да се определят конфигурациите на работата при които има стълкновение с някое от препятствията в работната зона. Както е показано в настоящата работа, намирането на образа на препятствията от работната зона на работата в конфигурационното му пространство може да се извърши с помощта на морфологични операции, което алгоритмизира и улеснява практическото решаване на проблема.



Във втора глава се разглежда още и задачата за координация на движенията на два робота действащи в обща среда. Задачата за координиране на двата робота при едновременно изпълнение на задания се решава ефективно чрез инкременталния геометричен алгоритъм на O'Donnell и Lozano-Perez предложен в работата [38]. За прилагането на алгоритъма е необходимо предварително да бъде определена югозападната обвивка на забранените области от т. нар. диаграма на изпълнение на заданията, което е най-трудоемката част от алгоритъма, ако разбира се, диаграмата е вече построена. За намирането на югозападната обвивка сме предложили ефективен алгоритъм основан на морфологично затваряне с помощта на условни морфологични операции.

В трета глава математически се характеризира понятието "грапавост". По-точно, ако е дадено едно компютърно изображение на грапава повърхност, което ще наричаме текстурно, въз основа на въведените в настоящата работа характеристики може да се оцени грапавостта на изследваната повърхност и да бъдат открити дефекти върху нея. Текстурното изображение се моделира математически като фрактал. Фракталните множества се характеризират с факта, че тяхната топологична размерност и размерността им на Минковски - Булиганд (наричана още фрактална размерност) са различни. Тъй като фракталната размерност остава непроменена при линейни трансформации, то предложеният метод е нечувствителен към външни фактори, например към промяна на осветеността. Pentland е показал, че съществува корелация между грапавостта на наблюдаваната повърхност и фракталната размерност на съответното текстурно компютърно изображение. Настоящата работа показва, че методите на математическата морфология могат да се използват ефективно при пресмятането на фракталната размерност, като посредством това се правят верни изводи за грапавостта на фактурата на изследвания обект. Въведена е мярка за регулярност  $q(\cdot)$  на едно текстурно изображение и с нейна помощ е направен анализ на качеството на обработка на кожени повърхности и е създаден софтуер за инспекция на кожени повърхности, предназначени за производство на обувки. Системата е написана на езика parallel C и работи на паралелната платформа Sequent Symmetry S81 system в Университета в гр. Хъл – Великобритания [43].



В четвърта глава се разглежда въпросът за приближено построяване на скелети на множества. Както споменахме, скелетът е морфологична конструкция с многобройни приложения в анализа на форми и разпознаване на образи, роботиката и др, но построяването му е тежка задача. Затова, в настоящата работа се решава въпроса за приближено построяване на скелета както в случая на обекти, зададени посредством описание на областта която заемат (регионално описание), така и за обекти зададени чрез своя контур. При регионално зададени обекти широко се използва конструкцията “средна ос по отношение на някакъв структурен елемент” [22]. Единият доказан резултат е, че средната ос по отношение на затворен кръг може да се разглежда като едностранно Хаусдорфово приближение на скелета. Ако множеството има непразна вътрешност и контур, съставен от краен брой прости затворени криви, то приближението е двустранно.

Вторият основен резултат касае приближаването на скелета с помощта на върховете на диаграма на Вороной от гъста мрежа от точки върху контура на множеството. За дефинициите и основните свойства на графите на Вороной и Делоне вж. [41, 19, 9]. Там са описани различни алгоритми за тяхното построяване. За построяване на скелет на равнинен обект с помощта на триангулации на Делоне е удобно да се използват итерационни алгоритми. Такива са например постъпковия алгоритъм, описан в [19], или известния в теорията на невронните мрежи simulated annealing- алгоритъм (вж. [9]). Идеята е да се добавят точки върху контура докато се получи стабилна форма на скелета. С помощта на методите на нестандартния математически анализ е доказан по нов начин един от основните резултати в теорията на скелетите – приближаването на скелета на двумерно тяло с помощта на диаграми на Вороной за точки от контура му Той е доказан за пръв път от M.Schmitt в работата [50]. Там е използвана сходимост по отношение на топологията на Фел. Ладеното в дисертацията доказателство е по-кратко и са избягнати някои неточности.

Разгледаното в тази глава е първа стъпка в използването на нестандартния анализ при пренасяне на резултати от дискретната геометрия за изучаване на свойства на непрекъснати обекти. Нестандартния подход може да се окаже

полезен при решаване и на други задачи, например задачата за рентгеновите проекции за произволно изпъкнало тяло, използвайки известните вече резултати за многостени, което ще бъде обект на бъдещи разглеждания.

В пета глава се разглеждат морфологични операции върху размити множества и техните приложения при изследване на формата на неточно зададени обекти, по-специално се изследва проблема за определяне на мерки за приблизителна изпъкналост и се изучават основните им свойства. Именно, дефиниран е клас от функции наречени индикатори на изпъкналост, които формализират математически естествената човешка представа за изпъкналост, даващи ѝ количествено изражение.

Освен това се систематизират известните досега дефиниции на размити морфологични операции в светлината на изложения в първа глава формализъм на Нејјманс [24] и на понятието *индикатор на включване* [59].

Понятието *дърво на вдлъбнатост* въведено от Borgefors и Sanniti di Baја [10], дава просто йерархично описание на формата на изследвания обект, но не може да даде количествена оценка за изпъкналостта. Подходът на Held и Abe [25] е базиран на геометрически вероятности. Въз основа на него са получени мерки за приблизителна изпъкналост на равнинни фигури, зададени с техния контур. В настоящата работа се дефинират индикатори на изпъкналост, които могат да се прилагат както върху полутонови, така и върху черно-бели изображения, като обектите могат да бъдат както дискретни (пикселно зададени), така и фигури, зададени чрез своя контур. Това прави тези индикатори приложими щ в томографията и електронно - микроскопските изследвания при анализа на клетъчни и други биологични структури, включително при разпознаване на патологични туморни и други образования. Освен това те са лесни за компютърна реализация, и не са чувствителни на грешки от дискретизация на прави, както методите на Held и Abe.

За обосновка на адекватността на така дефинираните индикатори на изпъкналост е проведен психо- физически експеримент показващ че тези индикатори

(по-специално  $s_K(\cdot)$ ) дават резултати близки до средното човешко възприятие.

Като допълнителен резултат от изучаването на свойствата на размитите морфологични операции е разглеждането на диференцируеми размити функции, като са открити и преодоляни съществени неточности в работата на Puri и Ralescu [45]. Тези неточности се дължат на некоректно зададена метрика и последвало влагане на Rådström. Обект на по-нататъшни разглеждания е скелетизацията на размити множества и анализа на свързаността на размити множества използвайки размити морфологични операции.

## ГЛАВА 1

### Въведение в математическата морфология

Настоящата глава представя алгебричната основа на математическата морфология също както и някои необходими факти от теорията на изпъкналите множества и хаусдорфовата метрика. Показани са някои характерни примери за използване на морфологични операции.

Детайлно описание на основните свойства на морфологичните оператори читателят може да намери в работите на Matheron [36], Serra [53, 54], Heijmans и Ronse [23, 24].

Едно от основните свойства на Математическата морфология е това, че дефиниционната област на морфологичните оператори е пълна решетка, която ще означаваме с  $\mathcal{L}$ . Това означава, че в  $\mathcal{L}$  е зададена частична наредба  $\leq$  и всяко подмножество  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{L}$  притежава точна горна и точна долна граница, означавани съответно с  $\bigvee \mathcal{H}$  и  $\bigwedge \mathcal{H}$ . Идентитета върху  $\mathcal{L}$  ще означаваме с  $e$ . Минималния

и максималния елемент на  $\mathcal{L}$  ще означим съответно с  $O$  и  $I$ . Операторите, действащи върху  $\mathcal{L}$  също притежават наредба  $\varphi \leq \psi$ , означаваща  $\varphi(X) \leq \psi(X)$  за всяко  $X \in \mathcal{L}$ .

**Дефиниция** Операторът  $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  се нарича

- *монотонно растящ* ако винаги когато  $X \leq Y$  следва че  $\psi(X) \leq \psi(Y)$ ,
- *дилатация* ако  $\psi(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigvee_{i \in I} \psi(X_i)$
- *ерозия* ако  $\psi(\bigwedge_{i \in I} X_i) = \bigwedge_{i \in I} \psi(X_i)$ .

Ако  $\psi$  е дилатация, то  $\psi(O) = O$ , защото  $O$  не е горна граница на никоя съвкупност от елементи на решетката. Аналогично, ако  $\psi$  е ерозия, то  $\psi(I) = I$ , защото  $I$  не е долна граница на никоя съвкупност от елементи на решетката. Очевидно е, че дилатациите и ерозиите са монотонно растящи оператори.

**Дефиниция** Операторът  $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  се нарича *филтър* ако е монотонно растящ и идемпотентен, тоест  $\psi^2 = \psi$ .

Операторът  $\alpha : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  се нарича *отваряне* ако е филтър и  $\alpha(X) \leq X$  за всяко  $X \in \mathcal{L}$ .

Операторът  $\beta : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  се нарича *затваряне* ако е филтър и  $X \leq \beta(X)$  за всяко  $X \in \mathcal{L}$ . Както веднага се съобразява, всеки филтър  $\psi$  има непразно множество от неподвижни точки  $\text{Inv}(\psi)$ .

В сила е следното просто твърдение [24]:

**Твърдение 1.1** Ако операторът  $\alpha : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  е отваряне, то  $\alpha(X) = \bigvee\{Y \in \text{Inv}(\alpha) : Y \leq X\}$ .

Ако операторът  $\beta : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  е затваряне, то  $\beta(X) = \bigvee\{Y \in \text{Inv}(\beta) : X \leq Y\}$ .

Нека например  $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$ , където  $E$  е топологично пространство. Тук и по-нататък с  $\mathcal{P}(E)$  означаваме съвкупността от подмножествата на  $E$ . Да означим



с  $\text{int}(X)$  вътрешността на  $X$ , то операторът  $X \mapsto \text{int}(X)$  е отваряне и първата част на предната теорема е точно дефиницията на вътрешност.

Ако  $\text{cl}(X)$  е затворената обвивка на  $X$  по отношение на топологията в  $E$ , то операторът  $X \mapsto \text{cl}(X)$  е затваряне и втората част на предната теорема представлява точно дефиницията на затворена обвивка.

Ако  $E$  е линейно пространство, да означим с  $\text{co}(X)$  изпъкналата обвивка на  $X$ . Тогава операторът  $X \mapsto \text{co}(X)$  е затваряне и втората част на предната теорема представлява точно дефиницията на изпъкнала обвивка.

**Дефиниция** Казва се, че двойката  $(\varepsilon, \delta)$  е спрегната, ако за всеки два елемента  $X, Y \in \mathcal{L}$  е изпълнено

$$\delta(X) \leq Y \iff X \leq \varepsilon(Y).$$

Следващите твърдения са доказани в [23]:

**Теорема 1.2** Ако  $(\varepsilon, \delta)$  е спрегната двойка оператори над решетката  $\mathcal{L}$ , то  $\varepsilon$  е ерозия, а  $\delta$  е дилатация.

**Теорема 1.3** Ако  $\delta$  е дадена дилатация над решетката  $\mathcal{L}$ , то тя притежава единствена спрегната ерозия  $\varepsilon$  и обратно, ако  $\varepsilon$  е дадена ерозия над решетката  $\mathcal{L}$ , то тя притежава единствена спрегната дилатация  $\delta$ .

**Теорема 1.4** Ако  $(\varepsilon, \delta)$  е спрегната двойка, то  $\varepsilon \leq \varepsilon\delta$  и  $\delta\varepsilon \leq \varepsilon$ .

Лесно могат да се получат следствията (вж [23]):

**P1** Ако  $(\varepsilon, \delta)$  и  $(\varepsilon', \delta')$  са спрегнати двойки, то и  $(\varepsilon'\varepsilon, \delta\delta')$  е също спрегната двойка.

**P2** Ако  $(\varepsilon_i, \delta_i)$  са спрегнати двойки, то и  $(\bigwedge_i \varepsilon, \bigvee_i \delta)$  е също спрегната двойка.

**P3** Ако  $(\varepsilon, \delta)$  е спрегната двойка, то  $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$  и  $\delta\varepsilon\delta = \delta$ . \*

Последното от тези твърдения следва от веригите неравенства

$$\delta = \delta e \leq \delta(\varepsilon\delta) = (\delta\varepsilon)\delta \leq e\delta = \delta, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = e\varepsilon \leq (\varepsilon\delta)\varepsilon = \varepsilon(\delta\varepsilon) \leq \varepsilon e = \varepsilon. \quad (1.2)$$

и монотонността на дилатацията и ерозията.

От тези свойства непосредствено следва следната

**Теорема 1.5** *Операторът*

$$\varphi = \varepsilon\delta, \quad (1.3)$$

*притежава свойствата  $X \leq \varphi(X)$  и  $\varphi^2 = \varphi$ , тоест той е затваряне. Аналогично операторът*

$$\psi = \delta\varepsilon \quad (1.4)$$

*притежава свойствата  $\psi(X) \leq X$  и  $\psi^2 = \psi$ , тоест той е отваряне.*

Отварянето и затварянето се използват широко при филтрирането на сигнали [22]. По нататък под морфологични оператори над дадена решетка ще разбираме ерозиите, дилатациите, отварянията и затварянията.

Нека решетката  $\mathcal{L}$  е дистрибутивна, т.е. такава, за която

$$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z),$$

$$X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z),$$

и Булева, т.е. за всеки елемент  $X$  съществува елемент  $Y$  такъв че  $X \wedge Y = O$  и  $X \vee Y = I$ . Лесно се проверява, че  $Y$  е единствен. Действително, да допуснем, че съществува и елемент  $Z \neq Y$  с горните свойства. Тогава

$$Y = Y \wedge I = Y \wedge (Z \vee X) = (Y \wedge Z) \vee (Y \wedge X) = (Y \wedge Z) \vee O = Y \wedge Z,$$

тоест  $Y = Z$ .

Оттук нататък  $Y$  ще го наричаме допълнение на  $X$  и ще го бележим  $Y = X^c$ . В Булевите дистрибутивни решетки могат да се въведат *условни морфологични*

операции. Нека  $M \in \mathcal{L}$ . Разглеждаме подрешетката  $\mathcal{L}_M = \{X \in \mathcal{L} : X \leq M\}$  със същата наредба както изходната решетка  $\mathcal{L}$ . Нека  $(\varepsilon, \delta)$  е спрегната двойка оператори над  $\mathcal{L}$ . Въвеждаме рестрикции на  $\varepsilon$  и  $\delta$  върху  $\mathcal{L}_M$ , които ще наречем условни оператори:

$$\delta(X|M) = \delta(X) \wedge M, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon(X|M) = \varepsilon(X \vee M^c) \wedge M. \quad (1.6)$$

В [24] е доказано, че двойката оператори  $(\varepsilon(\cdot|M), \delta(\cdot|M))$  е спрегната. Условните оператори са от голяма полза за конкретните приложения, защото сцените които се подлагат на обработка с помощта на морфологични оператори представляват крайни масиви от данни.

**Забележка 1.6** Морфологични оператори могат да се дефинират и между две пълни решетки  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ . Тогава например двойката оператори  $(\varepsilon, \delta)$  се нарича спрегната, ако  $\varepsilon : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{L}$  и  $\delta : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$  и за всяко  $X \in \mathcal{L}$  и всяко  $Y \in \mathcal{M}$  е изпълнено

$$\delta(X) \leq Y \iff X \leq \varepsilon(Y).$$

По-нататък цялата теория на морфологичните оператори се изгражда по гореописания начин и в този случай без всякакви трудности [24].

Сега ще разгледаме някои основни примери на пълни решетки и конструкцията на морфологични оператори в тях.

Разглеждаме група от автоморфизми  $T$  на  $\mathcal{L}$ . Един оператор  $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$  се нарича  $T$ -инвариантен, или просто  $T$ -оператор, ако комутира с всеки елемент на  $T$ , т.е.  $\psi\tau = \tau\psi$  за всяко  $\tau \in T$ . Лесно се доказва, че ако единият оператор от спрегнатата двойка  $(\varepsilon, \delta)$  е  $T$ -инвариантен, то и другият също е такъв. Ако  $\tau \in T$ , то двойката  $(\tau^{-1}, \tau)$  е  $T$ -инвариантна спрегната двойка. Доказателства на тези прости твърдения могат да бъдат намерени в работите [23, 54, 24].

Едно подмножество  $I \subset \mathcal{L}$  се нарича супремум-генериращо, ако всеки елемент на  $\mathcal{L}$  може да се представи като точна горна граница на съвкупност от елементи

на  $l$ . По нататък в тази глава ще разглеждаме само решетки  $\mathcal{L}$ , притежаващи абелева група автоморфизми  $T$  и супремум-генериращо подмножество  $l$  със следните свойства:

- (i)  $T$  запазва  $l$ .
- (ii) За всеки два елемента  $x \in l$  и  $y \in l$  съществува  $\tau \in T$ , така че  $\tau(x) = y$ .

Във свойство (ii)  $\tau$  е единствено. Да допуснем, че съществуват два автоморфизма  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , такива че  $\tau_1(x) = \tau_2(x) = y$ . Тогава  $\tau_1^{-1}\tau_2(x) = x$ . Нека  $z$  е произволен елемент от  $l$ . Тогава съществува  $\tau_3 \in T$ , тъй че  $\tau_3(x) = z$ . Тогава

$$\tau_1^{-1}\tau_2(z) = (\tau_1^{-1}\tau_2)\tau_3(x) = \tau_3(\tau_1^{-1}\tau_2)(x) = \tau_3(x) = z,$$

т.е.  $\tau_1^{-1}\tau_2$  фиксира всеки елемент от  $l$ . Но тъй като  $l$  е супремум-генериращо множество и автоморфизмите комутират с операцията точна горна граница, то следва, че  $\tau_1^{-1}\tau_2 = e$ , с което единствеността е доказана.

Тук и по-нататък, пълна решетка притежаваща супремум генериращо семейство и абелева група автоморфизми с горните свойства ще наричаме  $T$ -решетка.

Следвайки [23], нека фиксираме елемент  $o \in l$ , който ще наричаме *начало*. Нека  $h \in l$  е произволен елемент. Със  $\tau_h$  означаваме единствения автоморфизъм от  $T$  довеждащ  $o$  в  $h$ . Нека  $A$  е произволен елемент на  $\mathcal{L}$ . Означаваме  $l(A) = \{a \in l : a \leq A\}$ . Тогава можем да дефинираме следните операции:

$$\delta_A = \bigvee_{a \in l(A)} \tau_a, \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_A = \bigwedge_{a \in l(A)} \tau_a^{-1}. \tag{1.8}$$

От твърдение **P2** и от факта, че  $(\tau_a^{-1}, \tau_a)$  е спрегната двойка следва, че  $(\varepsilon_A, \delta_A)$  е спрегната  $T$ -инвариантна двойка оператори. В работата [23] е доказано, че при така направените предположения за решетката  $\mathcal{L}$ , всяка  $T$ -инвариантна двойка има вида (1.7) - (1.8). По-нататък  $A$  ще наричаме *структурен елемент*. Освен това, при произволни  $A$  и  $B$  от  $\mathcal{L}$  имаме, че  $\delta_A(B) = \delta_B(A)$ .

## 1 Бинарни морфологични операции

Нека  $\mathcal{L}$  е съвкупността от всички подмножества на дадено линейно пространство  $M$  с релация на наредба  $A \subset B$ . Това линейно пространство може да бъде както над поле, така и над пръстена над целите числа  $\mathbf{Z}$ . Точна горна и точна долна граница се задават посредством операциите обединение и сечение, а именно

$$\bigvee \{H_i : i \in I\} = \bigcup_{i \in I} H_i,$$

$$\bigwedge \{H_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Супремум-генериращо подмножество може да се зададе чрез

$$I = \{\{x\} : x \in M\}.$$

Като група от автоморфизми  $T$  може да се разгледаме групата на транслациите [23]. Ще бележим  $X_a = \tau_a(X) = \{x + a : x \in X\}$ . За начало взимаме нулевия елемент на пространството  $M$ . Така описаната решетка е Булева дистрибутивна  $T$ -решетка. Всяка  $T$ -инвариантна дилатация в нея представлява сума на Минковски с някакво фиксирано множество  $A$ , (вж. [23]), а именно

$$\delta(X) = X \oplus A = \bigcup_{a \in A} X_a = \{x + a : x \in X, a \in A\}.$$

Съответната спрегната ерозия представлява разлика на Минковски със същото множество, т.е.

$$\varepsilon(X) = X \ominus A = \bigcap_{a \in A} X_{-a}.$$

$\mathcal{L}$  в случая представлява Булева решетка, т.е. всеки елемент  $A$  притежава допълнителен елемент  $A^c = \{x : x \in M, x \notin A\}$ . От законите на де Морган за обединението и сечението следва следната връзка между операциите на Минковски.

$$(X \ominus A)^c = X^c \oplus (-A),$$

където  $-A$  означава централно симетричния образ на  $A$ . Подробен обзор на свойствата на събирането и изваждането на Минковски е даден в работата [51].



Разгледаните в този пример оператори се наричат *бинарни морфологични оператори* [53].

Тук привеждаме без доказателство някои от най-използуваните алгебрични свойства, вж. [53]:

$$(A \ominus B) \ominus B' = A \ominus (B \oplus B'), \quad (1.9)$$

$$(A \oplus B) \oplus B' = A \oplus (B \oplus B'), \quad (1.10)$$

$$(A \ominus B) \oplus B' \subset (A \oplus B') \ominus B, \quad (1.11)$$

$$A \oplus (B \cup B') = (A \oplus B) \cup (A \oplus B'), \quad (1.12)$$

$$A \ominus (B \cup B') = (A \ominus B) \cap (A \ominus B'), \quad (1.13)$$

$$(X \cap Z) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Z \ominus B), \quad (1.14)$$

$$A \oplus (B \cap B') \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus B'), \quad (1.15)$$

$$A \ominus (B \cap B') \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus B'), \quad (1.16)$$

$$(X \cup Z) \ominus B \supset (X \ominus B) \cup (Z \ominus B). \quad (1.17)$$

По-нататък ще използваме следните две прости твърдения

**Теорема 1.7** Ако  $A, B$  и  $C$  са множества от пространството  $M$ , то  $(A \oplus B) \cap C \neq \emptyset$  е изпълнено тогава и само тогава, когато  $A \cap (C \oplus (-B)) \neq \emptyset$ .

*Доказателство.* Ако  $(A \oplus B) \cap C \neq \emptyset$ , то съществуват точки  $a \in A, b \in B$  и  $c \in C$  такива, че  $c = a + b$ , т.е.  $a = c + (-b)$ , което означава, че  $A \cap (C \oplus (-B)) \neq \emptyset$ . Обратното твърдение се доказва аналогично.  $\square$

**Теорема 1.8**  $A \oplus B = \{x : (-B)_x \cap A \neq \emptyset\}$ .

За доказателството вж. [24] или [53].

Въз основа на (1.4) и (1.5) дефинираме следните операции отваряне  $X \circ A$  и затваряне  $A \bullet A$  чрез структурния елемент  $A$ :

$$X \circ A = (X \ominus A) \oplus A, \quad (1.18)$$

$$X \bullet A = (X \oplus A) \ominus A. \quad (1.19)$$

Операциите отваряне и затваряне имат следната геометрична интерпретация [24]:

$$X \circ A = \bigcup \{A_h : h \in M \text{ и } A_h \subset X\}, \quad (1.20)$$

$$X \bullet A = \{k \in M : h \in A_k \Rightarrow (-A)_h \cap X \neq \emptyset\}. \quad (1.21)$$

Също така  $(X \circ A)^c = X^c \bullet (-A)$  и  $(X \bullet A)^c = X^c \circ (-A)$ .

В [24] е показано, че операциите  $X \circ A$  и  $X \bullet A$  не са монотонни по отношение на  $A$ . Налице е обаче следната

**Теорема 1.9** *Нека  $A$  и  $B$  са множества от  $M$ , за които съществува множество  $Y$  тѝ, че  $A = B \oplus Y$ . Тогава за всяко  $X \subset M$  е изпълнено*

$$X \circ A \subset X \circ B,$$

$$X \bullet A \supset X \bullet B,$$

$$(X \circ A) \circ B = (X \circ B) \circ A = X \circ A,$$

$$(X \bullet A) \bullet B = (X \bullet B) \bullet A = X \bullet A.$$

За доказателството вж. Твърдения 4.21 и 4.22 от [24].

## 2 Полутонови морфологични операции

Нека  $\mathcal{L} = \text{Fun}(M)$  е съвкупността от всички функции с дефиниционна област линейното пространство  $M$  и стойности в  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ , като

$$\left(\bigvee_{i \in I} f_i\right)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x),$$

$$\left(\bigwedge_{i \in I} f_i\right)(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$$

за всяко  $x \in M$ . За всяко  $x \in M$  и всяко  $t \in \mathbf{R}$  дефинираме функциите

$$f_{x,t}(y) = \begin{cases} t & y = x \\ -\infty & y \neq x \end{cases}$$

По този начин дефинираме супремум-генериращо семейство  $l = \{f_{x,t} : x \in M, t \in \mathbf{R}\}$ . За всяко  $h \in M$  и всяко  $v \in \mathfrak{R}$  задаваме автоморфизма  $\tau_{h,v}$  чрез

$$(\tau_{h,v}(f))(x) = f(x-h) + v \quad (1.22)$$

и  $T = \{\tau_{h,v} : h \in M, v \in \mathbf{R}\}$ .  $T$  действа транзитивно върху  $\mathcal{L}$ , защото

$$\tau_{h,v}(f_{x,t}) = f_{x+h,t+v}.$$

Въвеждаме аналози на операциите на Минковски в  $\mathcal{L}$

$$(f \oplus g)(x) = \sup_{x \in M} (f(x-h) + g(h)), \quad (1.23)$$

$$(f \ominus g)(x) = \inf_{x \in M} (f(x+h) - g(h)), \quad (1.24)$$

при допълнителни предположения, че  $s + t = -\infty$  ако  $s = -\infty$  или  $t = -\infty$ , и  $s - t = \infty$  ако  $s = \infty$  или  $t = -\infty$ . Тогава всяка  $T$ -дилатация има вида (1.23), а всяка  $T$ -ерозия има вида (1.24). Разгледаните в този пример оператори се наричат *полутонови морфологични оператори* [53] и се използват при обработката на полутонови изображения.

