Единен център за наука и подготовка на кадри по математика и механика

Факултет по математика и механика

на Софийския университет "Климент Охридски"

Сектор по диференциални уравнения

Д И С Е Р Т А Ц И Я

на тема

ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ ЗА ЕДИН КЛАС ОТ КВАЗИЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД С НЕОТРИЦАТЕЛНА ХАРАКТЕРИСТИЧНА ФОРМА

за присъждане на научната степен
"кандидат на математическите науки"

Дисертант: Георги Иванов Чобанов

Научен ръководител:

Доцент доктор Тодор Генчев

Ръководител на сектор:

Професор доктор Рачо Денчев

София 1977

У В О Д

В настоящата работа се изучават гранични задачи за квазилинейното частно диференциално уравнение от втори ред

$$/1/\qquad a^{ij}(x,u)u_{ij} + a^{i}(x,u)u_{i} - a(x,u)u = f(x)$$

с неотрицателна характеристична форма:

$$/2/\qquad a^{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \geqq 0 \qquad \left(\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in R^n\right)$$

/както обикновено, повтарящи се индекси означават сумиране и $u_i = u_{x_i}$, $u_{ij} = u_{x_i x_j}$ и т.н./, като за коефициентите се предполага, че са дефинирани в $G \times [-M, M]$, където G е област в R^n и M е положителна константа. Както е известно, линейните частни диференциални уравнения от втори ред

$$/3/\qquad a^{ij}(x)u_{ij} + a^{i}(x)u_{i} - a(x)u = f(x)$$

се класифицират според дефинитността на характеристичната форма

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \qquad \left(\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in R^n\right)$$

в областта, в която се разглеждат [1]. Така например, ако за характеристичната форма на оператора

$$/4/\qquad L(u) \equiv a^{ij}(x)u_{ij} + a^{i}(x)u_{i} - a(x)u$$

е в сила

$$/5/\qquad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \mu|\xi|^2 \qquad (\mu > 0)$$

в разглежданата област, той се нарича **равномерно елиптичен**; оператори, за които $a^{nn} = a^{ni} \equiv 0$, но

/6/ $$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \mu|\xi'|^2 \qquad (\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})),$$

се наричат п а р а б о л и ч н и и т.н. Прието е оператори /4/, за които е в сила само

/7/ $$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq 0$$

да се наричат и з р а ж д а щ и с е е л и п т и ч н и или просто о п е р а т о р и с н е о т р и ц а т е л н а х а р а к т е р и с т и ч н а ф о р м а, и по аналогия, и в случая, когато коефицентите на оператора

/8/ $$L(u) \equiv a^{ij}(x,u)u_{ij} + a^{i}(x,u)u_i - \bar{a}(x,u)u$$

зависят от неизвестната функция, т.е. при к в а з и л и н е й н и т е у р а в н е н и я , се запазва същата терминология. Също така, п ъ р в а г р а н и ч н а з а д а ч а за оператора /4/ / з а д а ч а н а Д и р и х л е / и съответно за оператора /8/ се нарича задачата за намиране на двукратно гладка функция u в област $G\subset R^n$, която превръща уравнението /3/ в тъждество и приема предварително зададени стойности върху целия контур на областта G или върху някои негови части. На случая, когато за оператора /8/ е в сила аналогичното на /5/ условие

$$a^{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \geqq \mu|\xi|^2,$$

са посветени обширни изследвания [2]. Същото важи и за аналогичното на /6/ изискване [3]. Изследвания за уравнението /1/ са правени и в случая на така нареченото "неявно израждане", т.е. когато /2/ е заменено с по-силното изискване

$$a^{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \geqq \mu(|s|)|\xi|^2,$$

където $\mu(t)$ е неотрицателна функция, дефинирана в $[0,\infty)$, която се анулира само за $t=0$, вж. [4]-[6], или за по-специалното уравнение

$$u_{xx} + f(|u|)u_{yy} = h(x,y,u),$$

като $f(t)=0$ само при $t=0$ [7] ; в тези работи се търсят о б о б щ е н и решения на съответните уравнения.* При по-близки до ограничението /2/ условия се търсят обобщени решения на гранични задачи за уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x,t,u)}{\partial x^2}$$

вж. [8] . Също така, в [9] се търсят класически решения на задачите на Дирихле и Коши за уравнението

$$a^{ij}(x,t,u)u_{ij} + a^{i}(x,t,u)u_i - u_t = f(x,t,u)$$

при

$$a^{ij}(x,t,s)\xi_i\xi_j \geq 0.$$

Коректната постановка на граничните задачи за уравненията /3/ с /7/ е дадена от Фикера [10] , [11] . По-точно, като следваме [11] , нека $G \subset R^n$ е област с частично гладка граница Σ , която е разделена на три части Σ_1 , Σ_2 и Σ_3 по следния начин: Σ_3 е множеството на точките $x \in \Sigma$, за които е в сила условието $a^{ij}(x)\nu_i(x)\nu_j(x) > 0$ /тук $\nu_i(x)$ е ν -тата компонента на единичния вектор на външната нормала към Σ /, а Σ_2 и Σ_1 са онези подмножества на $\Sigma \setminus \Sigma_3$, за които съответно $b(x) > 0$ и

---

* Може би не е излишно да се направи следната терминологична бележка. Терминът "неявно израждане" е употребен и тук, тъй като е възприет от авторите на цитираните по-горе работи; всъщност, в настоящата работа се изследват много по-неявни "неявни израждания".

$b(x) \leq 0$ при $b(x) = (a^i(x) - a^{ij}_j(x))\nu_i(x)$. Тогава задачата на Дирихле за уравнението /3/ се състои в намиране на решение, чиито стойности са зададени предварително само върху $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Като вземаме повод от линейния случай, да предположим, че контурът на областта G, в която разглеждаме уравнението /1/, е частично гладък и се разлага във вида $\partial G = S_3 \cup S$, където

/9/ $S_3 = \{x \in \partial G : a^{ij}(x,s)\nu_i(x)\nu_j(x) > 0, s \in [-M,M]\}$

и

/10/ $S = \{x \in \partial G : a^{ij}(x,s)\nu_i(x)\nu_j(x) = 0, s \in [-M,M]\}$,

като поне едно от тези множества не е празно. Ако

/11/ $b(x,s) = (a^i(x,s) - a^{ij}_j(x,s))\nu_i(x)$,

нека $S = S_1 \cup S_2$, където

/12/ $S_1 = \{x \in S : b(x,s) \leq 0, s \in [-M,M]\}$

и

/13/ $S_2 = \{x \in S : b(x,s) > 0, s \in [-M,M]\}$

Задачата, която се разглежда в настоящата работа, се състои в намиране на к л а с и ч е с к о, т.е. поне двукратно гладко, решение на уравнението /1/ с /2/, чиито стойности са предварително зададени само върху $S_2 \cup S_3$.