Следвайки [24] ще покажем, че съществува проста геометрична връзка между така дефинираните бинарни и полутонови морфологични операции. И така, нека разгледаме множество  $U \subset M \times \bar{\mathbf{R}}$  със свойството: точката  $(x, t) \in U$  тогава и само тогава, когато за всяко  $s < t$  е изпълнено  $(x, s) \in U$ . Такова множество ще наречем *затворено отгоре*.

Ако е дадена функцията  $f(x)$ , дефинирана в линейното пространство  $M$ , то нейната подграфика

$$\Gamma(f) = \{(x, t) \in M \times \bar{\mathbf{R}} : t \leq f(x)\}$$

е затворено отгоре множество. Обратно, ако е дадено едно затворено отгоре множество  $U$ , то можем да му съпоставим функцията

$$f_U(x) = \sup\{t \in \mathbf{R} : (x, t) \in U\},$$

чиято подграфика  $\Gamma(f_U)$  е точно множеството  $U$ .

*Горна обвивка* на множеството  $A \subset M \times \bar{\mathbf{R}}$  ще наричаме минималното затворено отгоре, съдържащо  $A$  и ще я бележим  $\Upsilon(A)$ , т.е. сечението на всички затворени отгоре множества, съдържащи  $A$ . Очевидно е, че операцията  $\Upsilon()$  представлява затваряне.

В [24] и [22] затворено отгоре множество се нарича *umbra*. В [24] се разглежда и класа множества, наречени *pre-umbra*. Ние ще ги наречем *полузатворени отгоре*. Това са множества  $H$  за които ако точката  $(x, t) \in H$ , то за всяко  $s < t$  е изпълнено  $(x, s) \in H$ . Очевидно е, че сумата на две затворени отгоре множества е полузатворено отгоре. Също така, ако  $H$  е полузатворено, то  $\text{cl}(\Upsilon(H)) = \text{cl}(H)$ . Последното следва от факта, че  $H$  се състои от затворени и незатворени лъчи и следователно  $\Upsilon(H)$  се състои от затворени лъчи. Равенството следва елементарно от факта че редиците от реални числа  $\{x_n\}$  и  $\{x_n - \frac{1}{n}\}$  са едновременно сходящи или разходящи и имат една и съща граница. Освен това, ако  $M$  е топологично пространство и  $A$  е затворено в  $M \times \bar{\mathbf{R}}$ , то и  $\Upsilon(A)$  е затворено в  $M \times \bar{\mathbf{R}}$ .

В [24] е доказана следната теорема:

**Теорема 1.10** *В сила са следните равенства:*

$$\Gamma(f \oplus g) = \Upsilon(\Gamma(f) \oplus \Gamma(g)),$$

$$\Gamma(f \ominus g) = \Gamma(f) \ominus \Gamma(g).$$

Нека сега  $M = \mathbf{R}^n$ . Да разгледаме за илюстрация т.нар. *допълнена графика на функцията*  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \bar{\mathbf{R}}$  която ще бележим с  $\Phi(f)$  – тя се дефинира като интервалнозначна функция  $(\Phi(f))(x) = [(I(f))(x), (S(f))(x)]$ , където  $(I(f))(x)$  и  $(S(f))(x)$  са съответно долната и горната функция на Бер за функцията  $f$  [7]:

$$(I(f))(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \inf \{f(t) : t \in B_\delta(x) \cap \text{dom}(f)\} = \lim_{t \rightarrow x} \inf f(t),$$
$$(S(f))(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \sup \{f(t) : t \in B_\delta(x) \cap \text{dom}(f)\} = \lim_{t \rightarrow x} \sup f(t)$$

Тук с  $\text{dom}(f)$  означаваме дефиниционната област на функцията  $f$ , тоест  $\text{dom}(f) = \{x : \infty > f(x) > -\infty\}$ .

**Дефиниция** Една функция  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  се нарича *полу непрекъсната отгоре*, (*u.s.c.*) в точката  $x$ , ако за всяко  $t \in \mathbb{R}$ , такова че  $t > f(x)$  съществува околност  $B_r(x)$  за която  $t > f(y)$  за всяко  $y \in B_r(x)$ .

Допълнената графика може да се разглежда като затворено множество в  $\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}$ .

**Лема 1.11** Ако  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ , то  $\text{cl}(\Gamma(f)) = \Upsilon(\Phi(f))$ .

*Доказателство.* Нека  $y \in \Upsilon(\Phi(f))$ . Без ограничение на общността можем да смятаме, че  $y = (S(f))(x)$  за някое  $x$ . Ще покажем, че  $(x, y) \in \text{cl}(\Gamma(f))$ .

Разглеждаме редица затворени кълба  $B_{\delta_i}(x)$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$ . Дефинираме числата  $S_i = \sup\{f(t) : t \in B_{\delta_i}(x) \cap \text{dom}(f)\}$ . Тогава съществуват точки  $x_i \in B_{\delta_i}(x) \cap \text{dom}(f)$  такива че  $S_i \geq f(x_i) \geq S_i - \frac{1}{n}$ . Следователно  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = (S(f))(x) = y$ . Тъй като точките  $(x_i, f(x_i))$  са от  $\Gamma(f)$ , то  $(x, y) \in \text{cl}(\Gamma(f))$  и следователно  $\Upsilon(\Phi(f)) \subset \text{cl}(\Gamma(f))$ .

Обратно, нека  $(x, y) \in \Gamma(f)$ . Нека считаме, че  $y = f(x)$ . Тогава  $(I(f))(x) \leq f(x) \leq (S(f))(x)$ , тоест  $\Gamma(f) \subset \Upsilon(\Phi(f))$ . От полунепрекъснатостта отгоре на горната функция на Бер [7], следва че  $\Upsilon(\Phi(f))$  е затворено. Следователно  $\text{cl}(\Upsilon(\Gamma(f))) \subset \Upsilon(\Phi(f))$ , което доказва лемата.  $\square$

**Следствие 1.12**  $\Gamma(S(f)) = \text{cl}(\Gamma(f)) = \Upsilon(\Phi(f))$ .



### 3 Морфологични операции върху изпъкнали множества

Нека  $\mathcal{L}$  е съвкупността от всички изпъкнали множества от  $\mathbf{R}^n$  с релация на наредба  $A \subset B$ . Точна горна и точна долна граница се задават като:

$$\bigvee \{H_i : i \in I\} = \text{co} \left( \bigcup_{i \in I} H_i \right),$$

$$\bigwedge \{H_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Супремум-генериращо подмножество може да се зададе чрез

$$l = \{\{x\} : x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Като група от автоморфизми  $T$  ще разгледаме групата на трансляциите. и в пример 1. Разглеждаме сумата и разликата на Минковски, дефинирани в пример 1:

$$X \oplus A = \{x + a : x \in X, a \in A\}, \quad (1.25)$$

$$X \ominus A = \bigcap_{a \in A} X_{-a}. \quad (1.26)$$

Очевидно е, че сечението на изпъкнали множества е изпъкнало. С помощта на теоремата на Каратеодори [51] лесно се доказва, че

$$\text{co}(X \oplus Y) = \text{co}(X) \oplus \text{co}(Y)$$

за произволни множества  $X$  и  $Y$  на дадено крайномерно линейно пространство  $M$ . Оттук следва, че сумата на Минковски на две изпъкнали множества е изпъкнало. Следователно, и в този случай всяка  $T$ -инвариантна дилатация представлява сума на Минковски с подходящ структурен елемент, както и всяка  $T$ -ерозия е разлика на Минковски с подходящ структурен елемент:

$$\delta(X) = X \oplus A = \text{co} \left( \bigcup_{a \in A} X_a \right), \quad (1.27)$$

$$\varepsilon(X) = X \ominus A = \{y : A_y \subset X\}. \quad (1.28)$$

Лесно се проверява, че сумата на затворено и компактно множество е затворено, следователно сумата на две компактни множества също е компактно.

**Забележка 1.13** Ако разглеждаме решетката от всички изпъкнали затворени множества от  $\mathbb{R}^n$  с релация на наредба  $A \subset B$ , тогава точната горна граница се задава като:

$$\bigvee \{H_i : i \in I\} = \text{cl} \left( \text{co} \left( \bigcup_{i \in I} H_i \right) \right).$$

И в този случай всяка  $T$ -инвариантна дилатация представлява сума на Минковски с подходящ структурен елемент, както и всяка  $T$ -ерозия е разлика на Минковски с подходящ структурен елемент. Тази решетка е  $T$ -решетка, но не е дистрибутивна.

Нека  $P$  и  $Q$  са две изпъкнали компактни множества в  $\mathbb{R}^n$ . От свойствата на операцията затваряне знаем, че

$$P \bullet Q \supset (P \oplus Q) \ominus Q \supset P. \quad (1.29)$$

В работата [36], чрез използване на свойствата на опорните хиперравнини на изпъкналите множества е доказано и обратното включване –

$$(P \oplus Q) \ominus Q \subset P. \quad (1.30)$$

От двете включвания следва равенството

$$(P \oplus Q) \ominus Q = P. \quad (1.31)$$

Оттук следва, от равенството  $P \oplus Q = R \oplus Q$  следва  $P = R$ , защото

$$P = (P \oplus Q) \ominus Q = (R \oplus Q) \ominus Q = R.$$

Може да се докаже и следното по-общо твърдение (вж. [24]):

Нека  $P$  е затворено, а  $Q$  е произволно ограничено множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогава  $(P \oplus Q) \ominus Q \subset \text{co}(P)$ .

В сила е и следната теорема за декомпозиция [24, 51]

**Теорема 1.14** *Едно подмножество  $X$  на линейно пространство е изпъкнало тогава и само тогава, когато  $\lambda X \oplus \mu X = (\lambda + \mu)X$ , за всеки две реални неотрицателни числа  $\lambda$  и  $\mu$ .*

По-нататък ще използваме следната проста

**Теорема 1.15** *Едно компактно множество  $X$  от  $\mathbb{R}^n$  е изпъкнало тогава и само тогава, когато за някоя фиксирана двойка положителни числа  $\lambda$  и  $\xi$  е изпълнено  $(\lambda + \xi)X = \lambda X \oplus \xi X$ .*

*Доказателство.* Поради важността на това твърдение за разглежданията в глава 5 привеждаме доказателството му. Необходимостта следва от предната теорема. Ще докажем достатъчността. Без ограничение на общността можем да приемем, че  $\lambda + \xi = 1$ .

Да изберем произволно две точки  $p$  и  $q$  от множеството  $X$ . Трябва да покажем, че произволна точка  $s$  от отсечката  $[p, q]$  също принадлежи на  $X$ .

Разглеждаме вложената редица от отсечки  $[p_i, q_i] \subset [p_{i-1}, q_{i-1}]$  и редицата от точки  $z_i = \lambda p_i + \xi q_i$  дефинирани итеративно:

- $p_0 = p$  и  $q_0 = q$ .
- $[p_i, q_i]$  е тази от отсечките  $[p_{i-1}, z_{i-1}]$  или  $[z_{i-1}, q_{i-1}]$  съдържаща точката  $s$ . Тъй като  $X = \lambda X \oplus \xi X$ , очевидно  $z_i$  принадлежи на  $X$ .

Точката  $s$  принадлежи на всичките отсечки  $[p_i, q_i]$ . Редицата от дължините на  $[p_i, q_i]$  клони към 0, и следователно  $s$  е граница на редицата  $z_i$ .

Тъй като  $X$  е компактно и съдържа границата на всяка своя редица от точки, следва, че  $s$  принадлежи на  $X$ , с което теоремата е доказана.  $\square$

**Забележка 1.16** В пета глава ще използваме частния случай на горната теорема, когато  $\lambda = \xi = 1/2$ , тъй като тогава двата операнда в сумата на Минковски съвпадат и е най-лесно използването ѝ от практическа гледна точка.

## Разстояния между компактни множества от $\mathbf{R}^n$ и тяхното изчисляване

Нека  $x \in \mathbf{R}^n$  е произволна точка, а  $P$  е произволно компактно множество от  $\mathbf{R}^n$ . Разстояние между  $x$  и  $P$  се дефинира:

$$d(x, P) = \min_{p \in P} d(x, p),$$

където  $d(x, p)$  означава Евклидовото разстояние между точките  $p$  и  $x$ . Лесно се проверява, че функцията  $\rho(x) = d(x, P)$  е непрекъсната и даже Липшицова [55]. Евклидово разстояние между две компактни множества  $P$  и  $Q$  се дефинира като

$$d(P, Q) = \min_{x \in P} d(x, Q) = d(0, P \oplus (-Q)).$$

Ако  $P$  и  $Q$  са изпъкнали, за ефективно изчисляване на  $d(P, Q)$  може да се използва алгоритъма на Gilbert [20, 21]. Идеята на алгоритъм е сходна с тази на симплекс - метода и съществено използва свойствата на опорните функции на изпъкналите множества. В случая на многостени пресмята разстоянието за краен брой стъпки. Ако едно от множествата не е многостен, алгоритъмът пресмята разстоянието с точност от порядък  $1/k$ , където  $k$  е номерът на последната стъпка на алгоритъма. Модификация на алгоритъма, работеща и за широк клас от неизпъкнали множества е реализирана от автора на настоящата работа като програмен на системата KNOCKOUT, използвана като учебен софтуер във ФМИ за нуждите на обучението по компютърна графика.

За определянето обаче на близостта на формата на обектите Евклидовото разстояние не е приложимо. Затова се въвежда разстояние оценяващо приликата между формата на обектите [26].

Нека  $P$  и  $Q$  са две непразни компактни множества в  $\mathbf{R}^n$ . Въвеждаме функция

$$d_h(P, Q) = \inf\{\varepsilon : Q \subset P \oplus B_\varepsilon(0), P \subset Q \oplus B_\varepsilon(0)\}. \quad (1.32)$$

Тук и по-нататък с  $B_r(y)$  ще бележим затвореното кълбо с център точката  $y$  и радиус  $r$ .

Тази функция притежава следните свойства:

1.  $d_h(P, P) = 0$ ,  $d_h(P, Q) > 0$  за  $P \neq Q$

2.  $d_h(P, Q) = d_h(Q, P)$ ,
3.  $d_h(P, Q) + d_h(Q, R) \geq d_h(P, R)$ ,

което показва, че тази функция задава метрика. Първите две свойства са очевидни, докато неравенството на триъгълника лесно се доказва с помощта на теорема 1.14. Така въведеното разстояние е точно хаусдорфовото разстояние [53], и чрез него множеството от непразните компактни множества от  $\mathbf{R}^n$  се превръща в пълно метрично пространство [51].

Пресмятането на хаусдорфовото разстояние е тежка от изчислителна гледна точка задача дори и в случая на изпъкнали многостени. Ефективен алгоритъм за пресмятането му в случая на дискретни множества е даден в работата [26].

### 3.1 Морфологични операции и хаусдорфови приближения на функции

Както е отбелязано в [7], в много апроксимационни задачи е удобно да се работи с така нареченото хаусдорфово разстояние между функции, което представлява хаусдорфовото разстояние между техните допълнени графики. Ползата от въвеждането на това разстояние е главно в това, че се оценява близостта на формата на графиките на двете функции. Разглеждаме само функции с ограничена дефиниционна област за които допълнената графика е компактна.

И така в [7] се дефинира разстоянието

$$d(f, g) = d_h(\Phi(f), \Phi(g)).$$

Ще установим представяне на това разстояние въз основа на полутонови морфологични операции, което позволява неговото по-просто пресмятане използвайки стойностите само на горната функция на Бер.

Нека  $x \in \mathbf{R}^n$ . За всяко  $\varepsilon > 0$  дефинираме функцията  $b_\varepsilon(x) = \max\{y : (x, y) \in B_\varepsilon^{n+1}(x)\}$  с дефиниционна област кълбото  $B_\varepsilon^n(0)$ .



**Теорема 1.17**  $d(f, g) = \sup\{\varepsilon : S(f) \leq S(g) \oplus b_\varepsilon, S(g) \leq S(f) \oplus b_\varepsilon\}$ .

*Доказателство.* От теорема 1.10 следва  $\Gamma(S(f)) \oplus b_\varepsilon = \Upsilon(\Gamma(S(f)) \oplus \Gamma(b_\varepsilon))$  От теорема 1.8 и елементарни геометрични съображения следва, че  $\Gamma(S(f)) \oplus \Gamma(b_\varepsilon) = \Gamma(S(f)) \oplus B_\varepsilon^{n+1}(0)$ . Тъй като  $\Gamma(S(f))$  е затворено (вж. лема 1.11), а  $\oplus B_\varepsilon^{n+1}(0)$  е компактно, следва че сумата им по Минковски е топологически затворено множество. От друга страна сумата на две затворени отгоре множества е полузатворено отгоре, а пък както може елементарно да се съобрази, ако едно множество е полузатворено отгоре и топологически затворено, то е затворено отгоре. Следователно  $\Gamma(S(f) \oplus b_\varepsilon) = \Gamma(S(f)) \oplus B_\varepsilon(0)$  От друга страна за две функции  $u$  и  $v$  е изпълнено  $u \leq v$  точно когато  $\Gamma(u) \subset \Gamma(v)$ . Също така от следствието на лема 1.11,  $\Gamma(S(f)) = \Upsilon(\Phi(f))$ . Така че неравенството  $S(g) \leq S(f) \oplus b_\varepsilon$  е еквивалентно на включването  $\Upsilon(\Phi(g)) \subset \Upsilon(\Phi(f)) \oplus B_\varepsilon(0)$  което очевидно е изпълнено точно когато  $\Phi(g) \subset \Upsilon(\Phi(f)) \oplus B_\varepsilon(0)$ . Тогава от дефиницията за хаусдорфово разстояние между непразни компакти (1.32) непосредствено следва верността на теоремата.  $\square$

Доказаното дава възможност за лесно от изчислителна гледна точка алгоритмизирано пресмятане на това разстояние в случая на дискретни сигнали.

#### 4 Морфологични операции върху интервали

Като частен случай на изпъкнали множества ще разгледаме затворените интервали от реалната права. Целта ще бъде да представим известните операции от интервалната аритметика [29] с помощта на морфологични операции, което би могло да даде тласък на обобщаването на тези операции и върху други обекти използвани в приближените изчисления като размити множества, груби множества и др. Следвайки работата [29] въвеждаме следните означения: Крайните затворени интервали ще бележим с главни латински букви, а лявата и дясната граница - с едноименната малка буква съответно с горен индекс минус и плюс, например  $A = [a^-, a^+]$ .  $\omega(A)$  означава дължината на интервала  $A$ , тоест  $\omega(A) = a^+ - a^-$ . Ако  $a^+ < a^-$  ще считаме, че  $A = \emptyset$ . Със  $\mathcal{Z}$  ще означим съв-

купността от затворените интервали съдържащи нулата. Ако  $A \notin \mathcal{Z}$  въвеждаме означението:

$$\sigma(A) = \begin{cases} +, & \text{ако } 0 < a^-; \\ -, & \text{ако } a^+ < 0. \end{cases}$$

В този пример въвеждаме още и означението  $a^s$ , където  $s \in \{+, -\}$ , което означава съответния ляв или десен край на интервала  $A$  – левия, ако  $s = -$ , и десния, ако  $s = +$ . Можем да въведем “произведение”  $st$  на символите  $s, t \in \{+, -\}$  чрез символичните равенства  $++ = -- = +$ ,  $+ - = - + = -$ , т.е.  $a^{++} = a^{--} = a^+$  и  $a^{+-} = a^{-+} = a^-$ .

В работата [29] са въведени следните операции:

$$A + B = [a^- + b^-, a^+ + b^+] \quad (1.33)$$

$$A +^- B = [a^{-s} + b^s, a^s + b^{-s}], \quad (1.34)$$

където

$$s = \begin{cases} +, & \omega(A) \geq \omega(B) \\ -, & \omega(A) < \omega(B) \end{cases}$$

Те се наричат съответно *външно събиране* и *вътрешно събиране* [29].

Очевидно е, че първата операция е точно сумата на Минковски на двата интервала. Да допуснем сега, че  $\omega(A) \geq \omega(B)$ . Тогава  $A +^- B = [a^- + b^+, a^+ + b^-] = \{h \in \mathbf{R} : a^- + b^+ \leq h \leq a^+ + b^-\}$ . Тогава

$$A +^- B = \{h \in \mathbf{R} : a^- \leq h - b^+ \wedge a^+ \geq h - b^-\},$$

което може да се напише още  $A +^- B = \{h \in \mathbf{R} : (-B) + h \in A\}$ . Ако пък  $\omega(A) < \omega(B)$  с аналогични разсъждения ще получим  $A +^- B = \{h \in \mathbf{R} : (-A) + h \in B\}$ .

Обединявайки двата случая получаваме

$$A +^- B = A \ominus (-B) \cup B \ominus (-A) \quad (1.35)$$

Сега че разгледаме мултипликативните интервални операции, описани в [29]. Разглеждаме множеството  $\mathcal{L}$  от всички затворени интервали на реалната права

- ограничени и неограничени. Като релация на наредба можем да вземем отново обичайното теоретико - множествено включване. Точна горна и точна долна граница на система интервали дефинираме като:

$$\bigvee \{H_i : i \in I\} = \text{cl}(\text{co}(\bigcup_{i \in I} H_i)),$$

$$\bigwedge \{H_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Супремум-генериращо подмножество може да се зададе чрез

$$I = \{\{x\} : x \in \mathbf{R}, x \neq 0\},$$

съответно  $l(A) = \{x : x \in A, x \neq 0\}$ . Група от автоморфизми въвеждаме по следния начин:

$$T = \{\tau_h : h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \tau_h(x) = xh\}.$$

Тази група действува транзитивно върху супремум генериращото семейство и  $\tau_h(A) = [\min(a^-h, a^+h), \max(a^-h, a^+h)]$ . Дилатация и ерозия чрез структурния елемент  $A$  можем да конструираме съгласно равенства (1.7 - 1.8):

$$\delta_A(B) = \bigvee_{a \in l(A)} \tau_a(B), \quad (1.36)$$

$$\varepsilon_A(B) = \bigwedge_{a \in l(A)} \tau_{1/a}(B). \quad (1.37)$$

Сега ще разгледаме мултипликативните интервални операции *външно умножение* и *вътрешно умножение*, описани в [29].

Външно произведение на два ограничени затворени интервала се въвежда според [29] като

$$A \times B = \begin{cases} [a^{-\sigma(B)}b^{-\sigma(A)}, a^{\sigma(B)}b^{\sigma(A)}], & \text{за } A, B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, \\ [a^{\sigma(A)}b^{-\sigma(A)}, a^{\sigma(A)}b^{\sigma(A)}], & \text{за } A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, B \in \mathcal{Z}, \\ [a^{-\sigma(B)}b^{\sigma(B)}, a^{\sigma(B)}b^{\sigma(B)}], & \text{за } B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, A \in \mathcal{Z}, \\ [\min(a^-b^+, a^+b^-), \max(a^-b^-, a^+b^+)], & \text{за } A, B \in \mathcal{Z}, \end{cases}$$

**Теорема 1.18** *За въведената по-горе дилатация и външното умножение имаме  $\delta_B(A) = \delta_A(B) = A \times B$ .*

*Доказателство.* Твърдението се доказва изследвайки всички възможни положения на нулата по отношение на краищата на интервалите  $A$  и  $B$ . Да разгледаме първо случая когато  $A, B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}$ , и  $\sigma(A) = \sigma(B) = +$  (случая  $\sigma(A) = \sigma(B) = -$  се разглежда аналогично). Да дефинираме множеството  $C = \{x \in \mathcal{R} | x = ab, a \in A, b \in B\}$ . Тогава е очевидно, че

$$\delta_B(A) = [\inf_{h \in B} a^- h, \sup_{h \in B} a^+ h] = [a^- b^-, a^+ b^+]$$

което доказва твърдението. Нека сега, например  $\sigma(A) = +, \sigma(B) = -$ . Тогава за всяко  $h \in B$  следва, че  $a^- h \geq a^+ h$ , и следователно

$$\delta_B(A) = [\inf_{h \in B} a^+ h, \sup_{h \in B} a^- h] = [a^+ b^-, a^- b^+]$$

което доказва твърдението. Случаят  $\sigma(A) = -, \sigma(B) = +$  се третира аналогично.

Нека разгледаме сега случая  $A \in \mathcal{Z}$  и  $B \in \mathcal{Z}$ . Тогава  $a^- \leq 0, a^+ \geq 0, b^- \leq 0, b^+ \geq 0$  и следователно

$$\delta_B(A) = \text{co} \left( \text{cl} \left( \left( \bigcup_{h \in I(B), h > 0} [a^- h, a^+ h] \right) \cup \left( \bigcup_{h \in I(B), h < 0} [a^+ h, a^- h] \right) \right) \right).$$

Съобразява се лесно, че

$$\delta_B(A) = [\min(a^- b^+, a^+ b^-), \max(a^- b^-, a^+ b^+)],$$

което доказва твърдението.

Остава да разгледаме случая  $\sigma(A) = +$  и  $B \in \mathcal{Z}$ . Тогава  $0 \leq a^- \leq a^+, b^- \leq 0 \leq b^+$  и

$$\begin{aligned} \delta_B(A) &= \text{co} \left( \text{cl} \left( \left( \bigcup_{h \in I(B), h > 0} [a^- h, a^+ h] \right) \cup \left( \bigcup_{h \in I(B), h < 0} [a^+ h, a^- h] \right) \right) \right) \\ &= \text{co} ([a^- b^+, a^+ b^+] \cup [a^+ b^-, a^- b^-]) = [a^+ b^-, a^+ b^+]. \end{aligned}$$

Останалите две възможности  $\sigma(A) = -$  и  $B \in \mathcal{Z}$  и  $B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, A \in \mathcal{Z}$  се третират аналогично. Поради симетрията в получените изрази следва, че  $\delta_A(B) = \delta_B(A)$ ,

което следва и от общата теория на морфологичните операции върху Т-решетки. С това теоремата е доказана.

□

Нека  $\{B_i | i \in I\}$  е множество от затворените интервали върху реалната права. Тогава

$$\delta_{(\bigvee_i B_i)}(A) = \delta_A(\bigvee_i B_i) = \bigvee_i \delta_A(B_i) = \bigvee_i \delta_{B_i}(A).$$

Тъй като спрегнатата ерозия на  $\delta_{(\bigvee_i B_i)}$  е  $\varepsilon_{(\bigvee_i B_i)}$  и спрегнатата ерозия на  $\delta_{B_i}$  е  $\varepsilon_{B_i}$ , то

$$\varepsilon_{(\bigvee_i B_i)}(A) = \bigwedge_i \varepsilon_{B_i}(A).$$

**Теорема 1.19** Ако  $B$  е интервал за който  $b^+b^- \neq 0$ , то

$$\varepsilon_B(A) = \begin{cases} \left[ \frac{a^{-\sigma(B)}}{b^{-\sigma(A)}}, \frac{a^{\sigma(B)}}{b^{\sigma(A)}} \right], & \text{за } A, B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, \\ \left[ \frac{a^{-\sigma(B)}}{b^{\sigma(B)}}, \frac{a^{\sigma(B)}}{b^{\sigma(B)}} \right], & \text{за } B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, A \in \mathcal{Z} \\ \emptyset, & \text{за } A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, B \in \mathcal{Z}, \\ \left[ \max\left(\frac{a^+}{b^-}, \frac{a^-}{b^+}\right), \min\left(\frac{a^+}{b^+}, \frac{a^-}{b^-}\right) \right], & \text{за } A, B \in \mathcal{Z}. \end{cases}$$

*Доказателство.* В решетката  $\mathcal{L}$  имаме  $B = [b^-, b^-] \vee [b^+, b^+]$ . Следователно

$$\varepsilon_B(A) = \varepsilon_{([b^-, b^-])}(A) \vee \varepsilon_{([b^+, b^+])}(A) = \tau_{1/b^-}(A) \vee \tau_{1/b^+}(A).$$

Да означим с  $C = \tau_{1/b^-}(A)$  и  $D = \tau_{1/b^+}(A)$ . Тогава  $C = \left[ \frac{a^{-\sigma(B)}}{b^-}, \frac{a^{-\sigma(B)}}{b^-} \right]$  и  $D = \left[ \frac{a^{-\sigma(B)}}{b^+}, \frac{a^{-\sigma(B)}}{b^+} \right]$ . Тогава  $\varepsilon_B(A) = [\max(c^-, d^-), \min(c^+, d^+)]$ , и разглеждайки всички възможни положения на нулата по отношение на интервала  $A$  довършваме доказателството. □

Да разгледаме вътрешното умножение на интервали “ $\times^-$ ” [29], дефинирано



чрез равенствата

$$A \times^- B = \begin{cases} [a^{\sigma(B)\epsilon} b^{-\sigma(A)\epsilon}, a^{-\sigma(B)\epsilon} b^{\sigma(A)\epsilon}], & \epsilon = \psi(A, B), A, B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, \\ [a^{-\sigma(A)} b^{-\sigma(A)}, a^{-\sigma(A)} b^{\sigma(A)}], & A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, B \in \mathcal{Z} \\ [a^{-\sigma(B)} b^{-\sigma(B)}, a^{\sigma(B)} b^{-\sigma(B)}], & A \in \mathcal{Z}, B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}, \\ [\max(a^- b^+, a^+ b^-), \min(a^- b^-, a^+ b^+)], & A, B \in \mathcal{Z}. \end{cases}$$

Тук  $\psi(A, B) = +$  ако  $\chi(A) \geq \chi(B)$  и  $\psi(A, B) = -$  в противен случай, където  $\chi(A) = a^-/a^+$  иф  $a^- + a^+ \geq 0$  и  $\chi(A) = a^+/a^-$  иф  $a^- + a^+ < 0$ .

Означавайки

$$\frac{1}{B} = \left[ \frac{1}{b^+}, \frac{1}{b^-} \right]$$

лесно се изразява операцията  $\times^-$ :

**Следствие 1.20**

$$A \times^- B = \varepsilon_{\frac{1}{A}}(B) \cup \varepsilon_{\frac{1}{B}}(A)$$

за всеки два интервала  $A, B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Z}$ .

*Доказателство.* От теорема 1.19 имаме, че

$$\varepsilon_{\frac{1}{B}}(A) = [a^{-\sigma(B)} b^{\sigma(A)}, a^{\sigma(B)} b^{-\sigma(A)}],$$

$$\varepsilon_{\frac{1}{A}}(B) = [a^{\sigma(B)} b^{-\sigma(A)}, a^{-\sigma(B)} b^{\sigma(A)}],$$

Първо да разгледаме случая  $\sigma(B) = \sigma(A) = +$ . Тогава  $\varepsilon_{\frac{1}{B}}(A) = [a^- b^+, a^+ b^-]$  и  $\varepsilon_{\frac{1}{A}}(B) = [a^+ b^-, a^- b^+]$ . Тогава  $\varepsilon_{\frac{1}{A}}(B) = \emptyset$  точно тогава когато  $a^+ b^- > a^- b^+$ , което е налице точно когато  $\chi(A) < \chi(B)$ , т.е.  $\psi(A, B) = -$ . Следователно  $\varepsilon_{\frac{1}{A}}(B) \cup \varepsilon_{\frac{1}{B}}(A) = [a^- b^+, a^+ b^-] = A \times^- B$ . Ако  $\chi(A) > \chi(B)$  то  $\psi(A, B) = +$ , и  $a^+ b^- > a^- b^+$ . Това означава, че  $\varepsilon_{\frac{1}{B}}(A) = \emptyset$  и  $\varepsilon_{\frac{1}{A}}(B) \cup \varepsilon_{\frac{1}{B}}(A) = [a^+ b^-, a^- b^+] = A \times^- B$ . В този случай  $\chi(A) = \chi(B)$ , по дефиниция  $\psi(A, B) = +$ , и двата интервала  $\varepsilon_{\frac{1}{A}}(B)$  и  $\varepsilon_{\frac{1}{B}}(A)$  се изразждат в един и същ едноточков интервал – в този случай твърдението е тривиално. Така доказахме твърдението когато  $\sigma(B) = \sigma(A) = +$ .

Случаите  $\sigma(B) = \sigma(A) = -$  и  $\sigma(B) = -\sigma(A)$  се разглеждат аналогично.  $\square$

Така показахме, че най-често използваните интервални аритметични операции могат да бъдат разглеждани като частен случай на морфологични операции. Още повече, аналози на известните интервални операции “+”, “-” могат да бъдат въведени в произволна T-решетка, като например решетката от всички затворени изпъкнали подмножества на  $\mathbf{R}^n$ , решетката  $Fun(M)$ , както и например в решетката от изпъкнали подмножества на едно линейно пространство, разглеждана в глава 5.

## ГЛАВА 2

### Приложение при планиране на движенията на роботи в среда с препятствия

Проблемът за планиране на движенията представлява определянето на траектория на изследвания обект (мобилен робот, робот - манипулатор, транспортно средство) в пространство с препятствия. Тази задача се разделя на три подзадачи:

- Определяне на свободното за движение пространство на дадения обект;
- Построяване на крива (траектория) в свободното пространство;
- Определяне на кинематиката и динамиката на подвижния обект при движението му по така построената крива. Условието при решаването на задачите на кинематиката и динамиката могат да наложат допълнителни ограничения върху първите две задачи. Така например при роботите - манипулатори ограничения могат да се получат както от ограниченията в ставните скорости и ускорения,

така и от т.нар. мъртви конфигурации По-подробно тези задачи са описани например в [42] и др. В настоящата работа се разглеждат следните задачи:

- Определяне на свободното конфигурационно пространство с помощта на морфологични операции;
- Съгласуване на движенията на два подвижни обекта действащи в обща работна среда чрез използването на морфологични операции. Едно от възможните решения на междинната задача за намиране на свободна траектория на подвижен обект е дадено подробно в работата [42]. Използуваният в тази работа вълнов алгоритъм се основава на т.нар. трансформация на разстоянията, описана в глава 4. Това показва, че геометричният етап от планирането на движението на един или повече съвместно действащи обекта в среда с препятствия може да се опише с помощта на морфологични операции, тъй като в основата на тази задачи стои описанието на определени форми - на звената на движещия се обект, на препятствията и др.

Да дефинираме абстрактен робот като изображение  $R : \mathcal{Q} \mapsto \mathbf{R}^n$ , където числото  $n$  за работи с равнинна структура, като роботите тип SCARA е 2, а за работи с пространствена структура  $n$  е 3. Нека  $\mathcal{L}$  е подмножество на  $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$  което ще наричаме *множество на препятствията*.  $\mathcal{Q}$  е конфигурационното пространство, т.е. множеството от ставните координати на робота. По зададена конфигурация  $q \in \mathcal{Q}$  еднозначно се определя положението на всяко звено в пространството. Работна зона на робота се нарича множеството от тези и само тези точки в тримерното пространство до които може да достигне поне една точка от звената му, т.е. при изпълнение на произволна технологична задача звената на робота не напускат работната зона [1]. Тъй като множеството  $\mathcal{Q}$  е компактно и линейно свързано, такава е и работната зона на робота.

Нека да разгледаме решетката  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ . И в двете решетки  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$  наредбата, операциите супремум и инфимум се дефинират както в Пример 1 на предишната глава.

Можем да дефинираме операциите

$$\delta(X) = \{q \in \mathcal{Q} : R(q) \cap X \neq \emptyset\}, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(Y) = \left( \bigcup_{q \notin Y} R(q) \right)^c. \quad (2.2)$$

Роботът  $R$  в конфигурация  $q$  не докосва препятствието  $X$  ако  $R(q) \cap X = \emptyset$ . Следователно  $\delta(X)$  представлява съвкупността от конфигурации при които роботът докосва препятствието  $X$ , т.е.  $\delta(X)$  е образа на препятствието  $X$  в конфигурационното пространство, или както още се нарича  $C$ -препятствие (вж. [42]).

**Теорема 2.1** Двойката оператори  $(\varepsilon, \delta)$  е спрегната.

*Доказателство.*

Трябва да покажем еквивалентността на включванията  $\delta(X) \subset Y$  и  $Y \subset \delta(X)$ . Включването  $\{q \in \mathcal{Q} : R(q) \cap X \neq \emptyset\} \subset Y$  е изпълнено тогава и само тогава когато за всяка конфигурация  $q$  не принадлежаща на  $Y$  е изпълнено  $R(q) \cap X = \emptyset$ , което е все едно  $\left( \bigcup_{q \notin Y} R(q) \right) \cap X = \emptyset$ , което пък е изпълнено точно когато  $X \subset \left( \bigcup_{q \notin Y} R(q) \right)^c$ .  $\square$

Определянето на  $\delta(X)$  може да бъде извършено чрез решаването на обратна задача на кинематиката за характерни точки от звената на робота [4, 1]. За ефективното пресмятане обаче е необходимо звената да имат максимално прост вид, например да бъдат моделирани като отсечки. Това може да се постигне имайки предвид Теорема 1.7. Нека предположим, че дадено звено на робота при дадена конфигурация може да се опише като сума  $A \oplus B$ , където  $B$  е симетрично компактно множество. Тогава, това звено е в контакт с препятствието  $X$  точно когато  $A \cap (X \oplus B) \neq \emptyset$ . Ако  $B$  е кълбо, то независимо от положението на звеното в пространството, можем да решим задачата “раздувайки” препятствията прибавяйки към тях  $B$  и вместо истинското звено можем да разгледаме звено с форма  $A$ .



Свободното конфигурационно пространство е

$$C = \bigcap_{i=1}^m \{Q \setminus \delta(X_i)\} = Q \setminus \delta\left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right),$$

тъй като според доказаната теорема  $\delta$  е дилатация. Ако препятствията и звената на робота са изпъкнали, както е при болшинството промишлени работи, за пресмятането на  $C$  може да се използва тест за колизаия, основан на алгоритъма на Gilbert [20, 21].

В случая на декартов робот с форма  $A$  и  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , непосредствено се проверява, че  $\delta(X) = X \oplus (-A)$ , а оттам поради единствеността на спрегнатия елемент  $\varepsilon(Y) = Y \ominus (-A)$ .

Сега ще разгледаме задачата за координация на движенията на два робота действателно в обща среда. Да означим роботите с  $R_1$  и  $R_2$ , а техните свободни конфигурационни пространства с  $C_1$  и  $C_2$ . Всяко задание на  $i$ -тия робот ( $i = 1, 2$ ) може да се опише математически като крива  $q_i : [0, 1] \mapsto C_i$ . Изпълнението на това задание се описва като движение на точка по тази крива, тоест като параметризация на кривата. Тогава задачата за координиране на двата робота при изпълнение на заданията  $q_1$  и  $q_2$  се състои в намирането на две непрекъснати монотонно растящи функции  $s'$  и  $s''$  на времето  $t$ ,  $s'(0) = s''(0) = 1, s'(T) = s''(T) = 1$ , като  $R_1(q_1(s'(t))) \cap R_2(q_2(s''(t))) = \emptyset$  е изпълнено за всяко  $t \in [0, T]$ . Тези две функции се наричат *разписания* на движението на роботите. Разписанията за безконфликтно движение на двата робота може да се интерпретират като координатни функции на растяща крива  $\gamma$  в правоъгълника  $[0, 1] \times [0, 1]$  свързваща долния ляв с горния десен връх и не съдържаща точки  $(z_1, z_2)$  за които  $R_1(q_1(z_1)) \cap R_2(q_2(z_2)) \neq \emptyset$ . Всяка параметризация на кривата  $\gamma$  определя валидни разписания и по-нататък ще я наричаме крива на разписанията. O'Donnell и Lozano-Perez са предложили в работата [38] ефективен алгоритъм за построяване на оптимална крива на разписанията:

Да разбием правоъгълника  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  на  $w_1 w_2$  на брой еднакви и еднаквоориентирани правоъгълни парчета, наречени клетки, като хоризонталните страни на  $D$  разделяме на  $w_1$ , а вертикалните страни - на  $w_2$  части. На вся-

ка клетка можем да съпоставим еднозначно двойка цели неотрицателни числа  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq w_1, 0 \leq j \leq w_2$ , които ще наречем координати на съответната клетка. Така построения клетъчен комплекс ще наречем *диаграма за изпълнение на заданията*. Две клетки от тази диаграма  $c_1(i_1, j_1)$  и  $c_2(i_2, j_2)$  са съседни, ако  $\max(|i_1 - i_2|, |j_1 - j_2|) = 1$ . Път е такава крайна редица от клетки  $c_1 c_2 \dots c_n$ , за която  $c_k$  е съседна на  $c_{k+1}$  за  $k = 1, \dots, n - 1$ . Една съвкупност от клетки ще наречем свързана, ако всяка нейна двойка клетки можем да свържем с път.

Една клетка  $c(i, j)$  от диаграмата за изпълнение на заданията ще маркираме като забранена, ако съществува точка  $(z_1, z_2) \in \text{int}(c)$  такава че  $R_1(q_1(z_1)) \cap R_2(q_2(z_2)) \neq \emptyset$ .

На фигура 2.1 е представена диаграма за изпълнение на заданията, като забранените клетки са запълнени. Клетките, които не са забранени да наречем свободни. Очевидно е, че кривата на разписанията трябва да лежи изцяло в съвкупността от свободни клетки. Допускаме, че сме маркирали забранените клетки, чиято съвкупност да означим с  $F$ . Процедурата за намиране на кривата на разписанията, предложена от O'Donnell и Lozano - Perez е инкрементална - строи се път от долния ляв връх до горния десен, съставен от свободни клетки, като на всяка стъпка се добавя по една клетка. Тогава кривата на разписанията  $\gamma$  можем да построим свързвайки центровете на така намерените клетки. Процедурата е наречена Greedy Scheduler и не използва търсене в граф, нейната сложност е  $O(w_1 + w_2)$ . За прилагането на тази ефективна процедура обаче се налага съвкупността от забранени клетки да бъде преобразувана, а именно да се намери т. нар *югозападна обвивка* означавана с  $SW(F)$ .  $SW(F)$  се състои от забранените и от тупикови клетки. Процедурата Greedy Scheduler когато приоритет има първия робот може да се опише по следния начин ( използван е синтаксиса на езика C).

```
void Greedy_Scheduler()
{
int i=0;
int j=0;
```

```

record(i,j);
while (i < w1 || j < w2)
  if (c[i+1,j+1] == 0)
    if (i < w1-1 && j < w2-1)
      record (i++,j++);
    else if (i < w1-1)
      record (i++,j);
    else if (j < w2-1)
      record (i,j++);
  else if (i < w1-1 && c[i+1,j] == 0)
    record (i++,j);
  else if (j < w2-1 && c[i,j+1] == 0)
    record (i,j++);
}

```

Тук функцията `record(i,j)` записва клетката с координати  $(i, j)$  в търсения път. Също така тук смятаме, че клетката с координати  $(i, j)$  е свободна, т.е. не принадлежи на  $SW(F)$ , ако в нея е записано числото 0, тоест  $c[i, j] = 0$ .

Две клетки от диаграмата на изпълнение на заданията  $c_1(i_1, j_1)$  и  $c_2(i_2, j_2)$  се наричат несравними, ако  $(i_1 - i_2)(j_1 - j_2) < 0$ . Нека  $F'$  е максимална свързана компонента на  $F$ . Нека  $c_1(i_1, j_1)$  и  $c_2(i_2, j_2)$  са две произволни несравними клетки от  $F'$ . Без ограничение на общността можем да смятаме, че  $i_1 < i_2$ . Тогава  $SW(F')$  освен  $c_1$  и  $c_2$  съдържа още и клетката  $c(i_1, j_2)$ , която е туникова за алгоритъма Greedy Scheduler [38]. Разбира се,  $F' \subset SW(F')$  по условие. Югозападна обвивка на цялата забранена област  $F$  по дефиниция е обединението на югозападните обвивки на максималните ѝ свързани компоненти. Югозападните и североизточните обвивки на система правоъгълници със страни успоредни на координатните оси са въведени от Lipski и Papadimitriou [28].

Ще покажем, че югозападната обвивка на една свързана област  $F'$  може да бъде получена с помощта на морфологични операции.  $F'$  може да го разглеждаме като подмножество на  $\mathbf{Z}^{+2}$ . Разглеждаме структурните елементи  $A_1 = \{(-i, 0) :$

$0 \leq i < w_1$  и  $A_2 = \{(0, -j) : 0 \leq j < w_2\}$ . Тогава операторите  $\delta_{A_i}(X) = X \oplus A_i$  и  $\varepsilon_{A_i}(X) = X \ominus A_i$  образуват спрегната двойка в решетката  $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^2)$ . Разглеждаме техните рестрикции  $\delta_{A_i}(\cdot|\mathbf{Z}^{+2})$  и  $\varepsilon_{A_i}(\cdot|\mathbf{Z}^{+2})$ . Те също образуват спрегната двойка, следователно  $\alpha_{A_i}(X) = \delta_{A_i}(\varepsilon_{A_i}(X|\mathbf{Z}^{+2})|\mathbf{Z}^{+2})$  е затваряне в  $\mathbf{Z}^{+2}$ . Аналогично на равенства (1.20) можем да получим следното представяне на условното затваряне по отношение на  $M$ , което бележим  $\alpha_B(X|M) = (((X \oplus B) \cap M) \cup M^c) \cap M$ :

$$\alpha_B(X|M) = \{k \in M : h \in B_k \cap M \Rightarrow (-B)_h \cap X \neq \emptyset\} \quad (2.3)$$

Действително  $k \in \alpha_B(X|M)$  точно тогава, когато  $k \in M$  и  $B_k \subset (((X \oplus B) \cap M) \cup M^c)$ . Последното включване е вярно точно когато:

$$(\forall h)(h \in B_k \cap M \Rightarrow h \in X \oplus B),$$

което доказва представянето. То може да се запише еквивалентно и по начина:

$$\alpha_B(X|M) = \{k \in M | (\forall h \in M)(k \in (-B)_h \Rightarrow (-B)_h \cap X \neq \emptyset)\}.$$

Тогава лесно се вижда, че

$$\begin{aligned} \alpha_{A_1}(F'|\mathbf{Z}^{+2}) &= \{(i, j) \in \mathbf{Z}^{+2} : \\ &(\exists m \in [i, w_1])(m, j) \in F'\} \\ \alpha_{A_2}(F'|\mathbf{Z}^{+2}) &= \{(i, j) \in \mathbf{Z}^{+2} : \\ &(\exists m \in [j, w_2])(i, m) \in F'\} \end{aligned}$$

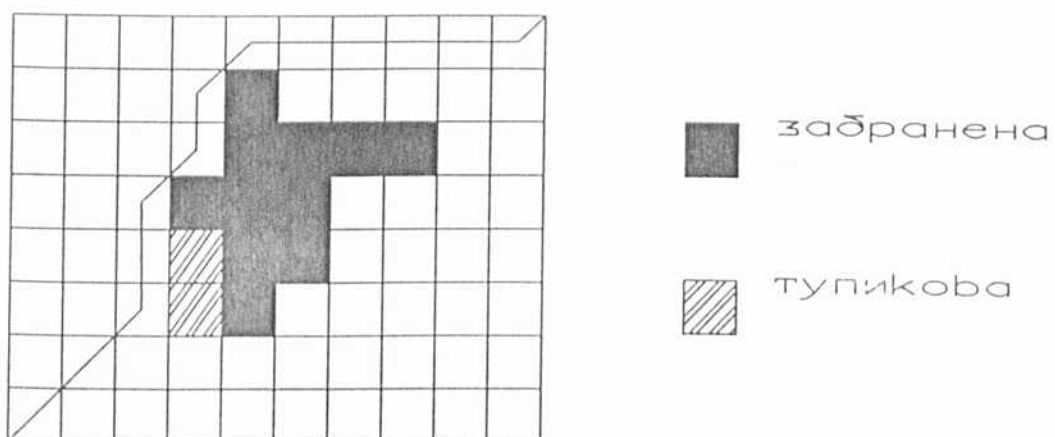
Оттук очевидно следва, че

$$SW(F') = \alpha_{A_1}(F'|\mathbf{Z}^{+2}) \cap \alpha_{A_2}(F'|\mathbf{Z}^{+2}) \quad (2.4)$$

За пресмятането на  $\alpha_{A_1}(F'|\mathbf{Z}^{+2})$  и  $\alpha_{A_2}(F'|\mathbf{Z}^{+2})$  са необходими  $O(w_1 w_2)$  операции, което е оптимално [28]. Така показахме, че намирането на югозападната обвивка, най-трудоемката препроцесорна част при координиране на движението на

два робота, може да се реши ефективно с помощта на морфологично затваряне. Още повече, пресмятането на  $\alpha_{A_1}(F^y|Z^{+2})$  и  $\alpha_{A_1}(F^y|Z^{+2})$  може да се организира паралелно. Също така, бинарни морфологични операции се реализират лесно с помощта на оптичен хардуер, което увеличава значението на тези алгоритми.





фиг. 2.1 Примерна диаграма за изпълнения на заданията

## ГЛАВА 3

### Анализ на текстурни изображения на грапави повърхности чрез пресмятане на фрактална размерност

#### 1 Основни положения

В настоящата глава математически се характеризира понятието “грапавост”. По-точно, ако е дадено едно компютърно изображение на грапава повърхност, което ще наричаме текстурно, въз основа на въведените характеристики може да се оцени грапавостта на изследваната повърхност и да бъдат открити дефекти. Текстурното изображение се моделира математически като фрактал. Фрактали се наричат множества със висока степен на геометрична сложност. Те се използват за моделиране на много процеси и явления от физиката, икономиката и др. Фракталните множества се характеризират с факта, че тяхната топологична размерност и размерността им на Мишковски - Булигаид (наричана още фрактална размерност) са различни. Много приложения намира фракталната

геометрия в анализа на зрителна информация и разпознаването на образи. Така например фракталната размерност може да се използва като характеристика на текстурни изображения. Pentland в [40] е показал, че съществува корелация между грапавината на наблюдаваната повърхност и фракталната размерност на съответното текстурно компютърно изображение.

Постоящата работа представя метод, базиран на т.нар. морфологични покрития за ефективно определяне на фракталната размерност. Тъй като фракталната размерност остава непроменена при линейни трансформации, то предложеният метод е нечувствителен към външни фактори, като промяна на осветеността, например. Предложена е ефективна компютърна реализация чрез паралелни изчислителни процедури.

Да се даде чисто математическа формулировка що е това текстурно изображение е невъзможно. Но когато наблюдаваме повърхност от дърво, камък, кожа или друг материал, ние възприемаме тези повърхности като хомогенни, въпреки отклоненията в цвета и яркостта. Такива хомогенни визуални образи се наричат *текстури* [60]. Тъй като всеки обект има своя специфична текстура, тя може да бъде използвана за в много случаи за разпознаване на вида на изследвания обект. При системите за компютърно зрение е трудно да се анализира информационното съдържание на изображението директно от интензивността на сивото на отделните пиксели от изображението. Много по-съществени се оказват локалните вариации на интензитета, които могат да бъдат извлечени с помощта на анализ при променлив мащаб (multiscale analysis) [30]. Този анализ се базира на определянето на фракталната сигнатура или на фракталната размерност на изображението при различна разрешаваща способност. В предложеният подход фракталната сигнатура се определя с помощта на последователност от полутонови морфологични операции.

## 2 Покрития и размерност на Минковски - Булиганд

Определяме покритие на повърхнината  $X$   $C_B(X) = X \oplus B$ , където  $\oplus$  означава сума на Минковски (дилатация). Лесно е да се провери, че когато структурния елемент има диаметър  $2\varepsilon$ , точките от границата на покритието (паралелното тяло  $X \oplus B$ ) лежат на разстояние не повече от  $\varepsilon$  от повърхнината  $X$ . Връзката между размерността на Булиганд на една повърхнина в тримерното Евклидово пространство  $\mathbf{R}^3$  и обема на покритията ѝ [15] може да бъде представена във вида:

$$\Delta(X) = 3 - \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln V_\varepsilon(X)}{\ln \varepsilon} \quad (3.1)$$

където  $V_\varepsilon(X)$  означава обема на слоя (паралелното тяло, както се нарича понякога, вж. [51]), получен чрез дилатация на  $X$  със структурния елемент  $\varepsilon B$ . В този израз  $B$  е симетрично изпъкнало компактно множество с диаметър 2 и непразна вътрешност.