Основните предположения за уравнението /1/, които се правят в настоящата работа, са:

I. Стойностите на $a(x,s)$ в дефиниционната област са положителни и големи в сравнение с $f(x)$, с останалите коефициенти и с производните им до втори ред включително, както и в сравнение с производните на самото $a(x,s)$.

II. Уравнението /1/ е дефинирано /или може да се додефинира/ в някоя по-широка област $G' \supset G$ със запазване на неотрицателността на характеристичната форма.

Предположението I се използува широко в линейния случай на уравнението /3/ с /7/, вж. [12] - [16]. В частния случай, когато уравнението /3/ се изражда в параболично, предположетието I не е ограничение, тъй като с помощта на полагането $u = ve^{\lambda x_n}$ при подходящо λ функцията $a(x)$ може да се направи произволно голяма. В квазилинейния случай обаче подобно полагане води до установяване на съществуването и единствеността на класическо решение само при малки стойности на променливата x_n, вж. § 8.

Предположението II също се използува широко в линейния случай, вж. [12] - [15].

В настоящата работа изучаването на граничната задача е извършено по следния начин. Първоначално се доказва съществуване и единственост на решение на уравнението /1/ за област G с достатъчно гладка граница, за която $\partial G = S_3$; след това, като се използува продължение на уравнението в по-широка област, се изучава случаят $\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, като се следва известна аналогия с линейните уравнения [12] - [15] при някои допълнителни предположения за разположението на множествата S_1, S_2 и S_3 върху ∂G.

Доказателствата на основните резултати /теореми 1 - 3/ са проведени чрез комбинирана версия на методите на елиптичната регуляризация и на последователните приближения. По-точно, вместо оператора /8/ разглеждаме операторите

$$L_\varepsilon(v;u) \equiv \varepsilon\Delta u + a_\varepsilon^{ij}(x,v)u_{ij} + a_\varepsilon^{i}(x,v)u_i - a_\varepsilon(x,v)u, \qquad /14/$$

където коефицентите са подходящи апроксимации на коефицентите на /8/, а Δ е операторът на Лаплас; за произволна редица $\varepsilon_\nu \to 0$ са намерени априорни оценки на редицата от функции, получени като решения на гранични задачи за операторите

$$L_{\varepsilon_\nu}(u_{\nu-1}, u_\nu) = f_{\varepsilon_\nu}(x)$$

/където десните страни са подходящи приближения на дясната страна на /1/ /, достатъчни за да осигурят сходимостта, заедно с производните до втори ред включително, на подходяща подредица от функции, чиято граница е решение на поставената задача. Необходимите априорни оценки се намират чрез модификация на известния метод на Бернщейн за оценяване на решенията и на производните на линейните елиптични и параболични уравнения [17], [18]. Тъй като при фиксирано v операторите /14/ са линейни спрямо u, оценяването става със средства, близки до използваните в [15] и [19] в линейния случай, като основната трудност тук се състои в доказването на факта, че тези оценки са независими не само от ε, но и от v.

Резултатите от § 1 - § 4 са предадени за печат в [20], а онези от § 5 и § 7 - в [21]. Резултатите от § 8 са обобщения на онези от предишната ни публикация [22], където е разгледана задачата на Коши за уравнението

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x,y,t,u)\frac{\partial u}{\partial y} + a_2(x,y,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + a_3(x,y,t,u)u + a(x,y,t)$$

§ 1. ОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛНИ СВЕДЕНИЯ

Настоящият параграф съдържа основните означения и предложения, които по-нататък се използват непрекъснато.

Ако $f(x)$ и $g(x,s)$ са диференцируеми функции с дефиниционни области съответно в R^n и R^{n+1}, по дефиниция

/15/ $$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

и

/16/ $$D^{\alpha+p} g(x,s) = \frac{\partial^{|\alpha|+p} g(x_1,\dots,x_n,s)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}\partial s^p},$$

където $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ е наредена n-орка от неотрицателни цели числа и $|\alpha| = \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu$. Ако k е неотрицателно цяло число и $f(x)$ е k пъти непрекъснато диференцируема в $\bar\Omega\subset R^n$ функция, казва се, че f е от класа $C^k(\bar\Omega)$ и се полага

/17/ $$\|f\|_{C^0(\bar\Omega)} = \max_{\bar\Omega}|f(x)|$$

и

/18/ $$\|f\|_{C^k(\bar\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha f\|_{C^0(\bar\Omega)}$$

За една област $\Omega\subset R^n$ се казва, че е от класа C^k, когато за всяка нейна контурна точка съществува околност в R^n, в която $\partial\Omega$ се задава във вида

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$$

с

$$\operatorname{grad}\varphi\neq 0,$$

и функцията φ е от класа C^k в съответната околност.

За една област $G \subset R^n$ се казва, че има частично гладка граница, ако за всяка точка $\xi \in \partial G$ съществува околност $V_\xi \subset R^n$ и трансформация

/19/ $$y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n),$$

която преобразува V_ξ в $\{y \in R^n : |y| < 1\}$, обратима е и образът на $V_\xi \cap G$ с /19/ е някое от множествата

$$\{y \in R^n : |y| < 1, y_1 \geqq 0, \dots, y_j \geqq 0 \ (1 \leqq j \leqq n)\}$$

/т.е. $\bar{G}$ е еднократно гладко многообразие с ъгли в R^n [23] /.

Използуват се следните неравенства:

/20/ $$|ab| \leqq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q \quad \left(p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

/21/ $$2|ab| \leqq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2 \quad (\delta > 0),$$

/22/ $$\left(\sum_{\nu=1}^{N} |a_\nu|\right)^2 \leqq N \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu^2,$$

като последното не винаги се цитира изрично.