Да предположим, че  $A_\varepsilon(X)$  е площта на паралелното тяло  $X \oplus \varepsilon B$ , ако е измерима. Тя може да бъде разгледана като оценка на удвоената площ на  $X$  при мащаб  $\varepsilon$ , прокарвайки аналогия с т.нар. измервания на бреговата линия на Норвегия с помощта на мерна линия с дължина  $\varepsilon$ , описани в [31]. Тогава от евристични съображения подобни на тези в работите [31] и [34], можем да твърдим, че ако  $X$  е фрактална повърхнина, то

$$A_\varepsilon(X) \sim F(X)\varepsilon^{2-\Delta(X)} \quad (3.2)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Всяко полутоново компютърно изображение  $P$  може да се интерпретира като повърхнина  $\Pi(P)$  от  $\mathbf{R}^3$ , като  $z$ -координатата на една точка е степеня на сивото записано в съответния пиксел, включващ точката  $x$ . Припомниме, че *пиксел* (съкращение от picture cell) в компютърната графика и обработката на изображения се нарича елемент на структура от данни, отговарящ на елементарна клетка от изображението, като числената му стойност е усреднения цвят или

степен на сивото на точките от тази клетка. Тази стойност се нарича още *яркост на пиксела*. За простота, обикновено пиксела се отъждествява със съответната му елементарна клетка от изображението. Обикновено тези клетки са еднакви правоъгълници и съответната структура данни е двумерен масив. Тогава както говорим за пиксела  $x$ , обикновено ще имаме предвид целочисления двумерен вектор определящ положението му в матрицата от данни.

Ако е дадено едно изображение  $P$  с размери  $N \times N$  пиксела и  $N$  нива на сивото, то за построяването на морфологично покритие са необходими  $O(N^3)$  на брой аритметични операции. С използването обаче на полутонови морфологични операции броят на операциите се свежда до  $O(N^2)$ .

Едно полутоново изображение  $P$  може да се интерпретира и като функция, която ще бележим също  $P(x)$ . Стойността  $p = P(x)$  е точно яркостта на пиксела  $x$  от изображението. Тогава повърхнината  $\Pi(P)$  можем да си я представяме като затворената графика на  $P$ . Ясно е тогава, че повърхнината  $\Pi(P)$ , разглеждан като компактно множество от  $\mathbf{R}^3$  притежава размерност на Минковски-Булиганд равна на 2, тъй като е съставена от краен брой затворени правоъгълници. Следователно трябва да бъде въведен дискретен аналог на размерността на Минковски - Булиганд, която трябва да се пресмята ефективно.

Следвайки идеята на Peleg [39] и работата на Maragos и Sun [34], построяваме две редици от покрития на изображението  $P$ :

- Пулевото горно и долно покритие съвпадат със самото изображение  $P$ .
- За  $k = 1, 2, \dots$  дефинираме индуктивно *горно и долно покритие* по следния начин:

$$U_k(x) = \max \{ U_{k-1}(x) + 1, \max_{y \in N(x)} U_{k-1}(y) \}, \quad (3.3)$$

$$B_k(x) = \min \{ B_{k-1}(x) - 1, \min_{y \in N(x)} B_{k-1}(y) \}, \quad (3.4)$$

където с  $N(x)$  бележим околност на пиксела  $x$  с форма  $N$ .

Директно се вижда, че горните изрази могат да бъдат представени съответ-



по като  $k$  на брой последователни полутонови дилатации и ерозии с подходящ структурен елемент - функцията  $G$ , формата (дефиниционната област) на който е симетричното множество  $N, G(0) = 1, G(x) = 0$  за  $x \in N \setminus \{0\}$ . За текстурни изображения Peleg е въвел величините *горна повърхнина*  $A_k^+$  и *долна повърхнина*  $A_k^-$ .

Нека  $P$  е текстурно изображение. Разглеждаме  $k$ -тите покрития на  $P$ . Тогава  $k$ -ти *горен обем* въвеждаме като

$$V_k^+ := \sum_x (U_k(x) - P(x)),$$

а пък  $k$ -ти *долен обем* като

$$V_k^- := \sum_x (P(x) - B_k(x)).$$

Използвайки аналог на Теорема 1 от [34] за обеми и Теорема 1.10 за подграфиката виждаме, че сумата  $V_k = V_k^+ + V_k^-$  е пропорционална на обема на паралелното тяло  $C_{N(0) \oplus k} \Pi(P)$ . Тук

$$B^{\oplus k} = \underbrace{B \oplus \dots \oplus B}_{k\text{-пъти}}. \quad (3.5)$$

Тогава  $A_k^+ := V_k^+ - V_{k-1}^+$  и  $A_k^- := V_k^- - V_{k-1}^-$ .

Тази дефиниция е полезна, защото позволява да се отделят признаци видими при разрешаваща способност  $k$  от тези, видими само при по-ниска разрешаваща способност  $p > k$ . За идеални фрактални изображения, поради (3.2), може да се приеме, че горните и долните повърхнини имат поведението на фрактални повърхнини съобразно равенствата:

$$A_k^+ = F_1 k^{2-\Delta_1}, \quad (3.6)$$

$$A_k^- = F_2 k^{2-\Delta_2} \quad (3.7)$$

за всяко естествено число  $k$ , където  $F_1, F_2, \Delta_1$  и  $\Delta_2$  са константи. Тоест, за фрактално изображение когато начертаем графика на  $\ln A_k^-$  или  $\ln A_k^+$  по отношение на  $\ln k$  трябва да получим прави линии. Наклонът на тези линии ще бъде

точно  $2 - \Delta_i$ , където  $\Delta_i$  е дискретния аналог на размерността на Минковски - Булиганд. Това не е вярно за нефрактални текстурни изображения в общия случай, но тези идеи ни водят до въвеждането на съвкупност от характеристики на текстурните изображения въобще: Тях ще наречем *горна сигнатура*  $s_k^+$  и *долна сигнатура*  $s_k^-$ , които дават представа за локалния наклон. Те се изчисляват за разрешаваща способност  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  използвайки добре известните формули за числено диференциране чрез разделени разлики от втори ред:

$$f'(x_k) = f[x_{k-1}, x_k] + f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}](x_k - x_{k-1}) + R_2(x_k), \quad (3.8)$$

където

$$R_2(x_k) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}).$$

и

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

Нека заместим в горните формули  $x_k$  с  $\ln k$ . Като заместим и  $f(x_k)$  в (3.8) с  $\ln A_k^+$  или  $\ln A_k^-$  съответно и пренебрегнем остатъчния член  $R_2$  получаваме съответно горните сигнатури  $s_k^+$  и долните сигнатури  $s_k^-$  за  $k = 2, 3, \dots$ . Тези сигнатури не зависят от осветеността на сцената. Трябва да се отбележи, че така дефинираните сигнатури се отличават от тези, дефинирани в работата [39] и са по-лесни за пресмятане.

Логичен е въпросът не е ли достатъчен само един тип сигнатури и не са ли взаимно зависими горната и долната сигнатура от даден ред? Данните на фигури 3.1, 3.2 и 3.3 показват, че взаимна зависимост в общия случай е трудно да бъде намерена. Аналогичен на този факт е коментираният от Mandelbrot в [31]: Според неговите експерименти при измерване на дължината на бреговата линия на Норвегия с една и съща мерна единица откъм сушата и откъм морето се получават различни числа.

Разполагайки със съвкупност от характеристики на текстурните изображения, различието между две такива изображения може да бъде изразено чрез следната мярка:

$$D(P, Q) = \sum_k \frac{1}{k} \left\{ (s_k^+(P) - s_k^+(Q))^2 + (s_k^-(P) - s_k^-(Q))^2 \right\}. \quad (3.9)$$

Нека  $P$  е изображение, разбито на  $m$  еднакви по големина парчета е  $P_i$   $i = 1, \dots, m$ . Да въведем симетричната матрица  $A(P) = (a_{ij}(P))_{i,j=1,\dots,m}$ , където  $a_{ij}(P) = D(P_i, P_j)$ . Да наречем мярка за *регулярност* на текстурата на  $P$  числото

$$q(P) = \frac{\|A(P)\|}{m}.$$

Тук  $\|A\|$  означава коя да е матрична норма. В приложенията е използвана съгласуваната с  $\|\cdot\|_1$  матрична норма, защото е лесна за пресмятане.

### 3 Компютърна реализация

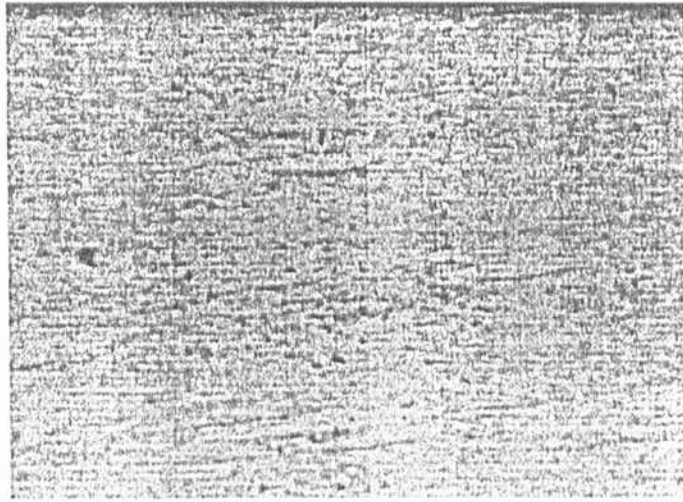
Създаден е софтуер за инспекция на кожени повърхности, предназначени за производство на обувки. Системата е написана на езика parallel C. и работи на паралелната платформа Sequent Symmetry S81 system в Университета в гр. Хъл - Великобритания. (вж. [43]). Разглежданите изображения се състоят от  $256 \times 256$  пиксела с 256 яркости. Системата е тествана на примери на добре обработени с помощта на метална четка кожени парчета, недостатъчно обработени парчета и парчета, които са преобработени и при това се е нарушил горния слой. Недообработените и преобработените парчета притежават дефекти, наблюдавани като отблясъци и тъмни петна върху съответните изображения. Това води до по-голяма неравномерност на текстурата, т.е. до по-голяма стойност на  $q(\cdot)$ . Приведени са примери на фигури 3.1, 3.2 и 3.3, като за тях съответните стойности на мярката  $q$  са:

- За примера на недообработено парче - 0.372878 ,
- За добре обработеното - 0.270465,

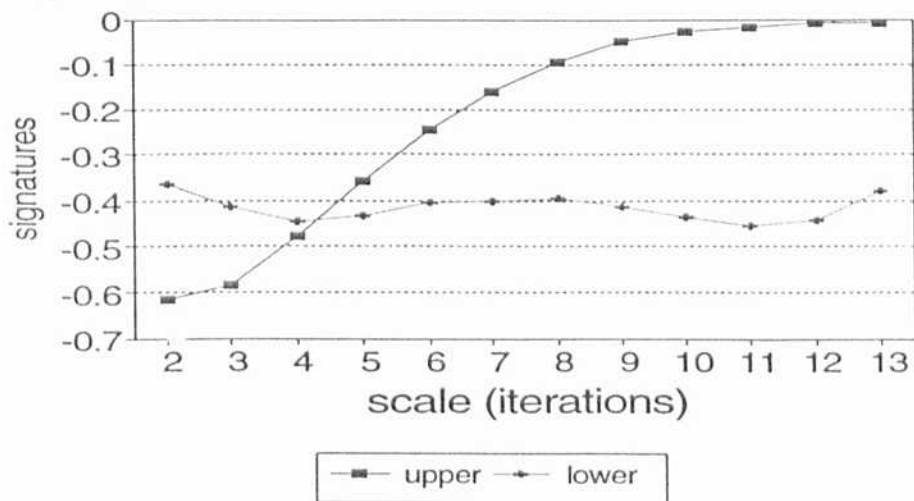
- за преобработеното парче - 0.538247.

Мярката  $q$  е изчислена разбивайки съответното изображение на 16 еднакви части. Построени са итеративно 15 покрития. ( експериментите показват, че следващите по едри мащабни скали не са информативни.)

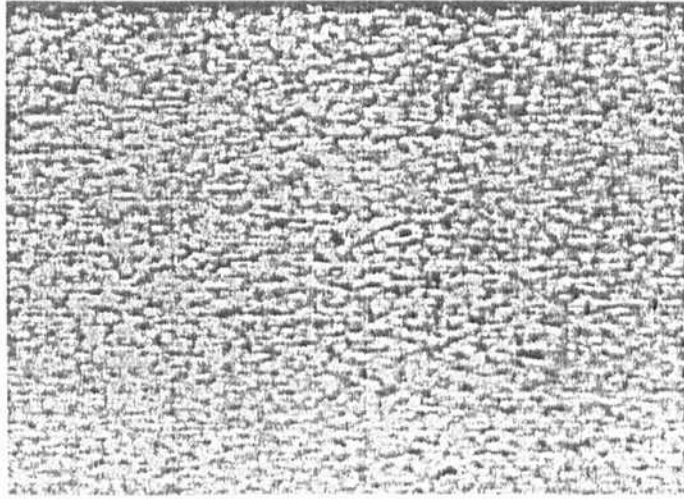
Прави впечатление, че добре обработената повърхност има по-малки сигнали (по - голяма размерност) при малките мащабни скали. Това означава, че добре обработената повърхност е по - грапава, както и трябва да бъде, за да се осигури добро сцепление при залепването на парчетата, което потвърждава теорията на Pentland за връзката между грапавината на наблюдаваната повърхност и фракталната размерност на съответното текстурно компютърно изображение.



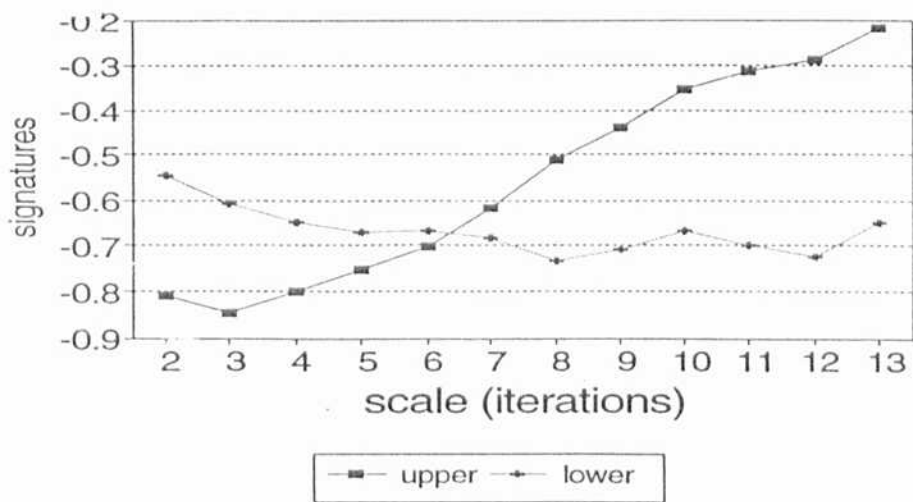
Фиг. 3.1 Недообработена повърхност

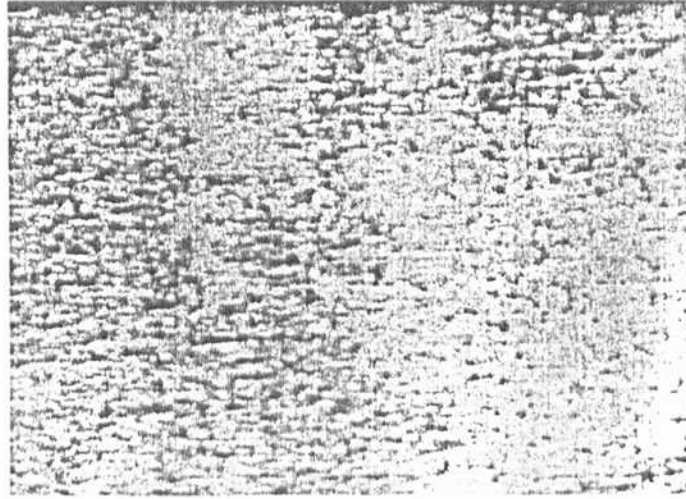




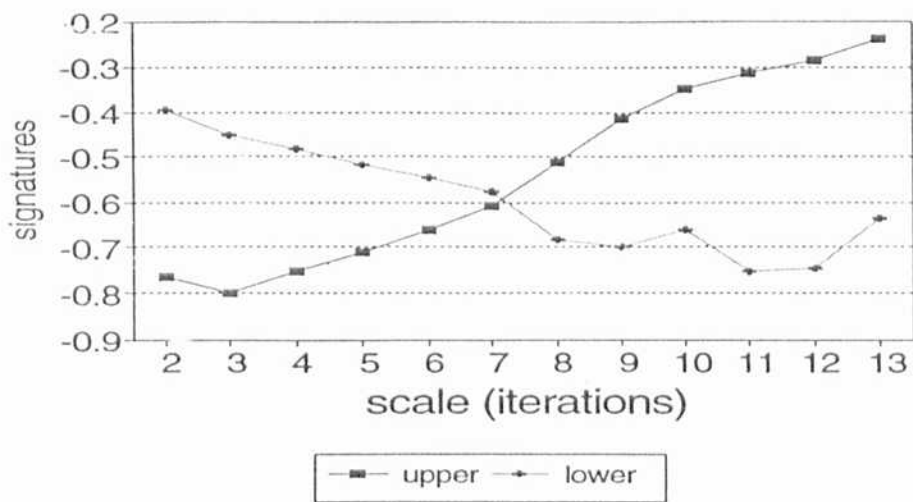


Фиг. 3.2. Добре обработена повърхност





Фиг. 3.3 Преобработена повърхност



## ГЛАВА 4

### Скелети на множества и построяването им с приближени методи

Скелетите имат широко приложение в задачите за обработка на изображения и разпознаване на образи за характеризация на формата на обектите [22, 53]. Скелетите се използват и при планирането на движенията на работи в среда с препятствия [8] - Построявайки скелета на свободната от препятствия работна зона ( или при многозвезни механизми - свободното конфигурационно пространство [42] ) ние можем да строим търсената траектория възможно най-близо до скелета. С това се гарантира най-голяма сигурност за безконфликтно движение на робота.

В повечето книги, особено в учебната литература (вж. например [22]), се разглеждат дискретни аналози на скелета. Съществуват и множество алгоритми за построяване на дискретните аналози. Както обаче се отбелязва от някои автори, например [56] или [53] полученият чрез тези алгоритми дискретен скелет не винаги е достатъчно "тънък", а понякога се получава и несвързан въпреки,

че изходния обект е свързан. Тези недостатъци се преодоляват при разглеждането на скелети на непрекъснати обекти. Тъй като обаче при компютърните изчисления се работи с дискретни обекти, трябва да се постави въпроса за определяне на класа непрекъснати обекти, както и за подхода за построяване на скелетите на тези обекти по зададена крайна съвкупност от техни точки, тъй че получената съвкупност от точки да се отличава минимално от истинския скелет. Това води до поставянето на задачата за приближено построяване на скелети, на която е посветена настоящата глава от работата.

Доказана е теорема, показваща че широко известния дискретен аналог на скелета, т.нар. средна ос представлява едностранно приближение на скелета. По нов начин, с използване на нестандартен анализ е доказана теорема за сходимост на върховете на диаграма на Вороной, построена върху съвкупност от точки по контура на едно тяло, към скелета на това множество при положение, че контурът на тялото е достатъчно гладък. Използването на нестандартния подход прави интерпретацията на получения резултат по-ясна, и доказателството – по-кратко. Това доказателство е първа стъпка в използването на нестандартния анализ при пренасяне на резултати от дискретната геометрия за изучаване на свойства на непрекъснати обекти.

## 1 Скелети на множества -- дефиниция и основни свойства

**Дефиниция** Нека  $A$  е компактно множество от  $\mathbf{R}^n$  с непразна вътрешност. *Скелет* на  $A$  се дефинира като множеството от центровете на максималните затворени кръгове, вписани в  $A$ , а именно:

$$SK(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : (\exists r > 0)(\forall r' > 0)(\forall x' \in \mathbf{R}^n)[(B_r(x) \subset B_{r'}(x') \subset A) \Rightarrow (x = x' \& r = r')]\}.$$

**Забележка 4.1** В дефиницията за скелет вместо кръгове могат да се разглеждат произволни подобни симетрични изпъкнали тела (компакти с непразна вътрешност) [24]. Тъй като обаче в нашата работа сме си поставили за основна

задача да разгледаме метод за приближено построяване на скелет с помощта на диаграми на Вороной, то ние разглеждаме само скелети породени от кръг - т.е. разглеждания от нас скелет може да се третира като породен от Евклидовата метрика в  $\mathbb{R}^n$ . Това се дължи на факта, че диаграмите на Вороной породени от неевклидово разстояние (например дори породените от  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_\infty$  метрики, още повече за породена от произволно изпъкнало симетрично компактно множество) са по-слабо изучени, като многоъгълниците на Вороной в някои от тези случаи (например  $\|\cdot\|_\infty$ ) могат да се окажат в общия случай неизпъкнали, което затруднява тяхното разглеждане.

Съществуването на скелет следва от лемата на Цорн [55].

Понятието за скелет се използва широко в разпознаването на образи. Скелетът дава представа за формата на разглеждания обект и неговите топологични характеристики могат да се използват при класификацията на различни видове обекти - например ръкописен текст. (На фигура 4.1 е показан скелета на една дебело ръкописно изписана буква А.) Това се дължи на следните свойства на скелета

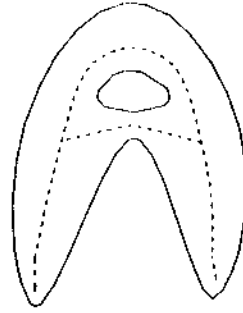
- Скелетът има празна вътрешност [24].
- Ако вътрешността на едно множество е свързана, то и скелета му е свързан [55]. Широк клас равнинни множества, изучавани от Matheron са хомотопно еквивалентни на скелета си. Този клас множества включва компактните свързани множества (не задължително едносвързани) с  $C^2$ -гладък контур. При множества с  $C^2$ -гладък контур може да се съобрази лесно, че скелетът лежи изцяло във вътрешността на множеството.

Въпреки, че скелетът е тънко множество, въпросът кога той има Лебегова мярка нула остава открит дори и в най-простите случаи [55].

По-нататък за простота ще разглеждаме само скелети на равнинни множества.

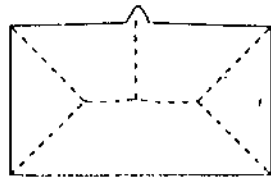
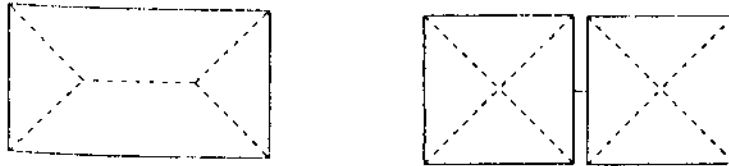
Ще докажем следната лема:





фиг. 4.1

4.2



4.3

Скелетизацията не е непрекъсната операция

**Лема 4.2** *Скелетът на компактно множество с  $C^2$ -гладък контур е компактен.*

*Доказателство.* Нека вземем редица от точки  $x_n \in SK(A)$ ,  $\lim x_n = x$ . Трябва да покажем, че  $x \in SK(A)$ . Да разгледаме редицата от максималните кръгове  $B_{r_n}(x_n)$  вписани в  $A$ . Редицата от радиусите им е ограничена, тъй като  $A$  е компактно. Тогава съществува подредица  $\{r_{n_k}\}$  клоняща към  $r$ . Съобразява се обаче лесно, че

$$r_{n_k} = d(x_{n_k}, \partial A). \quad (4.1)$$

Тъй като  $\partial A$  е компактно, то функцията  $\rho(x) = d(x, \partial A)$  е непрекъсната. След граничен преход в равенството (4.1) получаваме  $d(x, \partial A) = r$ , тоест  $B_r(x) \subset A$ . По-нататък ще разгледаме само редицата кръгове  $B_{r_{n_k}}(x_{n_k})$ , затова ще я препомерираме и ще пишем накратко  $B_{r_n}(x_n)$ . Нека означим

$$\text{ргој}_A(x) = \{y \in \partial A : d(x, y) = d(x, \partial A)\}.$$

За кръговете от редицата  $B_{r_n}(x_n)$  имаме две възможности - или съществува безкрайна подредица, за която в  $\text{ргој}_A(x_n)$  има поне два елемента, разположени на разстояние по-голямо от дадено фиксирано число  $\xi$ , или пък съществува безкрайна подредица от оскулачни кръгове.

В първия случай, след евентуално взимане на подредици и граничен преход, установяваме, че съществуват две точки  $a_1, a_2 \in \partial A$ ,  $d(a_1, a_2) \geq \xi$ , тъй че  $d(x, a_i) = r$ . Оттам чрез елементарни геометрични съображения следва, че  $B_r(x)$  е максимален кръг.

Във втория случай от гладкостта на контура следва, че  $r$  е радиусът на кривина на контура в точката  $\text{ргој}_A$ , с което лемата е доказана.  $\square$

**Забележка 4.3** В пространства с по-висока размерност от 2 необходимата степен на гладкост на контура е  $C^3$  за съществуването на оскулачна сфера във всяка точка.

Една точка  $x$  от контура  $\partial A$  на множеството  $A$  принадлежи на  $cl(SK(A))$  само тогава, когато  $x$  е ъглова точка на  $\partial A$ , тоест когато оскулачната окръжност

се изражда в точка. Фигури 4.2 и 4.3 илюстрират факта, че изображението  $SK(\cdot)$  не е непрекъснато по отношение на Хаусдорфовата метрика [55]. На тези фигури скелета е представен с пунктирна линия.

## 2 Диаграми на Вороной и триангулации на Делоне

Диаграмите на Вороной се използват широко в естествените науки и разпознаването на образи [9, 41, 60], например в геофизиката, географията, клетъчната биология, анализа на текстурни изображения и др. Дефиницията на *Диаграма на Вороной* е следната:

Нека  $S$  е множество от  $n$  точки от Евклидовата равнина. За всяка точка  $p$  от множеството  $S$  разглеждаме геометричното място от точки в равнината, които са по-близо до  $p$  отколкото до другите точки от  $S$ . Това геометрично място, по-точно затворената му обвивка, ще означаваме с  $\text{Vor}(p)$  и ще наричаме *многоъгълник на Вороной свързан с точката  $p$* . Тъй като е сечение на затворени полуравнини, всеки многоъгълник на Вороной е изпъкнал ограничен или неограничен многоъгълник. Веднага се вижда, че  $\text{Vor}(p)$  неограничен тогава и само тогава, когато  $p \in \partial(\text{co}S)$ . Множеството

$$\text{Vor}(S) = \{\text{Vor}(p) : p \in S\}$$

ще наречем *диаграма на Вороной* на крайното множество  $S$ . Обикновено диаграмата на Вороной  $\text{Vor}(S)$  на множеството  $S$  се третира като граф, чийто върхове са върховете на многоъгълниците на Вороной плюс една безкрайна точка, а ребрата му е точно множеството от страните на всички многоъгълници на Вороной [41].

Нека допуснем, че някои 4 токи от множеството  $S$  не лежат на една окръжност. Тогава под *граф (триангулация) на Делоне* ще разбираме дуалния граф на диаграмата на Вороной, а именно:

Върховете на графа на Делоне  $D(S)$  са точките от  $S$ , а множеството от ребрата

му е:

$$E = \{(p, q) \in S \times S : \text{Vor}(p) \cap \text{Vor}(q) \neq \emptyset\}.$$

Лесно се вижда, че при тези условия минималните цикли на графа на Делоне са триъгълници, т.е. той действително е триангулация на изпъкналата обвивка на  $S$  [41]. Графът на Делоне притежава следното важно свойство:

**Теорема 4.4** *Нека  $\Delta pqr$  е стена (минимален цикъл) на графа на Делоне  $D(S)$ . Тогава  $\Delta pqr$  не съдържа във вътрешността си никаква точка от множеството  $S$ . Обратно, ако е дадена триангулация на  $\text{co}(S)$  със свойството, че всеки триъгълник не съдържа точка от  $S$ , то тя съвпада с триангулацията на Делоне.*

За доказателството виж работата [41]. Тук съществено се използва факта, че точките от  $S$  са в общо положение. От елементарно - геометрични съображения е ясно още, че при това предположение, множеството от центровете на описаните окръжности около триъгълниците на Делоне съвпада с множеството на върховете на диаграмата на Вороной  $\text{Vor}(S)$ .

Ако точките от крайното множество  $S$  не са в общо положение, то под триангулация на Делоне за това множество ще разбираме такова разбиване на  $\text{co}(S)$  на триъгълници, така че всеки триъгълник не съдържа точка от  $S$ . Тогава е очевидно, че триангулацията на Делоне не се построява еднозначно, но множеството от центровете на описаните окръжности около триъгълниците на Делоне пак съвпада с множеството на върховете на диаграмата на Вороной  $\text{Vor}(S)$ . В [41] е доказана следната

**Теорема 4.5** *Ако множеството  $S$  е съставено от  $n$  на брой точки, то броят на върховете на  $\text{Vor}(S)$  (без безкрайния връх) е не по-голям от  $2n - 5$ , а броят на ребровете, не по-голям от  $3n - 6$ .*

Съществуват много различни алгоритми за построяване на графите на Вороной и Делоне [41, 9, 19]. Броят на необходимите операции в оптималните алгоритми е  $O(n \ln n)$ .

В настоящата работа е въведено обобщение на понятието триангулация на Делоне за хиперфинитни множества в равнината. Това понятие е използвано за изучаване на свойствата на т.нар. скелети на равнинни множества.

### 3 Суперструктури и нестандартни разширения

Нестандартния анализ, или както още се нарича често, теория на безкрайно-малките величини е въведен от Robinson през 1961 година. Един от основополагащите трудове в тази област е книгата [46]. Идеята на нестандартния анализ се състои в допълването на дадено множество с безкрайно-малки (или по-точно, реципрочни) с безкрайно-големи елементи и се използва в механиката на непрекъснатите среди, функционалния анализ и др. [2]. Допълването с безкрайно-малки елементи може да бъде изложено формално по следния начин [27].

Нека разгледаме произволно множество  $S$ . Да разгледаме редицата множества  $\{V_n(S)\}$ , получена индуктивно по следния начин:

$$V_0(S) = S, \quad V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathcal{P}(V_n(S)),$$

$$V(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(S),$$

Напомниме, че с  $\mathcal{P}(X)$  бележим съвкупността от всички подмножества на  $X$ .

Тогав  $V(S)$  се нарича *суперструктура* или *универсум* над  $S$ . Например наредените двойки от елементи на  $S$   $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$  принадлежат на  $V_2(S)$ , а всяка функция  $F : S \mapsto S$  може да се третира като съвкупност от наредени двойки елементи на  $S$  и следователно принадлежи на  $V_3(S)$ . Триангулацията на Делоне на едно крайно равнинно множество принадлежи на  $V_3(\mathbb{R}^2)$ .

Разглеждаме и втора суперструктура  $V^*(S)$ , наречена *нестандартна версия на  $V(S)$*  съставена от редици елементи на  $V(S)$ . Да разгледаме една такава редица  $\{A_n\}$  от елементи на  $V(S)$ . Такава редица се нарича *ограничена*, ако



съществува такова естествено число  $p$ , така че  $A_n \in V_p(S)$  за всяко  $n$ . На всяка ограничена редица  $\{A_n\}$  ще съпоставим елемент  $\langle A_n \rangle$ , който се нарича *вътрешен елемент* за  $V(*S)$ . Вътрешен елемент от вида  $*B = \langle B, B, B \dots \rangle$  се нарича *стандартен*. Множеството от стандартните елементи на  $V(*S)$  е изоморфно на суперструктурата  $V(S)$ .

Суперструктурата  $V(*S)$ , по-точно съвкупността от вътрешните ѝ елементи се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност, наречени по подражание на Лайбниц *монади* [46, 27]. Два елемента са еквивалентни, ако принадлежат на една и съща монада. Да разгледаме елементите на  $V(*S)$  които са еквивалентни на стандартните елементи породени от елементите на базовото множество  $S$ . Тях ще означаваме като множество  $*S$ , което ще наричаме нестандартна версия или нестандартно разширение на  $S$ . Ако са ни дадени елементите  $a, b \in S$  ще пишем  $a \sim b$  ако те принадлежат на една и съща монада. Например ако разгледаме множеството  $\mathbf{R}^2$ , то  $a \sim b$  означава, че разстоянието между двете точки е безкрайно-малко реално число. Ако  $A \subset *S$ , под  ${}^\circ A$  ще разбираме множеството от елементите на  $S$ , чиито монади образуват множеството  $A$ .  ${}^\circ A$  ще наричаме *стандартна част на  $A$* . Ако в множеството  $S$  е въведена наредба ' $\leq$ ', то можем да въведем наредба и в  $*S$  покомпонентно, а именно  $\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle$  ако за всички  $n$  с изключение на евентуално краен брой е изпълнено  $a_n \leq b_n$ .

**Пример** Множеството  $*\mathbf{N}$  - множеството от нестандартните (крайни и безкрайни) цели числа се състои от всички реални редици от вида  $\langle N_n \rangle$  където  $N_n \in \mathbf{N}$  за всички  $n$  с изключение евентуално на краен брой.

**Дефиниция** Едно множество  $A = \langle A_n \rangle$  ще наричаме *хиперфинитно*, ако ако всички  $A_n$  са крайни (с изключение евентуално на краен брой). Кардинално число на  $A$  се нарича

$$|A| \in *\mathbf{N}, |A| = \langle |A_n| \rangle.$$

Хиперфинитните множества са безкрайни множества имащи комбинаторната структура на крайните множества [27].

## Езиците $L(V(S))$ и $L^*(V(S))$

На всяко свойство  $\Pi$  на стандартните множества отговаря свойство  $*\Pi$  на вътрешните множества, дефинирано покомпонентно.

Свойствата се изразяват като граматически вярна формула в някакъв език. Езикът  $L(V(S))$  се дефинира за да опише свойствата на елементите на суперструктурата  $V(S)$ . Азбуката на  $L(V(S))$  съдържа :

- променливи
- константи
- символи за функции
- връзките  $\&$ ,  $|$ ,  $\neg$
- кванторите  $\forall$ ,  $\exists$
- скоби

**Терм** е или проста променлива, или константа, или обикновена функция от термове. Под обикновена функция  $F : V(S)^k \mapsto V(S)$  разбираме такава функция, за която за всяко естествено  $n$  съществува естествено число  $m$  такова, че при произволен избор на елементите  $a_1, \dots, a_k \in V_n(S)$  е изпълнено  $F(a_1, \dots, a_k) \in V_m(S)$ .

Формулите от  $L(V(S))$  се дефинират индуктивно [27, 46]:

- ако  $t_1$  и  $t_2$  са термове, то  $t_1 = t_2$  и  $t_1 \in t_2$  също са формули;
- ако  $\varphi$  е формула, то и  $\neg\varphi$  е формула;
- $\varphi$  и  $\psi$  са формули, също както и

$$(\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \iff \psi), (\varphi \Rightarrow \psi)$$

- ако  $x$  е променлива,  $\varphi$  е формула и  $t$  е терм, който не съдържа  $x$ , то  $(\exists x \in t)\varphi$  и  $(\forall x \in t)\varphi$  са формули.

Аналогично се строи езика  $L^*(V(S))$  за суперструктурата  $V^*(S)$ . Формулите в  $L^*(V(S))$  се интерпретират като твърдения в  $V^*(S)$ . Изречение е формула без свободни променливи [27]. Ако ни е дадена формула в езика  $L(V(S))$  можем да построим неин  $*$ -аналог в  $L^*(V(S))$  по начина указан в [27]. Очевидно е, че  $*$ -аналога на една обикновена функция изобразява вътрешен елемент на  $V^*(S)$  във вътрешен елемент.

### Принцип на преноса

*Едно изречение  $\varphi$  в езика  $L(V(S))$  е вярно тогава и само тогава когато неговата  $*$ -трансформация  $*\varphi$  е вярно в  $L^*(V(S))$ .*

Доказателството на тази важна теорема може да се намери в работите [46, 27]. От нея се получава следното:

**Следствие 4.6 (Принцип на вътрешната дефиниция)** *Ако  $b, a_1, \dots, a_n$  са вътрешни елементи на  $V^*(S)$  и  $\psi$  е формула в езика  $L^*(V(S))$ , тогава множеството  $\{c \in b : \psi(c, a_1, \dots, a_n) = \text{true}\}$  е вътрешно.*

Според принципа на преноса, нестандартната версия на интервала  $[0, 1]$  е

$$*[0, 1] = \{x \in *R : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Ако ни е дадена крива  $\gamma$  в равнината, която е хомеоморфно изображение на  $[0, 1]$   $\gamma = \phi([0, 1])$ , то нейната нестандартна версия е

$$*R^2 \supset *\gamma = *\phi(*[0, 1]).$$

По-нататък, за простота, ще се условим за нестандартната версия на една непрекъсната функция да използваме същата буква без звезда, както е и в [2] и

в [27]. Тогава, ако  $X$  е компактно множество в равнината чийто контур  $\partial X$  е частично гладка крива, неговата нестандартна версия  $*X$  ще разглеждаме като обединение на съвкупността от монадите на вътрешните точки и нестандартната версия на контура. Оттук получаваме, че

$$\partial *X = *\partial X.$$

#### 4 Триангулации на Делоне и тяжната нестандартна версия

Да разгледаме три точки  $p(x_p, y_p)$ ,  $q(x_q, y_q)$  и  $r(x_r, y_r)$  в стандартната Евклидова равнина  $\mathbf{R}^2$ . Да означим с  $pqr$  предиката *обратно на часовниковата стрелка*:

$$pqr = \text{true} \iff |pqr| = \det \begin{pmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{pmatrix} > 0$$

Точката  $s$  е вътрешна точка за кръга, чийто контур минава през точките  $p, q$  и  $r$  тогава и само тогава, когато детерминантата

$$\det \begin{pmatrix} x_p & y_p & x_p^2 + y_p^2 & 1 \\ x_q & y_q & x_q^2 + y_q^2 & 1 \\ x_r & y_r & x_r^2 + y_r^2 & 1 \\ x_s & y_s & x_s^2 + y_s^2 & 1 \end{pmatrix}$$

има същия знак както и детерминантата  $|pqr|$ . Това означава, че движейки се от  $p$  през  $q$  до  $r$ , точката  $s$  остава отляво, ако движението е обратно на часовниковата стрелка и отдясно, ако движението е по часовниковата стрелка. Това твърдение формално се описва с предиката `InCircle`, въведен от Stolfi и Guibas, означаван обикновено с `pqrs` (вж. [19]).

Означаваме с  $\mathcal{D}(r)$  фамилията от всички подмножества на стандартната Евклидова равнина, които са:

- (1) ограничени ( без ограничение на общостта предполагаваме, че всички разглеждани множества лежат в кръг с предварително зададен радиус  $R$ , ако  $r > R$

ще смятаме, че  $\mathcal{D}(r) = \emptyset$ . );

(2) притежават поне три неколинеарни точки;

(3) може да се опише кръг с радиус  $r$  около всяка точка, такъв че никоя друга точка от множеството не лежи в него.

Всяко такова множество от фамилията  $\mathcal{D}(r)$  ще наречем *напълно  $r$ -отделимо*. Лесно се съобразява, че всяко множество от  $\mathcal{D}(r)$  е крайно, така че то притежава триангулация на Делоне. Това твърдение се описва формално чрез следната формула:

$$\begin{aligned} & (\forall r > 0)(A \in \mathcal{D}(r)) \\ \Rightarrow & ((\forall x \in A)(\exists p, q \in A)(\forall s \in A \setminus \{p, q, x\} \Rightarrow \neg spqx)). \end{aligned}$$

Нестандартната версия на тази формула е :

$$\begin{aligned} & (\forall^* r > 0)(A \in \mathcal{D}(*r)) \\ \Rightarrow & ((\forall x \in A)(\exists p, q \in A)(\forall s \in A \setminus \{p, q, x\} \Rightarrow \neg^* spqx)) \end{aligned}$$

Тогава от принципа на пренос следва съществуването на аналог на триангулацията на Делоне за "напълно отделими" точкови множества. Условието за отделимост е съществено. Ако построяването на аналог на триангулация на Делоне е възможно за всяко изброимо множество, то вземайки подходящо избрани точки, чиито абсциси са рационалните числа в интервала  $[0, 1]$  ние получаваме процедура за подреждане на рационалните числа по големина, което е невъзможно.

По-нататък ще разглеждаме нестандартното разширение на Евклидовата равнина  $\mathbb{R}^2$ .

Лесно се доказва следната

**Теорема 4.7** *Всяко напълно отделимо множество от  ${}^*\mathbb{R}^2$  е хиперфинитно.*



*Доказателство.* Нестандартният аналог на аксиомата на Архимед ни дава, че за всяко число от  $x \in {}^*\mathbb{R}$  съществува число  $n \in {}^*\mathbb{N}$  такова, че  $x < n$  - вж. Теорема 2.1 от [2]. Нека тогава

$$n > \frac{R}{{}^*r},$$

където  $n$  е безкрайно-голямо цяло число. Тогава ако  $A$  е напълно  ${}^*r$ -отделимо, то от елементарни съображения се вижда, че

$$|A| < (n+1)^2.$$

□

## 5 Методи за приближено построяване на скелета на дадено множество

### 5.1 Трансформация на разстоянията и средна ос

Да разгледаме  $n$ -мерното линейно пространство над полето над реалните числа или над пръстена на целите числа. Нека  $K \subset M$  е симетричен ограничен структурен елемент.

Нека  $A$  е произволно подмножество на  $M$ . Разглеждаме функцията  $d[A, K] : M \mapsto \mathbb{N}$  дефинирана по следния начин:

$$d[A, K](x) = \begin{cases} \max\{m \in \mathbb{N} : x \in A \ominus_{m-1} K\} & \text{ако } x \in A \\ 0 & \text{ако } x \notin A \end{cases}$$

Тук с  $A \ominus_n K$  бележим разликата  $A \setminus (K^{\oplus n})$ , вж. (3.5),  $A \ominus_0 K = A$ . Тази функция се нарича *трансформация на разстоянията на множеството  $A$  по отношение на структурния елемент  $K$*  (вж. [22]). Непосредствено се проверява, че при  $x \in A$ ,

$$d[A, K](x) = \max\{m : (K^{\oplus m-1})_x \subset A\}, (K^{\oplus 0}) = K. \quad (4.2)$$

Алгоритъмът в [42] за построяване на заобикаляща препятствия траектория използва именно трансформация на разстоянието на началната и крайната точ-



ка от траекторията, приложена върху дискретна мрежа покриваща свободната зона.

За трансформацията на разстоянието са в сила следните прости твърдения:

**Лема 4.8** *За  $x \in A$  е в сила равенството*

$$d[A, K](x) = 1 + \min_{z \in K \setminus \{0\}} d[A, K](x + z).$$

Тази лема е доказана в [22].

**Лема 4.9** *Нека  $A \subset \mathbb{R}^n$  е компактно и нека  $x \in A$ . Тогава*

$$d[A, B_r(0)](x) = \left\lceil \frac{d(x, \partial A)}{r} \right\rceil + 1.$$

Тук  $[s]$  означава цялата част на числото  $s$ .

*Доказателство.* Ако  $x$  е контурна точка за  $A$  твърдението е очевидно. Разглеждаме случая когато  $x$  е вътрешна точка за  $A$ . Да положим  $n = d[A, B_r(0)]$ . Съгласно (4.2)  $n = \max\{m : B_{r(m-1)}(x) \subset A\}$ . Това означава, че  $B_{rn}(x) \not\subset A$  и  $B_{r(n-1)}(x) \subset A$ . Тогава очевидно  $r(n-1) \leq d(x, \partial A) < rn$ . Сега като разделим тези неравенства на  $r$  получаваме  $\left\lceil \frac{d(x, \partial A)}{r} \right\rceil = n - 1$ , което доказва лемата.  $\square$

Дефинираме *средна ос на множеството  $A$  по отношение на структурния елемент  $K$*  по следния начин:

$$MA(A, K) = \{x \in A : d[A, K](x) \geq d[A, K](y) \text{ за всяко } y \in K_x\},$$

тоест средната ос  $MA(A, K)$  е съвкупността от екстремалните точки на трансформацията на разстоянията. В сила е следното твърдение [22] за представяне на средната ос в случай на дискретно изображение:

**Твърдение 4.10** Нека  $A \subset \mathbb{Z}^n$ , а  $K \subset \mathbb{Z}^n$  е ограничено и симетрично. Образоваме редицата множества  $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$  чрез равенството

$$S_n = A \ominus_n K \setminus (A \ominus_n K) \circ K.$$

Тогава

$$MA(A, K) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n. \quad (4.3)$$

Тъй като редицата  $\{S_n\}$  съдържа краен брой непразни членове, то горното обединение е крайно.

Сега ще докажем първия основен резултат свързан с приближеното построяване на скелета на дадено множество, а именно, че средната ос по отношение на кръга  $B_r(0)$  с център 0 и радиус  $r$  може да се разглежда като едностранно Хаусдорфово приближение на скелета. Ако множеството  $A$  има непразна вътрешност и контур, съставен от краен брой прости затворени криви, то приближението е двустранно. Този резултат се съдържа в следващите две теореми.

**Теорема 4.11** Нека  $A$  е компактно множество от  $\mathbb{R}^n$  с непразна вътрешност.

Тогава

$$SK(A) \subset MA(A, B_r(0)) \quad (4.4)$$

за всяко реално положително  $r$ .

*Доказателство.* Нека  $x \in SK(A)$ . Нека  $B_\rho(x)$  е максималния вписан в  $A$  кръг, т.е.  $\rho = d(x, \partial A)$ . Допускаме, че  $x \notin MA(A, B_r(0))$ . Тогава съществува точка  $y \in B_r(x)$  такава, че  $d[A, B_r(0)](x) < d[A, B_r(0)](y)$ . От Лема 4.9 следва, че

$$\left[ \frac{d(y, \partial A)}{r} \right] > \left[ \frac{d(x, \partial A)}{r} \right],$$

което пък означава, че  $\rho' = d(y, \partial A) \geq \rho + r$ . Тъй като разстоянието между  $x$  и  $y$  е по-малко или равно на  $r$ , елементарно следва, че  $A \supset B_{\rho'}(y) \supset B_\rho(x)$ , което противоречи с максималността на  $B_\rho(x)$ . Полученото противоречие показва, че  $x \in MA(A, B_r(0))$ .  $\square$

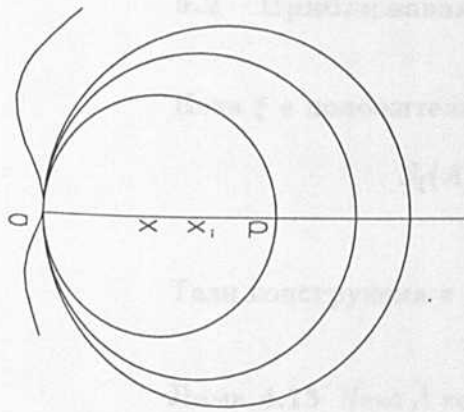
**Теорема 4.12** Нека  $A$  е компактно множество от  $\mathbb{R}^n$  с непразна вътрешност. Тогава

$$MA(A, B_r(0)) \cap \text{int}(A) \subset SK(A) \oplus B_r(0) \quad (4.5)$$

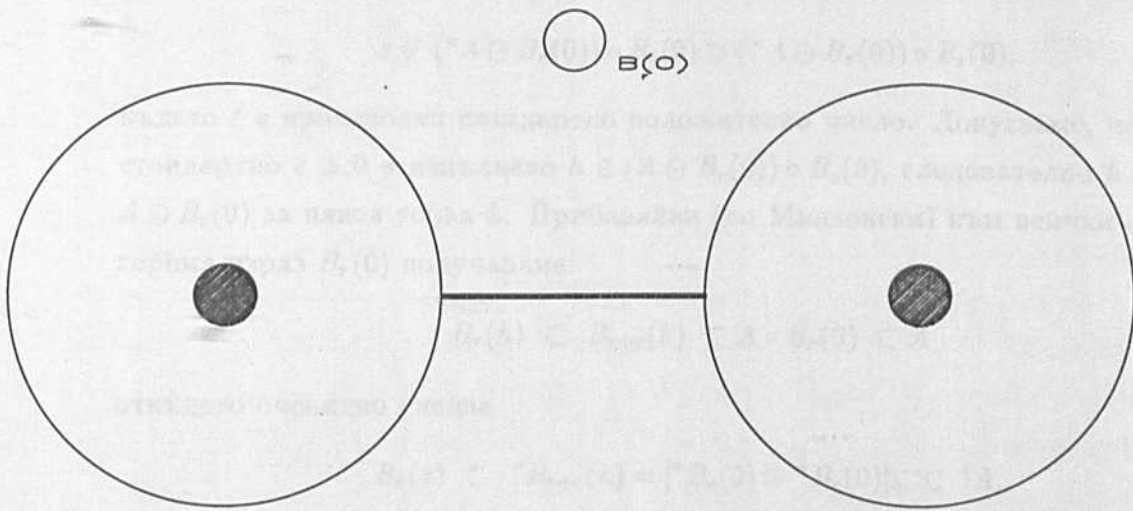
*Доказателство.* Нека  $x \in MA(A, B_r(0))$ . Оттук следва, че  $B_r(x) \subset A$ . Допускаме противното, т.е.  $SK(A) \cap B_r(x) = \emptyset$ . Нека за  $x \in A$  да въведем означението  $\rho(y) = d(y, \partial A)$ . Функцията  $\rho(y)$  е непрекъсната, даже е Липшицова с константа 1, (вж. [55]). От това, че  $SK(A) \cap B_r(x) = \emptyset$  следва, че можем да построим редица от вложени кръгове  $B_{\rho(x)}(x) \subset B_{\rho(x_1)}(x_1) \subset \dots \subset B_{\rho(x_i)}(x_i) \dots$  такива, че центровете им са вътрешни за кръга  $B_r(x)$ . Евентуално вземайки подредица, от елементарни геометрични съображения е ясно, че тези кръгове минават през една обща точка  $a \in \partial A$  и центровете им лежат на правата определена от точките  $a$  и  $x$ , като  $x$  е между  $a$  и  $x_i$ , а  $x_{i-1}$  е между  $x$  и  $x_i$ .

Нека лъчът с начало  $a$ , минаващ през  $x$  пресича контура  $\partial A$  в точка  $b$  и нека  $q$  е точката от отсечката  $[x, b]$  на разстояние  $r$  от точката  $x$ , вж. фиг. 4.4. Нека  $B_{\rho(p)}(p)$  е максималният кръг съдържащ  $B_{\rho(x)}(x)$ , съдържащ се в  $A$ , центърът на който лежи в затворената отсечка  $[x, b]$ . Тогава, според дефиницията за скелет,  $p \in SK(A)$ . Ако  $q$  е извън отсечката  $[x, b]$ , тоест ако  $q \notin A$  следва, че разстоянието между  $z$  и  $x$  е по-малко от  $r$ , тоест  $p \in SK(A) \cap B_r(x)$ , което е противоречие. Допускаме, че точката  $q$  е между  $x$  и  $z$ , като  $q \in A$ . Но тогава  $d(q, \partial A) = d(x, \partial A) + r$ . Като разделим това равенство на  $r$  и вземем цяла част, получаваме съгласно Лема 4.9 че  $d[A, B_r(0)](q) > d[A, B_r(0)](x)$ , което е в противоречие с условието че  $x$  принадлежи на средната ос. Следователно  $p$  е между  $x$  и  $q$ , тоест  $p \in SK(A) \cap B_r(x)$ , което е противоречие. С това теоремата е доказана.  $\square$

На фиг. 4.5 е изобразен пример който показва, че по-силното от 4.5 включване  $MA(A, B_r(0)) \subset SK(A) \oplus B_r(0)$  в общия случай не е вярно. Ако то би било вярно, тъй като от Теорема 4.11 следва, че  $SK(A) \subset MA(A, B_r(0)) \subset MA(A, B_r(0)) \oplus B_r(0)$ , то би следвало, че  $d_H(SK(A), MA(A, B_r(0))) \leq r$ , тоест средната ос би могла да се разглежда като Хаусдорфово приближение на скелета. Доказаните резултати показват обаче, че приближението е едностранно.