Също така се използуват и следните предложения за линейни оператори от вида /4/:

I. <u>Вариантът на принципа за максимум</u>: Нека операторът /4/ с /7/ е дефиниран в област $\Omega \subset R^n$ и $a(x) > 0$ в Ω. Тогава за всяка функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, за която $L(u) \geqq 0$ /респ. $L(u) \leqq 0$ / в Ω и $u|_{\partial\Omega} \leqq 0$ /респ. $u|_{\partial\Omega} \geqq 0$ / е в сила $u \leqq 0$ /респ. $u \geqq 0$ / в $\bar{\Omega}$. Доказателството се опира на факта, че във вътрешните точки на Ω, в които u достига положителен максимум, е в сила $L(u) < 0$ [24].

II. <u>Оценката на Фикера</u>: Нека операторът /4/ с /7/ е дефиниран в област $G \subset R^n$ с частично гладка граница, $a(x) > 0$ в G, $a^{ij} \in C^2(G)$, $a^i \in C^1(G)$ и $a \in C^0(G)$. Тогава за всяка функция $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, за която $L(u)$ е ограничен в G и

$$u \Big|_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3} = 0,$$

е в сила неравенството

$$\max_{\bar{G}} |u| \leqq \sup_{G} \left| \frac{L(u)}{a} \right| \tag{23}$$

/вж. [11], V/.

III. <u>Неравенството за главната част на оператора /4/ с /7/</u>: Нека $a^{ij} \in C^2(R^n)$ и вторите им производни са ограничени в R^n. Тогава е в сила неравенството

$$\left(a^{ij}_k(x) u_{ij}(x)\right)^2 \leqq c(n) \sup_{|\alpha|=2} |D^\alpha a^{ij}| \, a^{ij}(x) u_{ik}(x) u_{jk}(x) \tag{24}$$

за всяка функция $u \in C^2(R^n)$, като константата $c(n)$ зависи само от размерността n, вж. [15].

По-долу, освен ако не е изрично уговорено противното, це предполагаме, че:

а/ Ω е ограничена област в R^n от класа C^4, разположена локално от едната страна на границата си.

б/ Коефициентите на вторите производни на оператора /8/ с /2/ са дефинирани в $\bar{\Omega}' \times [-M, M]$, където $\Omega' \supset \bar{\Omega}$, $M > 0$ и са двукратно непрекъснато диференцируеми, а вторите им производни са липшицови в дефиниционната си област; освен това $\partial\Omega = S_3$, т.е.

$$a^{ij}(x, s) \varphi_i(x) \varphi_j(x) > 0 \tag{25}$$

върху $\partial\Omega \times [-M, M]$, където функцията $\varphi(x)$ дефинира контура на Ω .

в/ Останалите коефициенти са двукратно гладки, вторите им производни са липшицови в $\bar{\Omega}'\times[-M,M]$ и

/26/ $$a(x,v) = a_0 + c(x,v),$$

където a_0 е положителна константа и $c(x,v)\geqq 0$ в $\bar{\Omega}'\times[-M,M]$

г/ $f\in C^2(\bar{\Omega}')$ и вторите й производни са липшицови.

За оператор от вида /8/ с k пъти непрекъснато диференцируеми коефициенти нека m_ν $(\nu=0,1,\dots,k)$ са константи, за които

/27/ $$m_\nu \geqq \max_{\bar{\Omega}'\times[-M,M]} \{|D^{\alpha+p}a^{ij}|, |D^{\alpha+p}a^i|, |D^{\alpha+p}c|\},$$

където $|\alpha|+p=\nu$.

За функции $u\in C^k(\bar{\Omega})$ нека по дефиниция

/28/ $$|D^\nu u| = \max_{|\alpha|=\nu} \|D^\alpha u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \quad (\nu=0,1,\dots,k)$$

и

/29/ $$C_1(u) = m_1(1+|D^1 u|),$$

/30/ $$C_2(u) = m_2(1+|D^1u|+|D^1u|^2) + m_1|D^2u|,$$

/31/ $$C_3(u) = m_3(1+|D^1u|+|D^1u|^2+|D^1u|^3)$$
$$+ m_2(1+|D^1u|)|D^2u| + m_1|D^3u|,$$

стига u да притежава необходимите производни.

§ 2. АПРИОРНИ ОЦЕНКИ

В настоящия параграф са изведени някои априорни оценки, необходими при доказателствата на теоремите за съществуване. За тази цел се изучават операторите

/32/ $$L_\varepsilon(v;u) \equiv \varepsilon \Delta u + a^{ij}(x,v)u_{ij} + a^i(x,v)u_i - a(x,v)u,$$

където Δ е операторът на Лаплас, $\varepsilon \geqq 0$, а $v \in C^3(\bar{\Omega})$ е произволна функция с $\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} < M$. За коефициентите на операторите /32/ е предположено, че са в сила неравенствата /27/. В леми 1 - 3 при някои допълнителни предположения за ограниченост на функциите v са изведени независещи от v и ε априорни оценки за решенията и производните им до втори ред включително на граничните задачи

/33/ $$L_\varepsilon(v;u) = f(x)$$

в Ω и

/34/ $$u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Съществуването и единствеността на решение u поне от класа $C^3(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ при $\varepsilon > 0$ следват от известната теорема на Шаудер [2], стр. 235 поради предположенията а/ - г/ и $v \in C^3(\bar{\Omega})$.

ЛЕМА 1. Нека $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ е решение на граничната задача /33/, /34/. Тогава

/35/ $$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leqq \frac{1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\lambda = \frac{1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}$. Тогава от /26/, /32/ и /33/ следва

/36/ $$L_\varepsilon(v;\pm u - \lambda) = \pm f + a\lambda \geqq -\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + a_0\lambda = 0.$$

От

$$(\pm u - \lambda)\Big|_{\partial\Omega} \leqq 0,$$

/36/ и принципа за максимум следва

$$\pm u - \lambda \leqq 0$$

в $\bar{\Omega}$, т.е. /35/.