фиг. 4.4



фиг. 4.5 Пример на обект съставен от два кръга и отсечка. Скелетът на обекта се състои от центровете на двата кръга, докато средната ос по отношение на  $B_z(0)$  се състои от двата заштриховани кръга плюс свързващата отсечка от обекта.

## 5.2 Приближаване на скелета с помощта на диаграми на Вороной

Нека  $\xi$  е положително безкрайно-малко число. Дефинираме множеството

$$\mathcal{S}_\xi(A) = \bigcup_{r>0} \{(*A \ominus B_r(0)) \setminus (*A \ominus B_r(0)) \circ B_\xi(0)\}.$$

Тази конструкция е аналогична на дефинираната по-горе средна ос.

**Лема 4.13** *Нека  $A$  компактно свързано множество с непразна вътрешност и частично гладък контур. Тогава за всяко безкрайно-малко  $\xi > 0$  е изпълнено*

$$*\mathcal{S}_\xi(A) \subset SK(A)$$

*Доказателство.* Нека положим  $\Sigma_r = (*A \ominus B_r(0)) \setminus (*A \ominus B_r(0)) \circ B_\xi(0)$ . Нека  $z \in \Sigma_r$ . Тогава  $z \in *A \ominus B_r(0)$ , което означава, че  $h = {}^\circ z \in A \ominus B_r(0)$ . От друга страна от Теорема 1.9 следва, че

$$z \notin (*A \ominus B_r(0)) \circ B_\xi(0) \supset (*A \ominus B_r(0)) \circ B_\epsilon(0),$$

където  $\epsilon$  е произволно стандартно положително число. Допускаме, че за някое стандартно  $\epsilon > 0$  е изпълнено  $h \in (A \ominus B_r(0)) \circ B_\epsilon(0)$ , следователно  $h \in B_\epsilon(k) \in A \ominus B_r(0)$  за някоя точка  $k$ . Прибавяйки (по Минковски) към всички страни на горния израз  $B_r(0)$  получаваме:

$$B_r(h) \subset B_{r+\epsilon}(k) \subset A \circ B_r(0) \subset A \tag{4.6}$$

откъдето очевидно следва

$$B_r(z) \subset *B_{r+\epsilon}(k) = [*B_r(0) \oplus *B_\epsilon(0)]_k \subset *A,$$

откъдето

$$\begin{aligned} *B_r(0) \oplus *B_\epsilon(0) &\subset *A_{-k}, \\ *B_\epsilon(0) = (*B_\epsilon(0) \oplus *B_r(0)) \ominus *B_r(0) &\subset *A_{-k} \ominus B_r(0), \\ *B_\epsilon(k) &\subset *A \ominus B_r(0). \end{aligned}$$



Още от факта, че  $z \in {}^*B_\varepsilon(k)$  и от геометричната интерпретация на отварянията (1.20) следва, че

$$z \in ({}^*A \ominus B_r(0)) \circ B_\varepsilon(0),$$

което е противоречие. Следователно за всяко положително стандартно  $\varepsilon$  е изпълнено  $h \notin (A \ominus B_r(0)) \circ B_\varepsilon(0)$ . Допускаме сега, че  $B_r(h)$  не е максимален вписан кръг, т.е.

$$B_r(h) \subset B_{r+\varepsilon}(k) \subset A.$$

От тук аналогично на горните разсъждения следва, че  $h \in (A \ominus B_r(0)) \circ B_\varepsilon(0)$ , което е противоречие. То се дължи на допускането, че  $B_r(h)$  не е максимален вписан кръг, тоест точката  $h$  не е от скелета. С това лемата е доказана.  $\square$

Доказаната лема представлява нестандартен вариант на равенството на Lap-tuéjoul [55]. То пък от своя страна е непрекъснат аналог на равенство (4.3). Следващата теорема е основния резултат от тази глава. Тя е доказана за пръв път от M.Schmitt в работата [50]. Там е използвана сходимост по отношение на топологията на Фел. Настоящото доказателство е по-кратко и са избягнати някои неточности при разглеждането на граници и точки на сгъстяване за доказване сходимостта в топологията на Фел. Твърдението на Schmitt разглежда и т.нар. външен скелет, което на пръв поглед го прави по-общо, но на практика затруднява прилагането му при апроксимация на скелети.

**Теорема 4.14** *Нека  $X$  е компактно множество от  $\mathbb{R}^2$ , чийто контур  $\partial X$  е  $C^2$ -гладка затворена крива. Нека  $\{p_i\}_{i=1}^\omega$  е напълно отделимо множество от  ${}^*\partial X$  като разстоянието между две поредни точки  $p_i$  и  $p_{i+1}$ , ( $i \in {}^*\mathbb{N}$ ) лежащи върху една и съща свързана компонента на контура е безкрайно-малко (тук  $i$  се взема по модул броя на точките от дадената компонента). Разглеждаме триангулация на Делоне  $D(\{p_i\}_{i=1}^\omega)$  и нека  $S$  е множеството от центровете на описаните окръжности около триъгълниците от  $D(\{p_i\}_{i=1}^\omega)$  които са вътрешни точки за множеството  ${}^*X$  ( $S \subset \text{vert}(\text{Vor}(\{p_i\}_{i=1}^\omega))$ ). Тогава*

$${}^*S = SK(X).$$



*Доказателство.* Един възможен начин за избор на точките  $p_i$  е следния: Ако  $x = \phi(s)$ ,  $y = \psi(s)$ ,  $s \in [0, l]$ ,  $\psi(0) = \psi(l)$ ,  $\phi(0) = \phi(l)$  е параметричното представяне на контура  $\partial X$ , спрямо естествения му параметър, то  $p_i$  я вземаме с координати  $(\phi(\frac{i}{\omega}), \psi(\frac{i}{\omega}))$ .

1. Нека  $x$  е центъра на кръга описан около един триъгълник от триангулацията на Делоне. Без ограничение на общността можем да смятаме, че този триъгълник е  $\Delta p_1 p_2 p_m$ , като върховете му  $p_1$  и  $p_2$  са безкрайно - близки.

Да означим този кръг с  $B_{r'}(x)$ . Някоя монада на точка измежду  $p_i$  ( $i = 1, \dots, \omega$ ) не лежи в  $B_{r'}(x)$  поради свойствата на триангулацията на Делоне. Разглеждаме разбиване на контура  $\partial X = \bigcup_{i=1}^{\omega} Y_i$ ,  $p_i \in Y_i$ , Диаметърът на  $Y_i$  -  $\text{diam}(Y_i) = \xi_i \geq \psi > 0$  е безкрайно- малко. Нека  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m + 2d(x, {}^o x)$ , където  ${}^o x$  е стандартната част на  $x$ . Тогава  $B_{r'-\xi}(x)$  не съдържа точки измежду  $\partial^* X$ . Да означим  $r = d({}^o x, \partial X)$ , което е стандартно положително число. От елементарни геометрични съображения се вижда, че  $B_{r'-\xi}(x) \subset B_r({}^o x)$  следователно  $r \geq r' - \xi$ . Разглеждайки триъгълника  $\Delta x {}^o x p_2$  получаваме  $r \leq d({}^o x, p_2) < r' + d(x, {}^o x) < r' + \xi$ . От двете неравенства получаваме, че  $r \sim r'$ . От свойствата на разликата на Минковски имаме, че  ${}^o x \in X \ominus B_r(0)$ . Допускаме, че за всяко безкрайно-малко  $\eta$  е изпълнено:

$${}^o x \in (*X \ominus B_r(0)) \circ B_\eta(0) = (*X \ominus B_{r+\eta}(0)) \oplus B_\eta(0).$$

Тогава съществуват точки  $y$  и  $z$  от  $*\mathbf{R}^2$  такива, че

$$y \in *X \ominus B_{r+\eta}(0), \quad (4.7)$$

$$z \in B_\eta(0), \quad (4.8)$$

$${}^o x = y + z, \text{ тоест } x \sim y. \quad (4.9)$$

Тогава  $B_{r+\eta}(y) \subset *X$ . Също така от (4.9) следва

$${}^o x \in B_\eta(y), \text{ тоест } B_r({}^o x) \subset B_{r+\eta}(y). \quad (4.10)$$

Нека  $p = {}^o p_1 = {}^o p_2$ . От гладкостта на  $\partial X$  следва, че  $p \in \partial X$ . Тъй като  $d(x, p_2) = r' \sim r$  и от непрекъснатостта на разстоянието следва, че  $d({}^o x, p) = r$ . Следова-

телно

$$p \in B_r({}^{\circ}x) \subset B_{r+\eta}(y) \subset {}^*X.$$

Но  $p$  не може да бъде вътрешна за  $B_{r+\eta}(y)$ , защото би била вътрешна и за  ${}^*X$ . Тогава  $p \in \partial(B_{r+\eta}(y))$ , тоест  $B_{r+\eta}(y)$  се допира до  $B_r({}^{\circ}x)$  в  $p$ . От (4.9), от  $r \sim r'$  и от факта, че  $p_m \in B_{r'}(x)$  следва, че можем да изберем  $\eta$  достатъчно голямо, тъй че  $p_m$  да принадлежи на  $B_{r+\eta}(y)$  заедно със своя безкрайно-малка околност. Следователно  $p_m$  е вътрешна за  ${}^*X$ . Това противоречие показва, че съществува  $\eta$  такава, че

$${}^{\circ}x \notin ({}^*X \ominus B_r(0)) \circ B_\eta(0).$$

От Лема 4.13  ${}^{\circ}x \in SK(X)$ , което доказва първата част от твърдението.

2. Нека  $x \in SK(X)$ . Ще покажем, че  $x$  е от стандартната част на  $S$ .

Нека разгледаме нормалното уравнение на една права:  $x \cos \theta + y \sin \theta + \rho = 0$ . Да наречем две прави безкрайно-близки, ако  $\theta_1 \sim \theta_2$ ,  $\rho_1 \sim \rho_2$ . Тогава лесно се вижда, че ако са ни дадени две двойки пресичащи се прави, тъй че всяка права от едната двойка има безкрайно-близка от другата двойка, то пресечните им точки са безкрайно близки. Също така, ако са дадени две двойки точки от  ${}^*\mathbf{R}^2$   $a_1 \sim a_2$  и  $b_1 \sim b_2$ , като  $a_i \not\sim b_i$ , то правата през  $a_1$  и  $b_1$  е безкрайно близка до правата през точките  $a_2$  и  $b_2$ .

Нека  $V = B_r(x) \subset X$ , където  $r = d(x, \partial X)$  и нека  $A = V \cap \partial X$ . Вътрешността на  ${}^*V$  не съдържа точки от  $p_i$  ( $i = 1, \dots, \omega$ ). Да означим  $\tilde{B} = B_{\tilde{r}}(\tilde{x})$  кръга, чиято вътрешност е най-големия отворен кръг от  ${}^*\mathbf{R}^2 \setminus \{p_i\}_{i=1}^{\omega}$  за който съществува  $a \in A$ ,  $a \in V \subset \tilde{B}$ . Съществуването на  $\tilde{B}$  следва от лемата на Порн. Нека  $a$  е разположена върху  $\partial{}^*X$  между  $p_1$  и  $p_2$ . Тъй като  $V$  се допира, а не пресича контура  $\partial X$ , в околност на точката  $a$ , то допирателните през  $a$  към  $V$  и  $\partial X$  съвпадат. Ще покажем, че съществува кръг на Делоне с център  $x'$ , такъв че

$$x' \sim x \tag{4.11}$$

Очевидно е, че съществуват две възможности:

(i)  $V$  се допира до  $\partial X$  и в точка  $z$ .  $d(z, a)$  е стандартно положително число. Нека най - близката точка до  $z$  измежду  $p_i (i = 1, \dots, \omega)$  да е  $p_m$ . Тогава без ограничение на общостта можем да смятаме, че  $\tilde{V}$  е кръгът описан около  $\Delta p_1 p_2 p_m$ . Този кръг не съдържа във вътрешността си други точки измежду  $p_i (i = 1, \dots, \omega)$ , следователно  $\Delta p_1 p_2 p_m$  е триъгълник на Делоне. Допирателната през точката  $a$  към  $\partial X$  е безкрайно-близка до правата  $p_1 p_2$ , а пък правата  $p_1 p_m$  е безкрайно-близка до правата  $az$ . Тогава нормалата през  $a$  е безкрайно-близка до симетралата на точките  $p_1$  и  $p_2$ , а симетралата на  $a$  и  $z$  е безкрайно-близка до симетралата на точките  $p_1$  и  $p_m$ . Тогава от фигура 4.6 се вижда ясно, че  $x \simeq \tilde{x}$  и  $x'$  съвпада с  $\tilde{x}$ .

(ii)  $V$  е оскулачния кръг през точката  $a \in \partial X$ . Тук се изисква  $C^2$ -гладкост на контура  $\partial X$ .  $V' = B_{r'}(x')$  е кръга на Делоне през  $p_1$  и  $p_2$ . Тогава от първата част на доказателството, следва че можем да намерим стандартен максимален вписан кръг  $V''$  в  $X$ , който се допира до  $\partial^* X$  в стандартната част на точката  $p_1$ , която е именно точката  $a$ . Но от елементарната диференциална геометрия, тъй като  $V$  е оскулачния кръг през точката  $a \in \partial X$ , следва, че  $V$  и  $V''$  имат обща тангента през точката  $a$ , откъдето  $V$  и  $V''$  съвпадат. Следователно  $x \sim x'$ . С това теоремата е доказана.  $\square$

**Предположение 4.15** Нека са изпълнени условията на предната теорема. Построяваме върху контура на множеството  $X$  точките  $\{p_i\}_{i=1}^{\omega}$  по начина описан в началото на доказателството на теоремата. Тогава съществува константа  $C$ , зависеща само от геометрията на контура  $\partial X$ , така че

$$d(SK(X), \mathcal{S}) \leq \frac{C}{\omega}$$

Ако това предположение е вярно, то използвайки принципа на преноса и Теорема 4.5 директно получаваме, че скелетът има лебегова мярка 0.

Горният резултат дава възможност за ефективно приближено построяване на скелета на дадено множество. Изискването за гладкост на контура не е от съществено значение, защото в компютърната графика обикновено се работи с

полигонални приближения на обектите и точния скелет на приближението би могъл да се отличава много от точния скелет на истинския обект. Освен това, едно полигонално приближение винаги може да бъде интерполирано със сплайни до фигура с  $C^2$  - гладък контур. Преодолявайки някои технически трудности, може да се докаже и аналогичен резултат за пространства с по-висока размерност от 2, като там изискването ще бъде за  $C^3$  - гладкост на контура. Но този резултат не би имал голямо практическо приложение, тъй като за разлика от двумерния случай, там построяването на симплексизация на Делоне е комплицирано.

За построяване на скелет на равнинен обект с помощта на триангулации на Делоне е удобно да се използват итерационни алгоритми. Такива са например постъпковия алгоритъм, описан в [19], или известния в теорията на невронните мрежи *simulated annealing*- алгоритъм (вж. [9]). Идеята е да се добавят точки върху контура докато се получи стабилна форма на скелета.

Разгледаното в тази глава е първа стъпка в използването на нестандартния анализ при пренасяне на резултати от дискретната геометрия за изучаване на свойства на непрекъснати обекти. Нестандартния подход може да се окаже полезен при решаване и на други задачи, например задачата за рентгеновите проекции за произволно изпъкнало тяло, използвайки известните вече резултати за многостени [18], което ще бъде обект на бъдещи разглеждания.



## ГЛАВА 5

### Размити множества, морфологични оператори върху тях и приблизителна изпъкналост

Размитите множества са въведени за пръв път от Zadeh [62, 63] и намират широко приложение в системите за управление с елементи на изкуствен интелект, в социологията, психологията, лингвистиката и др. Още от самото си създаване, теорията на размитите множества се свързва с геометрията по естествен начин, а именно, създават се математически способности за дефиниране и изучаване на свойствата на неточно зададени геометрични обекти на основата на теорията на размитите множества. Още в първата работа на Zadeh [62] се поставя въпроса за въвеждане на понятието *изпъкнало размито множество*. Тази дефиниция се използва и в настоящата работа. По-нататък са въведени понятията *размита права*, *размита окръжност* [57], както и топологичното понятие *свързаност на размито множество*. Основната цел на настоящата глава е изучаването на размитата изпъкналост чрез морфологичните операции. В настоящата работа се систематизират известните досега дефиниции на размити



морфологични операции в светлината на изложения в първа глава формализъм на Heijmans [24] и на понятието *индикатор на включване* [59]. Въз основа на това се интерпретира в размит смисъл понятието *приблизителна изпъкналост*, като е дефиниран клас от функции наречени индикатори на изпъкналост. Стремешът на автора е да покаже, че индикаторът на изпъкналост формализира математически естествената човешка представа за изпъкналост, даващ ѝ количествено изражение.

Анализът на геометричната форма е от голяма важност за различни приложения, например при разпознаването на патологични обекти върху рентгенови или микроскопски снимки. Изпъкналите множества, и изобщо понятието изпъкналост е от голяма значимост при анализа на геометрични форми [24, 53]. Тъй като, както беше обсъждано в предните глави, компютърните изображения са дискретни – те се състоят от краен брой пиксели разположени в регулярна мрежа, в практическите задачи по разпознаване на образи и анализ на компютърни изображения понятието "изпъкналост" така както е дефинирано в учебниците по математика е неприложимо. Както споменава Serra [53], не е лесно да се дефинира какво точно означава изпъкнала дискретна съвкупност от пиксели. Освен това, поради шумове, оптически изкривявания и други причини, може да се получат изкривявания на формата на обектите. За разлика от компютрите, човек винаги може да прецени дали един обект изглежда изпъкнал или не. Затова се въвежда понятието *приблизителна изпъкналост*. Казваме, че една величина е мярка за приблизителна изпъкналост, или по-просто *индикатор на изпъкналост* ако тя дава числов израз на факта, че един обект е достатъчно изпъкнал или не.

Понятието *дърво на вдлъбнатост* въведено от Borgefors и Sanniti di Baja [10], дава просто йерархично описание на формата на изследвания обект, но не може да даде количествена оценка за изпъкналостта. Подходът на Held и Abe [25] е базиран на геометрически вероятности. Въз основа на него са получени мерки за приблизителна изпъкналост на равнинни фигури, зададени с техния контур.

В настоящата работа се дефинират индикатори на изпъкналост, които могат

да се прилагат както върху полутонови, така и върху черно-бели изображения, като обектите могат да бъдат както дискретни (пикселно зададени), така и фигури, зададени чрез своя контур. Това прави тези индикатори приложими щ в томографията и електронно - микроскопските изследвания при анализа на клетъчни и други биологични структури, включително при разпознаване на патологични туморни и други образования.

Като допълнителен резултат от изучаването на свойствата на размитите морфологични операции е разглеждането на диференцируеми размити функции, като са открити и преодоляни съществени неточности в работата на Puri и Ralescu [45]. Обект на по-нататъшни разглеждания е скелетизацията на размити множества и анализа на свързаността на размити множества използвайки размити морфологични операции.

## 1 Основни понятия и твърдения

Да разгледаме множество  $U$ , което наричаме *универсално*. Едно разрито подмножество  $A$  на универсалното множество  $U$  се отъждествява с произволна функция  $\mu_A : U \mapsto [0, 1]$ , която се нарича *характеристична функция на  $A$* , а  $\mu_A(x)$  се нарича *степен на принадлежност на точката  $x$  към  $A$* . Обичайните подмножества на  $U$  могат да се разгледат като частен случай на размити множества, при които характеристичната функция взема стойности само в крайните точки на интервала  $[0, 1]$ .

Размитите множества имат и следната интерпретация:

- В анализа на изображения стойността  $\mu_A(x)$  може да бъде интерпретирана като степента на сивото, или като цвета на точката  $x$ .
- В разпознаването на образи  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$  може да се разглежда като вероятността точката  $x$  да принадлежи на сцената, а не на фона на изображението.

Нека сега разгледаме две функции  $f$  и  $g$ , вземащи стойности в интервала  $[0, 1]$ . Тогава  $f \oplus g$  взема стойности в  $[0, 2]$ , не задължително в  $[0, 1]$ . Това понякога може да създаде неудобства при анализа на полутонови изображения с помощта на полутоновите морфологични оператори. Тези неудобства могат да бъдат избегнати чрез дефинирането на размити морфологични оператори. За дефинирането им, обаче, се налага да бъдат конструирани размити аналози на обичайните теоретико - множествени операции.

Обичайните теоретико-множествени операции и релации се обобщават естествено за размити множества по следния начин:

- Казваме, че  $A \subset B$ , ако  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \forall x \in \mathcal{U}$ . Тази релация ще наричаме включване в смисъл на Заде.
- Казваме, че  $A \cap B = C$ , ако  $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$  за всяко  $x \in \mathcal{U}$ .
- Казваме, че  $A \cup B = C$ , ако  $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$  за всяко  $x \in \mathcal{U}$ .
- Допълнение на  $A$  наричаме множеството  $A^c$  с характеристична функция  $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$  за всяко  $x \in \mathcal{U}$ .

Празно размито множество  $\emptyset$  се нарича множеството с характеристична функция константата 0, а универсалното множество  $\mathcal{U}$  се отъждествява с размитото множество с характеристична функция константата 1. Точна горна и точна долна граница на система размити множества  $\{H_i : i \in I\}$  се дефинират като:

$$U = \bigvee_{i \in I} H_i, \quad \mu_U(x) = \sup \{ \mu_{H_i}(x) : i \in I \}, \quad (5.1)$$

$$L = \bigwedge_{i \in I} H_i, \quad \mu_L(x) = \inf \{ \mu_{H_i}(x) : i \in I \}. \quad (5.2)$$

Точна горна граница на система от две множества е тяхното обединение, а точна долна граница е тяхното сечение. По този начин съвкупността  $\mathcal{L}$  от размити подмножества на  $\mathcal{U}$  се превръща в Булева решетка. Може да се дефинира и група  $T = \{ \tau_a : A \in \mathbf{R}^n \}$  от автоморфизми - транслации  $\tau_a(X)$ ,  $\mu_{\tau_a(X)}(y) = \mu_X(y - a)$ . Представлява проблем, обаче намирането на супремум-генериращо семейство

размити множества. За дефинирането на двойки спрегнати дилатации и ерозии помага понятието *индикатор на включването* [58].

Индикатор на включването се нарича функцията  $I : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mapsto [0, 1]$  със следните 8 свойства:

1.  $I(A, B) = 0 \iff \{x : \mu_A(x) = 1\} \cap \{x : \mu_B(x) = 0\} \neq \emptyset$ .
2. От  $B \subset C$  следва, че  $I(A, B) \leq I(A, C)$ .
3. От  $B \subset C$  следва, че  $I(C, A) \leq I(B, A)$ .
4.  $I(A, B) = I(\tau_x(A), \tau_x(B))$  за всяко  $x$ ,  $I(A, B) = I(-A, -B)$ .
5.  $I(A, B) = I(B^c, A^c)$ .
6.  $I(\bigvee_{i \in J} B_i, A) = \inf_{i \in J} I(B_i, A)$ .
7.  $I(A, \bigwedge_{i \in J} B_i) = \inf_{i \in J} I(A, B_i)$ .
8.  $I(A, \bigvee_{i \in J} B_i) \geq \sup_{i \in J} I(A, B_i)$ .

В работите [58, 59] броят на аксиомите е 9, но в нашата работа сме изхвърлили първата от аксиомите за удобство. Освен това, прави впечатление, че така предложената система аксиоми не е независима. Така например, свойство 3 следва от свойства 2 и 5, а пък свойство 6 може да бъде получено от свойства 5 и 7. В работите [58, 59] в свойства 6, 7 и 8 фигурират крайни обединения и сечения. Тези аксиоми в нашия случай са променени, за да могат получените морфологични оператори да се впишат във формализма, изграден въз основата на теорията на пълните решетки, цитиран в началото на работата.

Нека разгледаме следните функции:

$$I_\lambda(A, B) = \inf_{x \in \mathcal{U}} \min[1, \lambda(\mu_A(x)) + \lambda(1 - \mu_B(x))], \quad (5.3)$$

където  $\lambda : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  е вдлъбнатата, строго монотонно намаляваща функция, за



която  $\lambda(0) = 1$  и  $\lambda(1) = 0$  и е непрекъсната в крайните точки, и

$$I_*(A, B) = \inf_{x \in U} \max[\mu_B(x), 1 - \mu_A(x)], \quad (5.4)$$

**Теорема 5.1** *Условията 1-8 се удовлетворяват от функциите  $I_\lambda$  и  $I_*$ .*

*Доказателство.* За верността на твърдението за  $I_\lambda$  вж. работите [58, 59]. Тук ще докажем твърдението и за  $I_*$ . Свойство 1, свойства 2 и 3, както и свойства 4 и 5 следват непосредствено. Ще докажем свойство 7. Свойства 6 и 8 следват аналогично. За краткост на записа ще изпускате индекса  $*$ .

$$\begin{aligned} I(A, \bigwedge_i B_i) &= \inf_x \max(\inf_i \mu_{B_i}(x), 1 - \mu_A(x)) = \\ &= \inf_x \{\inf_i [\max(\mu_{B_i}(x), 1 - \mu_A(x))]\} = \\ &= \inf_i \{\inf_x [\max(\mu_{B_i}(x), 1 - \mu_A(x))]\}. \end{aligned}$$

Предпоследното от равенствата следва от равенството

$$\max(\inf_i a_i, c) = \inf_i \max(a_i, c),$$

изпълнено за произволни реални числа  $a_i$  и  $c$ , което представлява обобщение на закона на Де Морган. Комутативността на двата инфимума, от която следва последното равенство е очевидна. С това свойство 7 е доказано.  $\square$

Очевидно е, че  $I_\lambda$  притежава свойството : от  $A \subset B$  следва  $I_\lambda(A, B) = 1$ . Ако  $\lambda(x) = 1 - x$ , в сила е и обратното твърдение. По-нататък ще бележим с  $I^*$  индикатора  $I_{1-x}$ . Индикаторът  $I_*$  притежава свойството, че от  $I_\lambda(A, B) = 1$  следва  $A \subset B$ .

Индикаторите, зададени с аксиоми 1 - 8 могат да се разглеждат като *лингвистични променливи*, вж. [63, 64], описващи понятието  $A \subset B$ . Понятието *индикатор* е полезно при разпознаването на образи поради следната причина: Нека наблюдаваме обектите  $A$  и  $B$ , като  $A \subset B$ . Обаче поради шум и други неточности в системите за компютърно зрение, ние вместо  $A$  и  $B$  наблюдаваме изкривени обекти  $A'$  и  $B'$ , за които може да не е изпълнено условието  $A' \subset B'$ .

Товагава индикаторът  $I(A', B')$  дава оценка за степента на принадлежност на  $A'$  в  $B'$ . Непосредствено се вижда, че ако  $I(\cdot, \cdot)$  е индикатор на включване, то и всяка негова положителна степен  $[I(\cdot, \cdot)]^\alpha$  също е индикатор. Ако  $\alpha < 1$  новополучения индикатор описва по-силна размита релация от  $I$ , докато ако  $\alpha > 1$  релацията се отслабва [63].

Както лесно се забелязва, въведените примери на функции - индикатори имат следното свойство: ако  $A$  и  $B$  са неразмита множества, то  $I(A, B)$  взема стойности само 0 и 1. Затова, в случая на неразмита обекти е полезно да се въведе индикаторна функция, свързана с топологичните и метричните свойства на разглежданите обекти. Това е полезно при работа с черно-бели (бинарни) изображения.

И така ще разгледаме Булевата решетка, съставена от ограничените затворени множества, съдържащи се в кълбото  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ , като допълнението се задава

$$A^c = B_R(0) \setminus A,$$

точната горна граница чрез равенството

$$\bigvee \{H_i : i \in I\} = \text{cl} \left( \bigcup_{i \in I} H_i \right),$$

а точната долна граница като сечение. Разглеждането на обекти, вписани в даден кръг е оправдано, защото в системите за разпознаване работим с ограничени обекти принадлежащи на една сцена, която можем да смятаме че лежи в кръг с достатъчно голям радиус. И така нека за обектите от дадената решетка да въведем индикатора

$$I^H(A, B) = h(\rho(A, B)),$$

където  $h$  е непрекъснатата намаляваща функция, за която  $h(0) = 1$  и  $h(x) = 0$  при  $x \geq R$ . За дефинирането на функцията  $\rho$  ни помага дефиницията на Хаусдорфовото разстояние, а именно

$$\rho(A, B) = \inf \{ \varepsilon : A \subset B \oplus B_\varepsilon(0) \}.$$

По тези причини въведеният индикатор ще наречем едностранен Хаусдорфов индикатор.



Непосредствено се вижда, че функцията  $I^H$  удовлетворява индикаторните аксиоми 1, 2, 3 и 4. Също така лесно се вижда още, че  $I^H$  удовлетворява аксиоми 6 и 8, като осмата аксиома се удовлетворява като равенство. Петата аксиома не е обаче в сила, а вместо аксиома 7 е в сила неравенството  $I^H(A, \bigwedge_i B_i) \leq \inf_i I^H(A, B_i)$ .

С помощта на понятието *индикатор на включването*, за всяко разमितо множество  $A$  ще дефинираме оператор  $\varepsilon_A$  с равенството:

$$\mu_{\varepsilon_A(B)}(x) = I(\tau_x(A), B), \quad (5.5)$$

и оператор  $\delta_A$  с равенството

$$\delta_A(B) = (\varepsilon_{-A}(B^c))^c. \quad (5.6)$$

Оттук нататък, ако е дадено разमितо множество  $A$ , за краткост ще означаваме  $A(x)$  вместо  $\mu_A(x)$ .

**Теорема 5.2** Дефинираните чрез (5.5) и (5.6) операции са съответно ерозия и дилатация ако индикаторът  $I$  който ги поражда удовлетворява осемте аксиоми.

Доказателството следва директно от дефиниционните равенства (5.5) и (5.6) и аксиоми 5 и 7.

**Теорема 5.3**  $\delta_A(B) = \delta_B(A)$ .

*Доказателство.* От дефиницията на дилатация имаме

$$(\delta_B(A))(x) = 1 - (\varepsilon_{-B}(A^c))(x) = 1 - I(\tau_x(-B), A^c).$$

От аксиомите за индикаторите получаваме директно веригата равенства:

$$I(\tau_x(-B), A^c) = I(A, \tau_x(-B)^c) = I(A, \tau_x(-B^c)) =$$

$$I(\tau_{-x}(A), -B^c) = I(-\tau_{-x}(A), B^c) = I(\tau_x(-A), B^c)$$

от която следва директно верността на теоремата.  $\square$

**Теорема 5.4** Дефинираните чрез  $I^*$  оператори за дадено и разрито множество  $A$  образуват спрегната двойка  $(\varepsilon_A, \delta_A)$

Скица на доказателството на това твърдение е дадена в работата [58].

**Теорема 5.5** От дефинираните чрез  $I_*$  оператори при дадено разрито множество  $A$   $\delta_A$  винаги е дилатация, а  $\varepsilon_A$  винаги е ерозия, обаче не винаги двойката  $(\varepsilon_A, \delta_A)$  е спрегната.

*Доказателство.* От теорема 5.2 следва директно, че  $\varepsilon_A$  е ерозия, а  $\delta_A$  е дилатация. В [44] е даден пример, показващ, че не винаги  $(\varepsilon_A, \delta_A)$  е спрегната двойка. Примера който ще разгледаме е прост – да разгледаме както в [44] размитите множества  $A$  и  $X$ , такива че  $A(0) = 0.5, X(0) = 0.75$  и  $A(y) = X(y) = 0$  за всяко  $y \neq 0$ . Да означим с  $C$  множеството  $\varepsilon_A(\delta_A(X))$ . Тогава както е показано в [44]  $C(0) = 0.5 < X(0)$ , което означава, че  $\varepsilon_A \delta_A$  не е затваряне, което пък от своя страна означава, че двойката  $(\varepsilon_A, \delta_A)$  не е спрегната.  $\square$

**Забележка 5.6** В работата [11] се разглеждат и размити морфологични оператори, получени от индикатора на включване

$$I^B(A, B) = \int_0^1 \inf_{x \in [A]_\alpha} B(x) d\alpha.$$

Обаче този индикатор, в общия случай удовлетворява аксиомите 6 и 7 като неравенства, което следва непосредствено от свойствата на Лебеговия интеграл. Така построената ерозия, в общия случай няма да комутира с инфимума, т.е. тази операция не е ерозия според нашата дефиниция. Същото се отнася и за операциите, построени от индикатора  $I^H$ . В работата [11] се разглежда и индикатора на Kosko. Той е дефиниран от Kosko за размити подмножества на крайното множество  $S \subset Z^n$ , Този индикатор се използва преди всичко в анализа на компютърни изображения тъй като те се представят математически чрез крайни множества и функции с крайна дефиниционна област. Индикаторът

на Kosko в класическата си форма се записва като

$$I^K(A, B) = 1 - \frac{\sum_{x \in S} \max(0, A(x) - B(x))}{\sum_{x \in S} A(x)}.$$

Ние дефинираме негов непрекъснат аналог за  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

$$I^K(A, B) = 1 - \frac{\int_{\mathcal{U}} \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) dx}{\int_{\mathcal{U}} \mu_A(x) dx}.$$

Той също не е подходящ за генериране на морфологични операции, понеже не удовлетворява аксиоми 6 и 7. Но тъй като е лесен за пресмятане и не е чувствителен към шум, както ще видим по късно, индикаторът на Kosko ще бъде използван при конструирането на мерки за приблизителна изпъкналост.

Ако  $A$  и  $B$  са две измерими неразмити множества от  $\mathbb{R}^n$  индикаторът на Kosko може да се запише

$$I^K(A, B) = 1 - \frac{\sigma(A \setminus B)}{\sigma(A)},$$

където  $\sigma$  означава лебеговата мярка. В този случай, индикаторът на се пресмята по лесно от едностранния Хаусдорфов индикатор  $I^H$ . При разглеждане на въпросите за приблизителна изпъкналост ще използваме квадрата на  $I^K$ .

## 2 Размити изпъкнали множества и диференцируемост на размити функции

В тази част разглеждаме операторите, дефинирани с индикатора  $I_*$  в съвкупността от размити множества над  $\mathbb{R}^n$ . Лесно се проверява, че съответните дилатация и ерозия имат вида:

$$(\delta_A(B))(x) = \sup_{b \in \mathbb{R}^n} \min(A(b), B(x - b)), \quad (5.7)$$

$$(\varepsilon_A(B))(x) = \inf_{b \in \mathbb{R}^n} \max(B(b), 1 - A(b - x)). \quad (5.8)$$

Нека  $A$  е размито множество, а  $\alpha \in (0, 1]$ . С  $[A]_\alpha$  бележим  $\alpha$ -отреза на  $A$ :

$$[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : A(x) \geq \alpha\}. \quad (5.9)$$

Тогава дилатацията се представя като

$$(\delta_A(B))(x) = \sup\{\alpha : x \in [A]_\alpha \oplus [B]_\alpha\}. \quad (5.10)$$

В работата [62] се въвежда понятието *изпъкнало размито множество*:

Размитото множество  $A$  се нарича *изпъкнало*, ако

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2))$$

за всеки  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$  и  $\lambda \in [0, 1]$ .

За пълнота привеждаме с доказателство следната проста

**Лема 5.7** *Едно размито множество е изпъкнало тогава и само тогава когато неговите  $\alpha$ -отреси са изпъкнали при  $\alpha \in (0, 1]$ .*

*Доказателство.* Нека  $A$  е изпъкнало. Нека  $\alpha \in (0, 1]$  е такова, че  $[A]_\alpha \neq \emptyset$ . Нека  $x_1, x_2 \in [A]_\alpha$ . Тогавата  $A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \alpha$ .

Обратно, нека  $[A]_\alpha$  е изпъкнало за всяко  $\alpha \in (0, 1]$ . Нека  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ . Нека  $\alpha = \min(A(x_1), A(x_2))$  и  $0 < \lambda < 1$ . Тогавата  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in [A]_\alpha$ , т.е.

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \alpha = \min(A(x_1), A(x_2)),$$

което показва, че  $A$  е изпъкнало.  $\square$

**Лема 5.8** *Ако  $f_i : \mathbf{R}^n \mapsto [0, 1]$  са полунепрекъснати отгоре за  $i \in I$ , то и  $\inf_i f_i$  е също полунепрекъсната отгоре.*

За доказателството виж Теорема 10.13 от [24] или книгата на Рудин [6].

Разглеждаме пространство  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$  от размити множества  $A$  със следните свойства:

1. Функцията  $\mu_A$  е полу непрекъснатата отгоре с ограничен носител.

2.  $A$  е изпъкнало.

3.  $A$  е нормално, т. е.  $A(x_0) = 1$  за някое  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ .

Въвеждаме и фамилията  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  от размити множества  $A$ , такива че са изпълнени условията 1 и 3 от предната дефиниция, и следователно  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ .

От полунепрекъснатостта на характеристичната функция на множеството  $A \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  следва, че  $[A]_\alpha$  е компактно в  $\mathbf{R}^n$  за всяко  $\alpha \in (0, 1]$ , а също така е компактно и множеството

$$[A]_0 = \text{cl} \left( \bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]_\alpha \right)$$

- вж. [13]. Това не е забелязано в работата [45] и там условието за компактност на отрезите е наложено явно, но там не се поставя условието характеристичната функция да е с ограничен носител.

В  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  въвеждаме *сбиране* и *умножение с неотрицателен скалар* по следния начин:

$$A + B = \delta_A(B), \quad (5.11)$$

$$(\lambda A)(x) = \begin{cases} A(\frac{1}{\lambda}x) & \lambda \neq 0, \\ 0 & \lambda = 0, x \neq 0, \\ 1 & \lambda = 0, x = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Непосредствено се проверява, че

$$0A = \Omega, \quad \Omega(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

и за всяко  $B \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$  имаме  $B + \Omega = B$ .

В  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  можем да въведем метрика [45, 13]

$$d(A, B) = \sup_{1 \geq \alpha \geq 0} d_h([A]_\alpha, [B]_\alpha), \quad (5.13)$$



където  $d_h$  е дефинираното чрез (1.32) Хаусдорфово разстояние. Използвайки пълнотата на пространството от непразните компактни множества, снабдено с Хаусдорфовата метрика [36], лесно се проверява че  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  е също пълно метрично пространство с метрика  $d$  [13].

**Забележка 5.9** В работата [45] метриката е дефинирана чрез равенството

$$d(A, B) = \sup_{1 \geq \alpha > 0} d_h([A]_\alpha, [B]_\alpha). \quad (5.14)$$

Да разгледаме размитите множества  $X$  и  $Y$  от Евклидовата равнина с характеристични функции

$$X(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{ако } q \neq 0 \text{ или } p < 0 \\ 1/(p+1) & q = 0, p \geq 0 \end{cases},$$

$$Y(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{ако } p \neq 0 \text{ или } q < 0 \\ 1/(q+1) & p = 0, q \geq 0 \end{cases}.$$

Непосредствено се проверява, че  $X$  и  $Y$  са изпъкнали размити множества, а техните отрезки представляват съответно затворени отсечки от координатните оси. Също така елементарно се проверява, че характеристичните функции  $X()$  и  $Y()$  са полунепрекъснати отгоре, т.е. тези множества принадлежат на разглеждания в [45] клас. Този клас, според същата работа, представлява пълно метрично пространство с въведената по-горе метрика. За хаусдорфовото разстояние между отрезите имаме  $d_h([X]_\alpha, [Y]_\alpha) = 1/\alpha - 1$ . Тогава  $d(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} d_h([X]_\alpha, [Y]_\alpha) = \infty$ , което показва, че в работата [45] е допусната неточност. В работата на Foster [17] също е допусната тази неточност, като авторът се е позовал механично на дефинициите в статията на Puri и Ralescu [45]. В нашата работа това противоречие е избегнато, като се разглеждат само размити множества, чиято характеристична функция е с ограничен носител.

**Забележка 5.10** В случая на размити множества с неограничен носител и компактни отрезки, вместо разстоянието дефинирано чрез равенство (5.14) може да се въведе разстоянието

$$D(A, B) = \int_0^1 g(\alpha) d_h([A]_\alpha, [B]_\alpha) d\alpha, \quad (5.15)$$



където тегловната функция  $g$  е строго растяща непрекъсната функция за която  $g(0) = 0$ . Класът размити множества, за който метриката  $D$  е дефинирана е значително по-широк от класа за който е дефинирана метриката  $d$ . За потискане на влиянието на  $\alpha$ -отрезите при малки  $\alpha$ , от практически съображения са за предпочитане тегловни функции, които бързо клонят към 0 когато аргументът им клони към 0, като например функцията  $g(\alpha) = e^{-1/\alpha}$ .

Ще покажем, че дефинираната чрез равенство (5.15) функция е наистина разстояние. Неравенството на триъгълника следва непосредствено от неравенството на триъгълника за Хаусдорфовото разстояние. Очевидно е, също така, че функцията  $D(A, B)$  е неотрицателна. Остава да се покаже, че от  $D(A, B) = 0$  следва, че множествата  $A$  и  $B$  съвпадат. И така, нека  $D(A, B) = 0$  и  $A \not\equiv B$ . Тогава, без ограничение на общността, да разгледаме точката  $x$  за която  $0 \leq B(x) < \beta = A(x)$ . От равенството  $D(A, B) = 0$  следва, че  $[A]_\alpha \equiv [B]_\alpha$  е вярно за почти всяко  $\alpha$  от интервала  $(0, 1]$  и в частност за елементите на някаква редица  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\gamma_i < \beta$ , която клони към  $\beta$ . Тогава  $x \in [A]_\beta \subset [A]_{\gamma_i} \equiv [B]_{\gamma_i}$ , тоест  $B(x) \geq \gamma_i$ . С граничен преход получаваме  $B(x) \geq \beta$ , което е противоречие, тоест доказахме че  $A \equiv B$ , тоест функцията  $D$  наистина е разстояние.

**Теорема 5.11** Ако  $A$  и  $B$  принадлежат на  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , то  $[A + B]_\alpha = [A]_\alpha \oplus [B]_\alpha$ .

*Доказателство.* От (5.7) непосредствено следва, че

$$(A + B)(x) = \sup\{\alpha : x \in [A]_\alpha \oplus [B]_\alpha\}.$$

Нека  $x \in [A]_\alpha \oplus [B]_\alpha$ . Тогава съществува  $\beta \geq \alpha$  такава, че  $(A + B)(x) = \beta$ , т.е.  $x \in [A + B]_\beta \subset [A + B]_\alpha$ , т.е.

$$[A]_\alpha \oplus [B]_\alpha \subset [A + B]_\alpha \tag{5.16}$$

Обратно, нека  $x \in [A + B]_\alpha$ , като  $(A + B)(x) = \alpha$ .

$$(A + B)(x) = \sup\{\beta : x \in [A]_\beta \oplus [B]_\beta\} \tag{5.17}$$

Разглеждаме строго монотонно растяща редица  $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots}$  клоняща към  $\alpha$ .  $\alpha_i$  не е горна граница в (5.17), следователно за всеки номер  $i$  съществуват  $x_i \in \mathbb{R}^n$  и  $y_i \in \mathbb{R}^n$  такива, че

$$x = x_i + y_i, \quad A(x_i) \geq \alpha_i, \quad B(y_i) \geq \alpha_i.$$

Редицата  $\{x_i\}$  е ограничена, защото  $x_i \in [A]_{\alpha_1}$ , което е компактно. Тогава можем да изберем сходяща подредица  $\{x_{i_k}\}$  и нека означим с  $x_0$  нейната граница. Но тогава съществува и границата

$$y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{i_k} = x - \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k}.$$

Тогава  $x = x_0 + y_0$ , а от полунепрекъснатостта отгоре на  $\mu_A$  и  $\mu_B$  следва, че  $A(x_0) \geq \alpha$  и  $B(x_0) \geq \alpha$ , тоест  $x \in [A]_{\alpha} \oplus [B]_{\alpha}$ . Оттук следва, че

$$[A]_{\alpha} \oplus [B]_{\alpha} \supset [A+B]_{\alpha} \quad (5.18)$$

От двете включвания (5.16) и (5.18) следва верността на теоремата.  $\square$

**Следствие 5.12** Ако  $A$  и  $B$  принадлежат на  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , то и  $A+B$  принадлежи на  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ .

*Доказателство.* Нормалността на  $A+B$ , при положение, че  $A$  и  $B$  са нормални следва очевидно от предната теорема и дефиницията на сума на Минковски в  $\mathbb{R}^n$ . Ще покажем, че  $\mu_{A+B}$  е полунепрекъснатата отгоре.

Допускаме противното. Тогава, за някое  $x \in \mathbb{R}^n$  съществува  $t \in (0, 1)$ ,  $t > \mu_{A+B}(x)$  такава, че за всяка околност  $U$  на  $x$  в  $\mathbb{R}^n$  съществува точка  $y$  такава че  $\mu_{A+B}(y) \geq t$ . Да разгледаме редица от вложени околности на  $x$ , във всяка от които съществува точка  $y_i$  такава че  $\mu_{A+B}(y_i) \geq t$ , тоест  $y_i \in [A+B]_t$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ . Но според предната теорема  $y_i = u_i + v_i$  където  $u_i \in [A]_t$ , а  $v_i \in [B]_t$ . От компактността на  $[A]_t$  и  $[B]_t$  следва, че можем да изберем редица индекси  $\{i_k\}$  такава, че редиците от точки  $u_{i_k}$  и  $v_{i_k}$  са сходящи съответно към точки  $u \in A$  и  $v \in B$  и  $x = u + v$ . Тогава  $x \in [A+B]_t$  което противоречи с  $t > \mu_{A+B}(x)$ .

Това противоречие доказва твърдението.  $\square$

Съгласно [13]  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  снабдено с метриката  $d$  е пълно метрично пространство.

**Забележка 5.13** В доказателството на теоремата 5.11 и на следствието никъде не се използва нормалността на множествата от класа  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ .

**Следствие 5.14** Нека  $A$ ,  $B$  и  $C$  са размити множества от  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ . Тогава от  $A + C = B + C$  следва, че  $A = B$ .

**Следствие 5.15** Нека  $A$ ,  $B$  и  $C$  са размити множества от  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ . Тогава  $d(A + C, B + C) = d(A, B)$ .

Разглеждаме множеството  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ . Следвайки познатата конструкция на Rådström (вж. [45]), ще изградим линейно нормирано пространство. В  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$  въвеждаме релация на еквивалентност съгласно теорията на Rådström [45]

$$(A, B) \sim (A', B') \iff A + B' = B + A'.$$

Означаваме с  $B$  факторизираното пространство по отношение на тази релация. Ще покажем, че  $B$  е пълно линейно нормирано пространство. Да означим с  $\langle A, B \rangle$  съвкупността от елементи на  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$  еквивалентни на  $(A, B)$ . Сума на два елемента на  $B$  дефинираме чрез равенството

$$\langle A, B \rangle + \langle C, D \rangle = \langle A + C, B + D \rangle.$$

Противоположен елемент на  $\langle A, B \rangle$  наричаме  $\langle B, A \rangle$ . Произведението със скалар  $c \in \mathbf{R}$  се задава като

$$c \langle A, B \rangle = \begin{cases} \langle cA, cB \rangle & c \geq 0, \\ \langle (-c)B, (-c)A \rangle & c < 0 \end{cases}$$

Нулев елемент на  $B$  е  $\langle A, A \rangle$ , защото

$$\langle A, A \rangle + \langle B, C \rangle = \langle A + B, A + C \rangle = \langle B, C \rangle$$

тъй като  $(A + B, A + C) \sim (B, C)$ .

Зависимостите

$$\alpha \langle A, B \rangle + \alpha \langle C, D \rangle = \alpha \langle A + C, B + D \rangle, \quad (5.19)$$

$$\alpha \langle A, B \rangle + \beta \langle A, B \rangle = (\alpha + \beta) \langle A, B \rangle \quad (5.20)$$

се проверяват непосредствено. Оттук следва, че  $B$  е линейно пространство. Разлика на два елемента на  $B$  се определя стандартно като

$$\langle A, B \rangle - \langle C, D \rangle = \langle A, B \rangle + (-1) \langle C, D \rangle = \langle A + D, B + C \rangle.$$

Норма в  $B$  ще дефинираме чрез метриката в  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ :

$$\| \langle A, B \rangle \| = d(A, B), \quad (5.21)$$

където  $d$  е разстоянието дефинирано чрез (5.13), вж. [45]. Ще се уверим, че тази функция е действително норма:

1.  $0 = \| \langle A, B \rangle \| \iff d(A, B) = 0 \iff A = B \iff \langle A, B \rangle = 0.$

2.  $\| c \langle A, B \rangle \| = d(|c|A, |c|B) = |c|d(A, B) = |c| \| \langle A, B \rangle \|.$

3.  $\| \langle A, B \rangle + \langle C, D \rangle \| = \| \langle A + C, B + D \rangle \| = d(A + C, B + D) \leq \| \langle A, B \rangle \| + \| \langle C, D \rangle \|.$

Пълнотата на  $B$  следва от пълнотата на метричното пространство  $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$  с метрика  $d$ .  $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$  ще вложим изометрично в подпространството  $\mathcal{Y}$  на  $B$ , породено от елементите  $\{ \langle A, \Omega \rangle \mid A \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \}$ , т.е. въвеждаме изображението  $Y : \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \mapsto \mathcal{Y}$  чрез равенството

$$Y(A) = \langle A, \Omega \rangle,$$

Изометричността следва от равенството

$$d(A, B) = \| \langle A, B \rangle \| = \| \langle A, \Omega \rangle + \langle \Omega, B \rangle \| = \| Y(A) - Y(B) \|.$$

Нека  $X$  е подмножество на  $\mathbf{R}^m$ , съдържащо точката  $a$  заедно с една нейна околност  $B_\epsilon(a)$ . Размита функция  $f$  наричаме изображение  $f : X \mapsto \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ . Функцията  $f$  ще наричаме диференцируема в точката  $a$ , ако съществува линейно

изображение  $K : \mathbf{R}^m \mapsto \mathcal{Y}$  такова, че

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|Y(f(x)) - Y(f(a)) - K(x - a)\|}{|x - a|} = 0, \quad (5.22)$$

където  $|\cdot|$  е произволна норма в  $\mathbf{R}^m$ . Ще наречем  $K$  производна на  $f$  в точката  $a$  и ще го бележим с  $f'(a)$ . Така дефинираната производна съвпада с тази, дефинирана в [45]. Избегнати са обаче неточности в [45], например там се задава влагането  $Y(A) = \langle A, \emptyset \rangle$ , което не е подходящо, тъй като Хаусдорфовото разстояние не е дефинирано за празни множества.

Така дефинираната диференцируемост може да послужи при построяване на размити управления на динамични системи и изследване на тяхната устойчивост, построявайки аналог на функцията на Ляпунов [3].

### 3 Мерки за приблизителна изпъкналост и размити морфологични операции

Ползата от разглеждане на размити геометрични обекти за целите на разпознаването на образи е забелязана от Rosenfeld [47, ?]. В тази статия той изучава въпроси и въвежда понятия като площ, свързаност, размита крива и др. В тази глава ще разгледаме въпроса за дефиниране на мерки за приблизителна изпъкналост използвайки вече въведените размити морфологични операции.

**Дефиниция** Нека  $\mathcal{L}$  е съвкупност от множества. Казваме, че  $\mathcal{L}$  е клас на изпъкналост, ако сечението на произволна подфамилия от  $\mathcal{L}$  също принадлежи на  $\mathcal{L}$  [5].

Теорема 1.15 ни подсеща за следната дефиниция:

**Дефиниция** Мярка, или индикатор на изпъкналостта на размитото множество  $A$  по отношение на индикаторите  $I_1$  и  $I_2$  ще наречем стойността

$$c[I_1, I_2](A) = I_1(\delta_{0.5A}(0.5A), A),$$

където дилатацията  $\delta$  е взета по отношение на индикатора  $I_2$ .