Нека ξ е произволна точка от $\partial\Omega$ и φ_ξ е функцията, с чиято помощ се дефинира $\partial\Omega$ в околност на ξ. Тъй като $grad\,\varphi_\xi \neq 0$, може да се предположи (с евентуална смяна на номерацията), че

$$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial x_n} \neq 0.$$

Нека V_ξ е околност на ξ в $\bar{\Omega}$, за която

$$a^{ij}(x,s)\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial x_j} > 0$$

за $(x,s) \in V_\xi \times [-M,M]$. Съществуването на такава околност следва от /25/ и от теоремата на Уолис [25], гл. V, т. 12. При това, без ограничение на общността може да се предположи, че трансформацията

$$/37/ \qquad \begin{cases} y_k = x_k & (k=1,\dots,n-1), \\ t = \varphi_\xi(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

е взаимно еднозначна в V_ξ и че V_ξ съдържа праобраза F_ξ на затвореното полукълбо

$$/38/ \qquad \left\{ (y,t) \in R^n : \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 + t^2 \leqq 4,\ t \geqq 0 \right\}.$$

Нека W_ξ са праобразите на множествата $\{|y|<1,\ t=0\}$ при трансформацията /37/. Тъй като множеството $\partial\Omega$ е компактно, съществуват краен брой точки $\xi_1, \dots, \xi_\rho$ с

$$/39/ \qquad \partial\Omega \subset W_{\xi_1} \cup \dots \cup W_{\xi_\rho}.$$

Нека $\varphi_{\xi_1}, \dots, \varphi_{\xi_\rho}$ са съответните им функции, а $F_{\xi_1}, \dots, F_{\xi_\rho}$ - съответните им компактни подмножества на $\bar{\Omega}$. Ясно е, че съществува такава константа $\alpha_0 > 0$, че да е в сила

/40/ $$a^{ij}(x,s)\frac{\partial\varphi_{\xi_r}}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_{\xi_r}}{\partial x_j}\geqq 2\alpha_0>0$$

върху $F_{\xi_r}\times[-M,M]\ (r=1,\dots,\rho)$. По-долу W, F и φ означават кои да са от тези краен брой множества и функции, а K - константа, която мажорира производните до трети ред включително на трансформациите /37/ и на обратните им трансформации.

Уравнението /33/ приема посредством трансформацията /37/ вида

/41/ $$\tilde{L}_\varepsilon(v;u)=Au_{tt}+2A^k u_{kt}+A^{kl}u_{kl}$$
$$+B^k u_k+Bu_t-Cu=F(y,t)$$

в полукълбото /38/, където

/42/ $$\begin{cases} A=a^{ij}\varphi_i\varphi_j+\varepsilon\varphi_i\varphi_i\geqq 2\alpha_0,\\ A^k=a^{ik}\varphi_i+\varepsilon\varphi_k \quad (k=1,\dots,n-1),\\ A^{kl}=a^{kl}+\delta_k^l\varepsilon \quad (k,l=1,\dots,n-1),\\ B=a^{ij}\varphi_{ij}+a^i\varphi_i+\varepsilon\Delta\varphi,\\ B^k=a^k \quad (k=1,\dots,n-1),\\ C=a \end{cases}$$

и δ_k^l означават символите на Кронекер. Разглеждат се също така и операторите

/43/ $$\tilde{M}_\varepsilon(v;u)\equiv Au_{tt}+2A^k u_{kt}+A^{kl}u_{kl}+B^k u_k+Bu_t.$$

Очевидно

/44/ $$\tilde{L}_\varepsilon(v;u)=\tilde{M}_\varepsilon(v;u)-Cu.$$

Нека $\psi(y_1,\dots,y_{n-1})$ е двукратно непрекъснато диференцируема функция, която удовлетворява

/45/ $$0\leqq\psi\leqq 1$$

и

/46/ $$\psi(y)=\begin{cases}1 & \text{при } |y|<1,\\ 0 & \text{при } |y|>2,\end{cases}$$

и нека $\varkappa$ е константа, за която

/47/ $$\left|\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right|\leqq\varkappa\,,\quad\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k\partial y_l}\right|\leqq\varkappa\quad(k,l=1,\ldots,n-1).$$

По-долу ще са необходими стойностите на оператора /43/ за функции от вида

/48/ $$w(y,t)=e^{-\gamma t+\beta\psi(y)}\,,$$

където β и γ са положителни константи, а функцията ψ е дефинирана, както по-горе. От /42/, /43/ и /48/ следва

$$\tilde{M}_\varepsilon(v;w)=w\{A\gamma^2-(2A^k\beta\psi_k+B)\gamma$$
$$-(A^{kl}\beta^2\psi_k\psi_l+A^{kl}\beta\psi_{kl}+B^k\beta\psi_k)\}$$
$$=w\{\gamma^2(a^{ij}\varphi_i\varphi_j+\varepsilon\varphi_i\varphi_i)$$
$$-\gamma[(a^{ik}+\varepsilon\delta_i^k)\varphi_i\psi_k\beta+a^{ij}\varphi_{ij}+\varepsilon\Delta\varphi+a^i\varphi_i]$$
$$-(a^{kl}+\varepsilon\delta_k^l)(\beta^2\psi_k\psi_l+\beta\psi_{kl})+a^k\beta\psi_k\},$$

където сумирането е от 1 до n спрямо i и j, а от 1 до $n-1$ спрямо k и l. От първото неравенство /42/ следва, че съществува константа $\gamma_0(\beta)$, за която от $\gamma\geqq\gamma_0(\beta)$ да следва

/49/ $$\tilde{M}_\varepsilon(v;w)\geqq\alpha_0\gamma^2 w.$$

Елементарни пресмятания показват, че /49/ е сигурно изпълнено при

$$\gamma_0(\beta)\geqq\max\Big\{\frac{1}{\alpha_0}\big|(a^{ik}+\varepsilon\delta_i^k)\varphi_i\psi_k\beta+a^{ij}\varphi_{ij}$$
$$+\varepsilon\Delta\varphi+a^i\varphi_i\big|+\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}\big|(a^{kl}+\varepsilon\delta_k^l)(\beta^2\psi_k\psi_l+\beta\psi_{kl})$$
$$+a^k\beta\psi_k\big|^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

или, за достатъчно малки ε, при

/50/ $$\gamma_0(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{\alpha_0}}(\varkappa\beta+1)\left(\frac{K}{\sqrt{\alpha_0}}(n+1)^2+(n-1)\right)+\beta$$

$$> \frac{m_0 K}{\alpha_0}(n^2\varkappa\beta+n^2+n+1)$$

$$+ \frac{m_0}{\sqrt{\alpha_0}}\left[(n-1)^2\varkappa^2\beta^2+(n-1)^2\varkappa\beta+(n-1)\varkappa\beta+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

поради /47/, /26/ и /27/. От /50/ очевидно следва $\beta < \gamma_0(\beta)$.

Често се използува очевидното тъждество

/51/ $$L_\varepsilon(v; uw) = u L_\varepsilon(v; w) + w L_\varepsilon(v; u)$$

$$+ a^{ij}(u_i w_j + u_j w_i) + 2\varepsilon u_i w_i + auw$$

за произволни двукратно диференцируеми функции u и w, както и тъждеството

/52/ $$L_\varepsilon(v; u^N) = N u^{N-1} L_\varepsilon(v; u) + (N-1)au^N$$

$$+ N(N-1)u^{N-2} S_\varepsilon(u)$$

за произволна двукратно диференцируема функция u и произволно естествено число $N \geqq 2$, където по дефиниция

/53/ $$S_\varepsilon(u) = a^{ij}u_i u_j + \varepsilon u_i u_i$$

при $\varepsilon \geqq 0$. Тъждеството /52/ се доказва индуктивно, като се използува /51/ с $w = u$.

Както е известно, една функция $v \in C^2(\bar{\Omega})$ може да се продължи до функция $\tilde{v} \in C^2(R^n)$ по такъв начин, че да е в сила

/54/ $$\|\tilde{v}\|_{C^2(R^n)} \leqq \varkappa_1 \|v\|_{C^2(\bar{\Omega})},$$

където константата $\varkappa_1$ зависи само от контура на областта Ω, стига последният да е поне двукратно гладък. Това може да се постигне например както в [26], § 8.1 чрез разлагане на единицата, локално изправяне на контура и отражения.

Нека $\chi \in C^{2}(R^n)$, $\chi = 1$ в околност на $\bar{\Omega}$ и носителят на χ се съдържа в Ω'. Ако $\varkappa_1 \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} < M$, то

/55/ $$\chi(x)\, a^{ij}(x, \tilde{v})$$

удовлетворява предположенията на предложение III от предишния параграф. Сега от /24/, /29/, /53/ и /54/ следват неравенствата

/56/ $$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} a^{ij}(x,v)\, u_{ij}\right)^2 \leqq \varkappa_2 \bar{C}_2(v)\bigl(a^{ij}(x,v)u_{ik}u_{jk} + \varepsilon u_{ik}u_{ik}\bigr) = \varkappa_2 C_2(v) \sum_{k=1}^{n} S_\varepsilon(u_k)$$

в $\bar{\Omega}$, където константата $\varkappa_2$ зависи само от контура на Ω, от разстоянието между $\partial\Omega$ и $\partial\Omega'$ и от n.

ЛЕМА 2. Нека константата a_0 е такава, че множеството V' на функциите $v \in C^3(\bar{\Omega})$ с $\varkappa_1 \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} < M$, които удовлетворяват неравенството

/57/ $$2a_0 > 3 + 2(n+1)\, C_1(v)$$

да е непразно. Тогава първите производни на решенията $u = u(v, \varepsilon)$ на граничните задачи /33/, /34/ са равномерно ограничени спрямо $v \in V'$ и $\varepsilon > 0$ в $\bar{\Omega}$.

Д о к а з а т е л с т в о. За да се оценят производните по контура на областта Ω, нека u е решение на граничната задача /33/, /34/. Да разгледаме функцията

$$w_1 = \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}\, e^{-\gamma_1 t + \beta_1 \psi}$$

в областта $0 < t < \frac{\beta_1}{\gamma_1}\psi(y)$. От лема 1, /45/, /46/ и

$$e^{\beta} > 1 + \beta \qquad (\beta > 0)$$

за $\beta_1 = \dfrac{1}{a_0}$ следва

$$\|f\|_{C^0(\bar\Omega)} \pm u \leq \|f\|_{C^0(\bar\Omega)} + \frac{1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar\Omega)} \leq \|f\|_{C^0(\bar\Omega)} e^{\frac{1}{a_0}}.$$

Ето защо максимумите на функциите

/58/ $$w_1 \pm u$$

по контура на разглежданата област се достигат върху онази негова част, където $t = 0$ и $\psi(y) = 1$. Нека

/59/ $$\gamma_1 = \gamma_0\left(\frac{1}{a_0}\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}\left(2 + \frac{m_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сега от /41/, /44/, лема 1 и /27/ следва

/60/ $$\left|\tilde M_\varepsilon(v; \pm u)\right| = \left|\pm F \pm Cu\right| \leq \|f\|_{C^0(\bar\Omega)} + \frac{m_0 + a_0}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar\Omega)} = \left(2 + \frac{m_0}{a_0}\right)\|f\|_{C^0(\bar\Omega)}.$$

От /49/, /50/, /59/ и /60/ следва

$$\tilde M_\varepsilon(v; w_1 \pm u) \geq \alpha_0 w_1 \gamma_1^2 \pm F \pm Cu > 0,$$

тъй като минимумът на функцията w_1 е $\|f\|_{C^0(\bar\Omega)}$. От принципа за максимум сега следва, че максимумите на функциите /58/ се достигат върху контура на разглежданата област; съгласно казаното по-горе това става върху онази негова част, където $t = 0$ и $\psi(y) = 1$. Ето защо

/61/ $$-\frac{\partial}{\partial t}(w_1 \pm u)\Big|_{\substack{t=0\\ \psi=1}} = \|f\|_{C^0(\bar\Omega)}\gamma_1 e^{\beta_1} \mp \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\ \psi=1}} \geq 0.$$

Сега от /61/ и /57/ следва

/62/ $$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\Big|_{\substack{t=0\\ \psi=1}} \leq \gamma_1 e^{\frac{1}{a_0}}\|f\|_{C^0(\bar\Omega)} \leq 2\gamma_1\|f\|_{C^0(\bar\Omega)}$$

Тъй като от /34/ следва

$$\frac{\partial u}{\partial y_k}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1).$$

от /62/ се получава

/63/ $$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqq 2K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

върху праобраза W на множеството $\{(y,t) : t=0, \psi(y)=1\}$ при трансформацията /37/. Понеже съгласно /39/ тези праобрази покриват $\partial\Omega$, /63/ е в сила върху $\partial\Omega$, т.е.