Мярката на изпъкналостта представлява степента на принадлежност на  $\delta_{0.5A}(0.5A)$  в  $A$ . Тя взема стойности между 0 и 1 и представлява аналог на Теорема 1.15 в теорията на размитите множества. Както се забелязва, индикаторът  $I_2$  трябва да изпълнява всичките осем аксиоми, докато за  $I_1$  това не е необходимо, тъй че  $I_1$  може да бъде например  $I^B$ ,  $I^K$  или в случай на черно-бели изображения -  $I^H$  или  $I^K$ .

**Дефиниция C**  $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$  означаваме фамилията размити изпъкнали подмножества на  $\mathbb{R}^n$  със свойството: Характеристичната функция е полунепрекъсната отгоре с ограничен носител.

**Теорема 5.16** *Фамилията  $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$  е клас на изпъкналост.*

Доказателството следва директно от Лема 5.8.

Сега ще докажем главния резултат за индикатора  $s[I^*, I_*]$ , който за краткост ще означаваме с  $s_*$ . Този резултат характеризира класа  $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$  чрез мярката за изпъкналост  $s_*$ .

**Теорема 5.17** *Нека  $A$  е разрито подмножество на  $\mathbb{R}^n$  чиято характеристична функция е полунепрекъсната отгоре с ограничен носител. Тогава  $s_*(A) = 1$  е изпълнено точно когато  $A \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Доказателство.*

1. Нека  $A$  е от класа  $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ . Тогава е очевидно, че  $0.5A \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ . Следователно, от Теорема 5.11 и Теорема 1.15

$$[A]_\alpha = [0.5A]_\alpha \oplus [0.5A]_\alpha = [0.5A + 0.5A]_\alpha,$$

за всяко  $\alpha \in (0, 1]$  Тогава  $A = \delta_{0.5A}(0.5A)$ , което означава, че  $I^*(\delta_{0.5A}(0.5A), A) = 1$ .



2. Нека  $c_*(A) = 1$ . Тогава  $\delta_{0.5A}(0.5A) \subset A$  в смисъл на Заде. Следователно, използвайки Теорема 5.11 получаваме

$$[0.5A]_\alpha \oplus [0.5A]_\alpha = (0.5A + 0.5A)_\alpha \subset A_\alpha$$

за всяко  $\alpha \in (0, 1]$ . Но от очевидното включване  $[0.5A]_\alpha \oplus [0.5A]_\alpha \supset [A]_\alpha$  следва, че  $[0.5A]_\alpha \oplus [0.5A]_\alpha = [A]_\alpha$ . Тогава Теорема 1.15 ни дава, че  $[A]_\alpha$  е изпъкнало за всяко  $\alpha \in (0, 1]$  и следователно  $A \in \mathcal{FC}(\mathbf{R}^n)$ . С това теоремата е доказана.  $\square$

Както ще проверим по-нататък, добри практически резултати при изследването на приблизителната изпъкналост на обекти върху двоични полутонови изображения дава индикаторът на изпъкналост

$$c_K(A) = c[J, I_*(A)] = J(A + A, 2A),$$

където  $J$  е квадратът на индикатора на включване на Kosko,  $J(X, Y) = [I^K(X, Y)]^2$ . Индикаторът на изпъкналост  $c_K$  не е чувствителен на шум което го прави подходящ за компютърна реализация.

По аналогия с Теорема 5.17 лесно се съобразява, че

**Теорема 5.18** *За всяко размито изпъкнало подмножество  $A$  на  $\mathbf{R}^n$  чиято функция на принадлежност е u.s.c с ограничен носител следва, че  $c_K(A) = 1$ . Обратно, ако  $c_K(A) = 1$  тогава съществува размито множество  $X$ , чийто носител има Лебегова мярка  $\theta$ , такава че  $A \cup X$  е размито изпъкнало.*

### 3.1 Практическа реализация на индикаторите на приблизителна изпъкналост

В разпознаването на образи и обработката на изображения ние работим с крайни съвкупности от пиксели. Дори за обекти върху двоични изображения не е лесно да се определи какво точно означава изпъкнала крайна съвкупност от пиксели [53]. Задачата е още по-трудна при полутонови изображения когато

обектите нямат ясно очертани контури. Ако  $A$  е двоично или полутоново изображение и  $C = c[I_1, I_2]$  е някакъв индикатор на изпъкналост, ще казваме, че  $A$  е изпъкнало с ниво на доверие  $\alpha$  по отношение на индикатора  $C$  ако  $C(A) = \alpha$ . Свойства 5.16 и 5.17 на индикатора  $c_*$  показват, че така предложените дефиниции са правдоподобни. Чрез психо - физиологични експерименти може да се определи кои индикатори  $c[I_1, I_2]$  (варирайки индикаторите на включване  $I_1$  и  $I_2$ ) дават по - добри резултати за дадени класове компютърни изображения.

Така например експериментите показват, че индикаторът  $c_*$  дефиниран по-горе, е чувствителен по отношение на наличието на шум.

Нека приложим , т.нар капков шум dropout noise  $N$  към изображението  $A$ . Шумът  $N$  може да се интерпретира като разрито множество с функция на принадлежност  $N(x) = 0$  когато  $A(x) = 0$ , и  $N(x) = 0$  или  $N(x) = A(x)$  когато  $A(x) > 0$ . Този шум премахва точки от идеалното изображение  $A$ , като се получава смутеното изображение  $A' = A \cap N$  - шумът  $N$  предизвиква една или повече дупки в  $A$  със степен на сивото 0. Такъв шум може да се получи при старите ССД камери когато някои от нейните елементи са извън строя, а също така и при фотокопиране, когато щехен some пишелс are деад, капки от мастило могат да влошат качеството на копието. Такъв шум може да се разглежда като граничен случай, или като най - лош от всеки друг случаен шум. Така, че ако покажем, че даден индикатор на приблизителна изпъкналост не е чувствителен към такъв шум, много е правдоподобно, че той няма да бъде чувствителен към произволен случаен шум.

За индикатора  $c_K$  в случая на дискретно полутоново изображение можем да получим следното представяне :

$$c_K(A) = \left( 1 - \frac{\sum_x \max(0, (0.5A + 0.5A)(x) - A(x))}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x)} \right)^2 =$$

$$\left( 1 - \frac{\sum_x ((0.5A + 0.5A)(x) - A(x))}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x)} \right)^2 = \left( \frac{\sum_x A(x)}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x)} \right)^2 .$$

Нека разгледаме разреден капков шум, т.е. около всяка дупка съществува околност без дупки. Да означим с  $H$  множеството от точки  $x$  такива, че  $A(x) > 0$  и

$N(x) = 0$ . Нека броят на елементите на  $H$  е  $h$ . Нека за простота предположим, че  $A' + A' = A + A$  и следователно

$$c_K(A') = \left( \frac{\sum_x A'(x)}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x)} \right)^2 =$$

$$\left( \frac{\sum_x A(x) - \sum_{x \in H} A(x)}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x)} \right)^2 \geq \left( \frac{\sum_x A(x) - h}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x)} \right)^2.$$

Означавайки  $\varepsilon = \frac{h}{\sum_x (0.5A + 0.5A)(x) \sqrt{c_K(A)}}$  получаваме, че

$$c_K(A') \geq c_K(A)(1 - \varepsilon)^2, \quad (5.23)$$

Тъй като по условие  $\varepsilon$  е малко положително число, то можем да считаме, че индикаторът  $c_K$  не е чувствителен към разреден капков шум.

На фиг. 5.3 е показано сравнение на резултата от прилагането на  $c_*$  и  $c_K$  към полутоново изображение. Вътрешността на обекта е с ниво на сивия цвят 0.9, а външния пръстен е с ниво 0.6. За него стойността на  $c_*$  е 0.7. При наличие на капков шум, произвеждащ дори една единствена дупка, стойността на  $c_*$  за смутеното изображение става 0.1, което твърде много се отличава от 0.7. Когато приложим разреден капков шум от 100 дупки, всяка от един пиксел от (5.23) следва, че

$$0.99 = c_K(A) \geq c_K(A') \geq 0.92$$

Така, че получените резултати са в полза на  $c_K$ .

Преди изчисляването на  $c_*$  върху реални изображения може да се приложи полутоново затваряне. Затварянето с помощта на малък структурен елемент с правоъгълна форма и константна стойност няма да промени локалната изпъкналост на разглежданото изображение, а дълбочината на вдлъбнатите части ще се намали леко. Ако  $A$  е полутоново изображение,  $A'$  е същото изображение примесено с бял шум, а  $A''$  е получено от  $A'$  чрез морфологично затваряне с  $2 \times 2$  структурен елемент. Наблюденията показват, че така грешката при пресмятането на  $c_*$  обикновено намалява, т.е.  $|c_*(A) - c_*(A'')| \leq |c_*(A) - c_*(A')|$ . За практическото използване на морфологичните филтри базирани на полутоново затваряне вж. монографиите [53] и [24].

Както бе споменато по-горе, използването на индикатора на включване  $I^*$  не е целесъобразно в случая на двоични изображения, а оттам и използването на  $s_K$  за измерване на приблизителната изпъкналост на черно-бели изображения е нецелесъобразно.

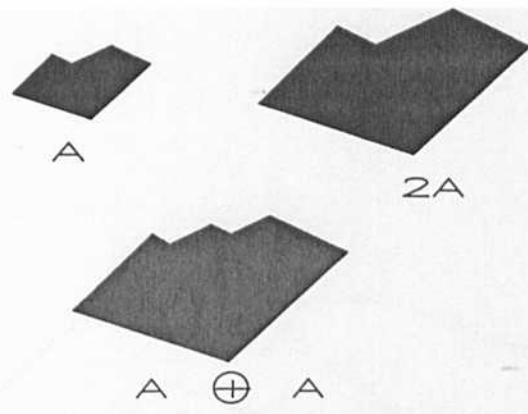
В случая на черно-бели обекти

$$s_K(A) = \left(1 - \frac{\sigma(0.5A \oplus 0.5A \setminus A)}{\sigma(0.5A \oplus 0.5A)}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sigma(A \oplus A \setminus 2A)}{\sigma(A \oplus A)}\right)^2$$

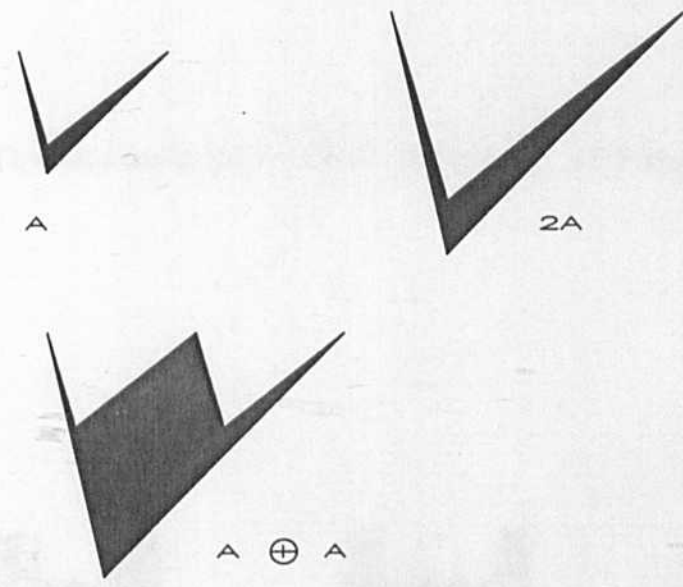
На фигури 5.1 и 5.2 са показани примери на многоъгълници и стойностите на  $s_K$  за тях. Както се вижда от фигурите,  $\sigma(0.5A \oplus 0.5A \setminus A)$  измерва площта на вдлъбнатостите на  $A$ . В този случай вместо  $J$  можем да използваме едностранния Хаусдорфов индикатор  $I^H$  (или някоя негова степен), но изчисляването му е трудно от алгоритмична гледна точка

В сравнение с другите подходи за измерване на приблизителна изпъкналост, [10] и [25], предложеният в настоящата работа дава възможност за работа с полутонови или цветни изображения. Освен това дава възможност за лесна компютърна реализация.

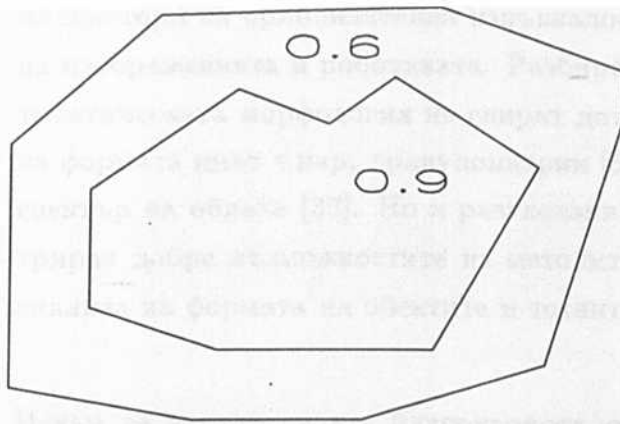
За оценка на поведението на индикатора  $s_K$  е направен психофизически експеримент. Използували сме показаните на фиг. 5. 4 три фигури. Петнадесет души бяха помолени да подредят фигурите според тяхното интуитивно възприятие за изпъкналост. "Най-изпъкналата" фигура във всеки отговор носи 3 точки, средната - 2 точки, а "най-малко изпъкналата" - 1 точка. Получен беше следния резултат: Фигура А събра 31 точки, фигура В - 20 точки, а фигура С - 39 точки. Резултатът от прилагането на индикатора  $s_K$  към тези фигури е следния: за А - 0.79, за В - 0.72, за С - 0.83. Този психо - физичен експеримент показва, че индикаторът  $s_K$  дава резултати близки до средното човешко възприятие. Изводът е, че мярката (индикаторът) за приблизителна изпъкналост  $s_K$  е подходящ за изследване на формата на обектите както върху черно-бели, така и върху полутонови изображения.



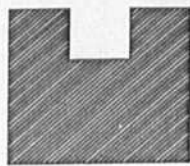
фиг. 5.1 Пример на неразмит многоъгълник с  $c_{CK} = 0.92$



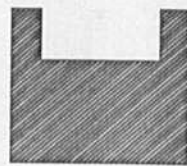
фиг. 5.2 Пример на неразмит многоъгълник с  $c_{CK} = 0.13$



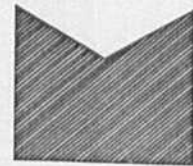
фиг. 5.3 Пример на размит обект за който  $C_s = 0.7$  и  $C_K = 0.99$



a



b



c

фиг. 5.4 Фигурите, използвани в психо - физическия експеримент.



## Заклучение

В настоящата дисертация са предложени три конкретни подхода при анализа на формата – анализ на фракталната размерност, скелетизация и пресмятане на индикатори на приблизителна изпъкналост, които са приложени в обработката на изображенията и роботиката. Разбира се, приложенията на методите на математическата морфология не спират дотук. Интересни приложения в анализа на формата имат т.нар. гранулометрии [53, 24] , както и въведеният от Magagos спектър на образа [32]. Но и разгледаните в настоящата работа задачи илюстрират добре възможностите на методите на математическата морфология за анализа на формата на обектите и техните приложения.

Искам да изкажа своята благодарност към научните си консултанти, към колегите си от катедра Математически анализ на СУ, а също така на ст.н.с С. Патарински от ИМБ - БАН (който за съжаление не е между нас), който ме окуражи до голяма степен в прилагането на съвременни математически методи в интелигентното управление на работи и разпознаването на образи.

## Библиография

- [1] Бекаров, Б., Вл. Христов Зона на достижимост и работна зона на равнинни манипулатори. *Теоретична и приложна механика*, 2, 1980.
- [2] Левис, М., *Прикладной нестандартный анализ*. Мир, Москва, 1984.
- [3] Кудинов, Ю. И., Нечеткие системы управления. *Известия Академии наук СССР, Техническая кибернетика*, 5 :196-206, 1990.
- [4] Лилов, Л. К., *Моделирование систем связанных тел*. Наука, Москва, 1993.
- [5] Солтан, В. П., *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости*. Штиинца, Кишинев, 1984.
- [6] Рудин, У., *Реален и комплексен анализ*. Наука и Изкуство, София, 1984.
- [7] Сендов, Бл. Х., *Хаусдорфовые приближения*. Издателство БАН, София, 1979.
- [8] Barraquand, J. and J.-C. Latombe, Robot Motion Planning: A distributed representation approach. *The International Journal of Robotics Research* vol.10, no.6, Dec. 1991.
- [9] Bertin, E., S. Marchaud-Maillet and J.-M. Chassery, Optimization in Voronoi Diagrams. В сборника J. Serra and P. Soille, (eds.), *Mathematical morphology and its applications to image processing*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [10] Borgefors, G., G. Sanniti di Baja, Methods for Hierarchical Analysis of Concavities, *Proc. 11th IAPR Int. Conf. on Pattern Recognition*. The Hague, pp. 171-175, 1992.

- [11] Bloch, I., H. Maître, Fuzzy mathematical morphologies: A comparative study. *Pattern Recognition*, 28, No. 9 :1341–1387, 1995.
- [12] Bloch, I., Fuzzy relative positions between objects in images. ръкопис, 1996.
- [13] Cabrelli, C.A., B. Forte, U. M. Molter, E. R. Vrscay, Iterated fuzzy set systems: A new approach to the inverse problem for fractals and other sets *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 171 :79–99, 1992.
- [14] Dubuc, S., Models of irregular curves. В сборника G.Chorbit, editor, *FRACTALS: Non-integral dimensions and applications*. John Wiley, 1991.
- [15] Peyriere, J., Introduction to packing measures and dimensions. В сборника G. Cherbit, (ed.), *FRACTALS: Non-integral dimensions and applications*. John Wiley, 1991.
- [16] Falconer, K.J., *The Geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, 1985.
- [17] Foster, D. H., Classical and fuzzy differential methods in shape analysis. В сборника Ying - Lie O etc., (eds.), *Shape in Picture: Mathematical Description of shape in grey-level images*. Nato ASI Series, Series F - Vol. 126: 319–332, Springer-Verlag, 1994.
- [18] Gardner, J., P. Gritzmann, *Successive determination and verification of polytopes by their X-rays*. preprint, 1992
- [19] Guibas, L. J., D. E. Knuth and M. Sharir, *Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams*. Department of Computer Science, Stanford University. Report No. STAN-CS-90-1300.
- [20] Gibert, E. G., D. W. Johnson, S. S. Keerthi, A fast procedure for computing the distance between objects in three - dimensional space. *IEEE J. Robotics Automat.*, 4, No. 2 : 193–203, 1988.
- [21] Gibert, E. G., Chek-Peng Foo, Computing the distance between general convex objects in three - dimensional space. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, 6, No. 1 : 53–61, 1988.

- [22] Haralick, R.M. and L. G. Shapiro, *Computer and robot vision, volume 1*. Addison-Wesley, 1992.
- [23] Heijmans, H.J.A.M., C. Ronse, The algebraic basis of mathematical morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 10 :245–295, 1990.
- [24] Heijmans, H.J.A.M., *Morphological image operators*. Academic Press, 1994.
- [25] Held, A, K. Abe, On approximate convexity. *Pattern Recognition Letters*, 15, 611–618, 1994.
- [26] Huttenlocher, D.P., G. A. Klanderman, W. J. Rucklidge, Comparing images using the Hausdorff distance *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(9):850–863, September 1993.
- [27] Lindstrøm, T., *An invitation to non-standard analysis*. preprint, 1986.
- [28] Lipski, W., Ch. Papadimitriou, A fast algorithm for testing for safety and detecting deadlocks in locked transaction systems, *Journal of Algorithms*, 1: 235 – 246, 1980.
- [29] Markov, S.M., Extended interval arithmetic involving infinite intervals. *Mathematica Balkanica*, New series vol.6: 269–304, 1992.
- [30] Mallat, S.G., A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, July 1989.
- [31] Mandelbrot, B.B, *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman, 1982.
- [32] Maragos, P., Pattern spectrum and multiscale shape representation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:701–716, 1989.
- [33] Maragos, P., Differential morphology and image processing. *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(6): 922– 937, 1996.
- [34] Maragos, P., Fang-Kuo Sun, Measuring the fractal dimension of signals: Morphological covers and iterative optimization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(1):108–121, January 1993.

- [35] Maragos, P., R.W. Schafer, Morphological skeleton representation and coding of binary images. *IEEE Trans. ASSP*, 34(5):1228–1244, October 1986.
- [36] Matheron, G., *Random sets and integral geometry*. Wiley, New York, 1975.
- [37] Mattioli, J., L. Doyen, L. Najman, Lattice operators underlying dynamic systems. *Set - Valued Analysis*, 4 :119–134, 1996.
- [38] O'Donnell, P. A., T. Lozano- Perez, Deadlock - free and collision- free coordination of two robot manipulators. *Proc. of IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*, 484–489, 1989.
- [39] Peleg, S., R. Hartley, J. Naor and D. Avnir, Multiple resolution texture analysis and classification. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(4):518–523, July 1984.
- [40] Pentland, A.P., Fractal based description of natural scenes. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):661–674, November 1984.
- [41] Preparata, F.P., M. I. Shamos, *Computational geometry: An introduction*. Springer - Verlag , 1985.
- [42] Bekjarov, B., A. T. Попов, O. Katov Collision - free movement planning for robot manipulators, В сборника Т.О'Shea, V.Sgurev (eds.), *Artificial Intelligence III - Methodology, Systems, Applications*:381–388, North - Holland, 1988.
- [43] Попов, А.Т., A. G. Hall, Multiresolutional texture analysis based on morphological techniques, Proc. of IEE Colloquium on Morphological and Non-linear Image Processing Techniques, IEE digest 145/93, London 1993.
- [44] Попов, А. Т., Morphological operations on fuzzy sets. *Fifth Int. Conf. on Image Processing and its Applications*, IEE Conference Publication No. 410 :837 – 840, 1995.
- [45] Puri, M.L., D. A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91 :552–558, 1983.
- [46] Robinson, A., *Non-standard analysis*. North - Holland, 1974.



- [47] Rosenfeld, A., The fuzzy geometry of image subsets. *Pattern Recognition Letters*, 2: 311–317, 1984.
- [48] Roerdink, J., Solving the empty space problem in robot path planning by mathematical morphology. В сборник J. Serra and P. Salembier (eds.), *Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing*, Barcelona, Spain, May 12-14, 1993, 216–221.
- [49] Roerdink, J., Manifold shape: From differential geometry to mathematical morphology. В сборника Ying - Lie O etc., (eds.), *Shape in Picture: Mathematical Description of shape in grey-level images*. Nato ASI Series, Series F - Vol. 126: 209–223, Springer-Verlag, 1994.
- [50] Schmitt, M., Some examples of algorithms analysis in computational geometry by means of mathematical morphological techniques. В сборника J.-D. Boissonat and J.-P. Laumond, (eds.), *Geometry and robotics, Lecture notes in computer science, vol.391*. Springer-Verlag, 1989.
- [51] Schneider, R., *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- [52] Kresch, R., D. Malah, Morphological redundancy of skeleton redundancy. *Proc. of Int. Workshop on Math. Morphology and its Applications to Image Processing*, Barcelona, pp. 145–150, May 1993.
- [53] Serra, J., *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, 1982.
- [54] Serra, J., Mathematical morphology for complete lattices. В сборника J. Serra, (ed.), *Image analysis and mathematical morphology, vol.2*. Academic Press, 1988.
- [55] Matheron, G., Examples of topological properties of skeletons. В сборника J. Serra, (ed.), *Image analysis and mathematical morphology, vol.2*. Academic Press, 1988.
- [56] Meyer, F., Skeletons in digital spaces. В сборника J. Serra, (ed.), *Image analysis and mathematical morphology, vol.2*. Academic Press, 1988.
- [57] Rosenfeld, A., Fuzzy Geometry: An Updated Overview. ръкопис 1984.



- [58] Sinha, D.,E. Dougherty, Characterization of fuzzy Minkowski algebra. *SPIE Vol. 1769 - Image Algebra and Morphological Image Processing III* :59-68, 1992.
- [59] Sinha, D., E. R. Dougherty, Fuzzification of Set Inclusion, Theory and Application, *Fuzzy Sets and Systems*, No. 55 (1993): 15-42.
- [60] Tomita, F., S. Tsuji, *Computer analysis of visual textures* Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [61] Werman, M.,S. Peleg, Min - max operators in texture analysis. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7(2):730-733, November 1985.
- [62] Zadeh, L. A, Fuzzy sets. *Information Control*, vol. 8, 338-353, 1965.
- [63] Zadeh, L. A, *Fuzzy sets and their applications to cognitive processes*. Academic Press, 1975.
- [64] Zadeh, L. A, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, vol. 8,9, 1975.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

### Най-често използвани означения

$a := b$		$a$ по дефиниция е равно на $b$ .
$\mathbb{Z}$		Пръстена на целите числа.
$\mathbb{R}$		Полюето на реалните числа.
$\mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^+$		Съвкупността от неотрицателните реални, респ. цели числа.
$\cup, \cap, \setminus$	Обединение, сечение и разлика на множества (неразмити и размити).	
$\subset$		Подмножество (в нестрог смисъл).
$B_r^n(x), B_r(x)$		Затворено кълбо (кръг в двумерния случай) в $\mathbb{R}^n$ с център $x$ и радиус $r$ .
$\text{cl}(X)$		Затворена обвивка на множеството $X$ .
$\text{int}(X)$		Вътрешност на множеството $X$ .
$\partial X$		Контур на множеството $X$ .
$\text{co}(X)$		Изпъкнала обвивка на множеството $X$ .
$X^c$		Допълнение на множеството $X$ .
$SK(X)$		Скелет на множеството $X$ .
$\mu_A(\cdot), A(\cdot)$	Характеристична функция на размитото множество $A$ .	
$\oplus, \ominus$		Събиране и изваждане по Минковски.
$\bullet, \circ$		Морфологично отваряне и затваряне на множества.
$\Delta(X)$	Фрактална размерност на Минковски - Булиганд на множеството $X$ .	
$\mathcal{L}, \mathcal{M}$		Пълни решетки.
$(\varepsilon, \delta)$		Спрегната двойка оператори.
$\delta_A, \varepsilon_A$	Дилатация и ерозия по отношение на структурния елемент $A$ .	
$I(X, Y)$	Индикатор на включването на размитото множество $X$ в размитото множество $Y$ .	
$*A$		Нестандартно продължение на обекта $A$ .
$^\circ A$		Стандартна част на $A$ .