/64/ $$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Big|_{\partial\Omega} \leqq 2K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \quad (i=1,\dots,n)$$

С това първите производни са оценени по контура.

За произволно естествено m нека

/65/ $$P^m = \sum_{k=1}^{n} u_k^{2m}.$$

От /52/ следва

/66/ $$L_\varepsilon(v; P^m) = 2m u_k^{2m-1} L_\varepsilon(v; u_k)$$
$$+ (2m-1).aP^m + 2m(2m-1)u_k^{2(m-1)} S_\varepsilon(u_k).$$

Чрез диференциране спрямо x_k $(k=1,\dots,n)$ от /33/ следва

/67/. $$L_\varepsilon(v; u_k) = f_k - \bar{a}_k^{ij} u_{ij} - \bar{a}_k^i u_i + \bar{a}_k u,$$

като тук и по-долу с чертичка е означена пълната производна, например

/68/ $$\bar{a}_k = \frac{\partial a}{\partial x_k} + \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_k} = a_k + a_s v_k.$$

От /20/ с $p=2m$, $q=\frac{2m}{2m-1}$ и от /29/ следва

/69/ $$2m|f_k u_k^{2m-1}| \leqq \sum_{k=1}^{n} f_k^{2m} + (2m-1)P^m,$$

/70/ $$2m|\bar{a}_k^i u_k^{2m-1} u_i| \leqq C_1(v)\sum_{i,k=1}^{n} |u_i^{2m} + (2m-1)u_k^{2m}|$$
$$= 2mn\, C_1(v) P^m,$$

$$/71/ \quad 2m|\bar{a}_k u_k^{2m-1} u| \leqq C_1(v)\sum_{k=1}^{n}|u^{2m}+(2m-1)u_k^{2m}|$$

$$= nC_1(v)u^{2m}+(2m-1)C_1(v)P^m.$$

Накрая, от /21/, /30/ и /56/ следва

$$/72/ \quad 2m|u_k^{2m-1}\bar{a}_k^{ij}u_{ij}| \leqq m\sum_{k=1}^{n}u_k^{2m-2}\left(\frac{1}{\delta}u_k^2+\delta(\bar{a}_k^{ij}a_{ij})^2\right)$$

$$\leqq \frac{m}{\delta}P^m + mn\delta\varkappa_2 C_2(v)u_k^{2m-2}S_\varepsilon(u_k).$$

Сега от /66/-/72/ следва

$$/73/ \quad L_\varepsilon(v;P^m) \geqq m\{2(2m-1)-\delta n\varkappa_2 C_2(v)\}u_k^{2m-2}S_\varepsilon(u_k)$$

$$+\left\{(2m-1)a_0-\left[\frac{m}{\delta}+(2m-1)+(2mn+2m-1)C_1(v)\right]\right\}P^m$$

$$-nC_1(v)u^{2m}-\sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha f\|^{2m}_{C^0(\bar\Omega)}.$$

От лема 1 и /57/ следва

$$/74/ \quad nC_1(v)u^{2m} \leqq \|f\|^{2m}_{C^0(\bar\Omega)}$$

От /57/ следва, че при $\delta = 1$ за всички достатъчно големи m е в сила

$$/75/ \quad 2(2m-1)-n\varkappa_2 C_2(v) > 0.$$

Също така за всички достатъчно големи m коефициентът на P^m в /73/ е неотрицателен. Сега от /73/-/75/ следва

$$/76/ \quad L_\varepsilon(v;P^m) \geqq -\sum_{|\alpha|\leqq 1}\|D^\alpha f\|^{2m}_{C^0(\bar\Omega)}.$$

Нека

$$/77/ \quad \lambda_m = \max\left\{\frac{1}{a_0}\sum_{|\alpha|\leqq 1}\|D^\alpha f\|^{2m}_{C^0(\bar\Omega)},\right.$$

$$\left. n(2K\gamma_1)^{2m}\|f\|^{2m}_{C^0(\bar\Omega)}\right\}.$$

От /64/, /65/, /76/ и /77/ следва

/78/ $$L_\varepsilon(v; p^m - \lambda_m) \geqq 0$$

и

/79/ $$(p^m - \lambda_m)\Big|_{\partial\Omega} \leqq 0.$$

От /78/, /79/ и принципа за максимум следва

$$p^m \leqq \lambda_m$$

в $\bar{\Omega}$, откъдето

/80/ $$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \leqq \sqrt[2m]{p^m} \leqq \sqrt[2m]{\lambda_m}$$

$$\leqq \left\{ \frac{1}{\sqrt[2m]{a_0}} \sum_{|\alpha| \leqq 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})}, \sqrt[2m]{n}\, 2K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right\}.$$

Тъй като /80/ е в сила за всички достатъчно големи m , чрез граничен преход при $m \to \infty$ се получава

/81/ $$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \leqq \max\left\{ \sum_{|\alpha| \leqq 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})}, 2K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right\}$$

$$\leqq \sum_{|\alpha| \leqq 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}.$$

Тъй като дясната страна на /81/ не зависи от v и ε , доказателството на лема 2 е завършено.

ЛЕМА 3. Нека константата a_0 е такава, че множеството V'' на функциите $v \in C^3(\bar{\Omega})$ с $\varkappa_1 \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} < M$ и

$$|D^1 v| \leqq \sum_{|\alpha| \leqq 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})},$$

които удовлетворяват

/82/ $$a_0 > 1 + (4n+2)C_1(v) + (2n\varkappa_2 + 2n^2 + n + 1)C_2(v)$$

да не е празно. Тогава вторите производни на решенията на граничните задачи /33/, /34/ са равномерно ограничени в $\bar{\Omega}$ спрямо $v \in V''$ и $\varepsilon > 0$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека

/83/ $$Q = \sum_{k,l=1}^{n} u_{kl}^2 .$$

При

$$S_\varepsilon(Q) = \sum_{k,l=1}^{n} S_\varepsilon(u_{kl})$$

от /52/ с $N = 2$ следва

/84/ $$L_\varepsilon(v; u_{kl}) = 2u_{kl} L_\varepsilon(v; u_{kl}) + aQ + 2S_\varepsilon(Q).$$

От /33/ с диференциране спрямо x_k и x_l $(k, l = 1, \ldots, n)$ следва

/85/ $$L_\varepsilon(v; u_{kl}) = f_{kl} - \bar{a}^{ij}_k u_{ijl} - \bar{a}^{ij}_l u_{ijk} - \bar{a}^{ij}_{kl} u_{ij}$$

$$- \bar{a}^i_k u_{il} - \bar{a}^i_l u_{ik} - \bar{a}^i_{kl} u_i + \bar{a}_k u_l + \bar{a}_l u_k + \bar{a}_{kl} u.$$

От /21/, /30/ и /56/ следва

/86/ $$2 \left| u_{kl} (\bar{a}^{ij}_k u_{ijl} + \bar{a}^{ij}_l u_{ijk}) \right|$$

$$\leqq 4\delta n \varkappa_2 C_2(v) S_\varepsilon(Q) + \frac{1}{\delta} Q.$$

От /21/ с $\delta = 1$, /29/ и /40/ следват неравенствата

/87/ $$2 |f_{kl} u_{kl}| \leqq \sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha f \|^2_{C^0(\bar{\Omega})} + Q,$$

/88/ $$2 |\bar{a}^{ij}_{kl} u_{ij} u_{kl}| \leqq 2n^2 C_2(v) Q,$$

/89/ $$2 \left| u_{kl} (\bar{a}^i_k u_{il} + \bar{a}^i_l u_{ik}) \right| \leqq 4n C_1(v) Q,$$

/90/ $$2 |u_{kl} \bar{a}^i_{kl} u_i| \leqq n C_2(v) Q + n^2 C_2(v) P,$$

/91/ $$2\left|u_{kl}(\bar a_k u_l + \bar a_l u_k)\right| \leqq 2C_1(v)Q + 2nC_1(v)P,$$

/92/ $$2\left|u_{kl}\bar a_{kl} u\right| \leqq C_2(v)Q + n^2C_2(v)u^2,$$

където $P = P^1$ в /90/ и /91/, вж. /65/. От /84/-/92/ следва

/93/ $$L_\varepsilon(v;Q) \geqq (2 - 4\varepsilon n\varkappa_2 C_2(v))S_\varepsilon(Q)$$
$$+ \left\{a_0 - 1 - \varepsilon - 2(2n+1)C_1(v) - (2n^2+n+1)C_2(v)\right\}Q$$
$$- \left\{n^2C_2(v) + 2nC_1(v)\right\}P - n^2C_2(v)u^2 - \sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha f\|^2_{C^0(\bar\Omega)}$$

От /93/ с $\varepsilon = \dfrac{1}{2n\varkappa_2 C_2(v)}$, /73/ с $\varepsilon = \dfrac{2}{n\varkappa_2 C_2(v)}$, $m = 1$ и

$$L_\varepsilon(v;u^2) \geqq (a_0-1)u^2 - \|f\|^2_{C^0(\bar\Omega)}$$

следва

/94/ $$L_\varepsilon(v;u^2+P+Q)$$
$$\geqq \left\{a_0 - 1 - 2(2n+1)C_1(v) - (2n\varkappa_2 + 2n^2+n+1)C_2(v)\right\}Q$$
$$+ \left\{a_0 - 1 - (4n+1)C_1(v) - (n\varkappa_2 + n^2)C_2(v)\right\}P$$
$$+ \left\{a_0 - 1 - nC_1(v) - n^2C_2(v)\right\}u^2 - \|f\|^2_{C^2(\bar\Omega)}$$

Тъй като съгласно /82/ множителите на u^2, P и Q са неотрицателни, от /94/ и принципа за максимум следва

/95/ $$u^2 + P + Q \leqq \max\left\{\frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C^2(\bar\Omega)},\ \max_{\partial\Omega}(u^2+P+Q)\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C^2(\bar\Omega)} + \max_{\partial\Omega}(u^2+P+Q),$$

както при доказателството на лема 2. Сега от /95/, /34/, /64/ и /65/ с $m = 1$ следва

/96/ $$u^2+P+Q \leqq \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C^1(\bar\Omega)}+4nK^2\gamma_1^2\|f\|^2_{C^0(\bar\Omega)}+\max_{\partial\Omega} Q.$$

За намиране на оценки на вторите производни по границата, нека

/97/ $$q=(\max_{\partial\Omega} Q)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$w_2=e^{-\gamma_2 t+\beta_2\psi(y)}$$

в областта $0<t<\frac{\beta_2}{\gamma_2}\psi(y)$, където β_2 е толкова голямо, че

/98/ $$e^{\beta_2}>1+\left|\frac{\partial u}{\partial y_m}\right| \quad (m=1,\dots,n-1)$$

в разглежданата област. От лема 2 следва, че /98/ е сигурно изпълнено при

/99/ $$\beta_2=\ln(2+K\|f\|_{C^1(\bar\Omega)}+2n\gamma_1K^2\|f\|_{C^0(\bar\Omega)}).$$

Да разглеждаме функцията

/100/ $$w_2 \pm \frac{\partial u}{\partial y_m} \qquad (m=1,\dots,n-1).$$

От /41/ с диференциране спрямо y_m $(m=1,\dots,n-1)$ се получава

/101/ $$\tilde L_\varepsilon\left(v;\frac{\partial u}{\partial y_m}\right)=-\frac{\partial\bar A^{kl}}{\partial y_m}u_{kl}-2\frac{\partial \bar A^k}{\partial y_m}u_{kt}$$

$$-\frac{\partial\bar A}{\partial y_m}u_{tt}-\frac{\partial\bar B^k}{\partial y_m}u_k-\frac{\partial\bar B}{\partial y_m}u_t+\frac{\partial\bar C}{\partial y_m}u+\frac{\partial F}{\partial y_m}.$$

Лесно се вижда, че

$$\left|\frac{\partial\bar A^{kl}}{\partial y_m}\right|\leqq M_1(n,m_1,K)(1+|D'v|)$$

$$\leqq M_1(n,m_1,K)(1+\|f\|_{C^1(\bar\Omega)}+2K\gamma_1\|f\|_{C^0(\bar\Omega)})=M_1,$$

където константата M_1 не зависи от $v \in V''$ и $\varepsilon > 0$. Аналогични неравенства са валидни и за производните на останалите коефициенти в /101/, т.е.

$$/102/ \quad M_1 \geq \max\left\{ \left|\frac{\partial \bar{A}^{kl}}{\partial y_m}\right|, \left|\frac{\partial \bar{A}^{k}}{\partial y_m}\right|, \left|\frac{\partial \bar{A}}{\partial y_m}\right|, \left|\frac{\partial \bar{B}^{k}}{\partial y_m}\right|, \left|\frac{\partial \bar{B}}{\partial y_m}\right|, \left|\frac{\partial \bar{C}}{\partial y_m}\right| \right\} \quad (m = 1, \ldots, n-1).$$

Сега от /101/ и /102/ следва

$$/103/ \quad \left|\tilde{L}_\varepsilon\left(v; \frac{\partial u}{\partial y_m}\right)\right| \leq M_1 \left\{ \sum_{k,l=1}^{n-1} |u_{kl}| + 2\sum_{k=1}^{n-1} |u_{kt}| + |u_{tt}| + \sum_{k=1}^{n-1} |u_k| + |u_t| + |u| \right\} + K\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})}$$

$$\leq (n+1)^2 K M_1 (u^2 + P + Q)^{\frac{1}{2}} + K\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})}$$

От /96/, /97/ и /103/ следва

$$/104/ \quad \left|\tilde{L}_\varepsilon\left(v; \frac{\partial u}{\partial y_m}\right)\right| \leq (n+1)^2 K M_1 q + K\left\{ \|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} + (n+1)^2 M_1 \left[\frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} + 2\sqrt{n} K \gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right] \right\}.$$

Нека за краткост

$$T(f) = K\left\{ (n+1)^2 M_1 \left[\frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} + 2\sqrt{n} K\gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right] + \|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right\}.$$

От /43/, /49/ и /104/ следва, че ако

/105/
$$\gamma_2 = \gamma_0(\beta_2) + \left(\frac{m_0 + a_0}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}\left[(n+1)^2 K M_1 q + T(f)\right]^{\frac{1}{2}},$$

то

/106/
$$\tilde{L}_\varepsilon\left(v; w_2 \pm \frac{\partial u}{\partial y_m}\right) \geq 0 \quad (m = 1, \ldots, n-1),$$

тъй като минимумът на функцията w_2 е равен на 1. Също както в доказателството на лема 2, от /98/ и /106/ следва, че максимумите на функциите /100/ се достигат върху онази част на границата на разглежданата област, където $t = 0$, $\psi(y) = 1$. Отново както в доказателството на лема 2 се получава

/107/
$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y_m \partial t}\right| \leq \gamma_2 e^{\beta_2} \quad (m = 1, \ldots, n-1)$$

при $t = 0$, $\psi(y) = 1$. От уравнението /41/, от първото от равенствата /42/, от /107/, /62/ и

/108/
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial y_k}\right|_{t=0} = u\Big|_{t=0} = 0 \quad (k, l = 1, \ldots, n-1)$$

се получава

/109/
$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \leq \frac{1}{2\alpha_0}\left(\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2 m_0 \gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2(n-1) m_0 \gamma_2 e^{\beta_2}\right).$$

Тъй като поради /39/, /107/-/109/ са в сила в околност на образа на всяка гранична точка на Ω, от

/110/
$$q \leq K\left(\sum_{k,l=1}^{n-1} |u_{kl}| + 2\sum_{k=1}^{n-1} |u_{kt}| + |u_{tt}|\right)\Big|_{t=0} + K\left(\sum_{k=1}^{n-1} |u_k| + |u_t|\right)\Big|_{t=0}$$

и от /62/, /107/-/109/ следва

/111/ $$0 \leqq q \leqq 2K(n-1)\left(1+\frac{m_0}{2\alpha_0}\right)\gamma_2 e^{\beta_2} + K\left(\frac{1+2m_0\gamma_1}{2\alpha_0}+2\gamma_1\right)\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

Сега от /99/, /105/ и /111/ следва

/112/ $$0 \leqq q \leqq A\sqrt{q} + B,$$

където

$$A = 2K(n^2-1)\left(1+\frac{m_0}{2\alpha_0}\right)\left[2+K\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} + 2K\gamma_1\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right]\sqrt{\frac{KM_1}{\alpha_0}}$$

и

$$B = 2K(n^2-1)\left(1+\frac{m_0}{2\alpha_0}\right)\left[2+K\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} + 2K\gamma_1\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right]\left[\gamma_0(\beta_2) + \left(\frac{m_0+a_0}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{T(f)}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + K\left(\frac{1+2m_0\gamma_1}{\alpha_0}+\gamma_1\right)\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}.$$

Елементарни пресмятания показват, че от /112/ следва неравенството

/113/ $$0 \leqq q \leqq B + \frac{A^2 + A\sqrt{A^2+4B}}{2} \leqq A^2+2B.$$

Тъй като A и B не зависят от v и ε, с това е доказана равномерната ограниченост на вторите производни. По-точно, от /83/, /95/-/97/ и /113/ следва

/114/ $$|D^2u| \leqq (u^2+P+Q)^{\frac{1}{2}} \leqq \max\left\{\frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})},\ 2\sqrt{n}K\gamma_1\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + A^2+2B\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})} + 2\sqrt{n} K \gamma_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + A^2 + 2B.$$

ЗАБЕЛЕЖКА 1. Неравенствата /81/ и /114/ могат да се запишат съответно във вида

/115/ $$|D^1 u| \leq \max\Big\{ \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})} ; \mu_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \Big\}$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \mu_1 \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

и

/116/ $$|D^2 u| \leq (u^2 + P + Q)^{\frac{1}{2}} \leq \max\Big\{ \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})},$$

$$\mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_0}} \Big\} \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_0}},$$

където константите μ_1, μ_2 и μ_3 зависят от m_0, m_1, m_2, α_0, K, f и a_0, но не нарастват с a_0 и не зависят от v и ε.

ЗАБЕЛЕЖКА 2. Предположението $\varepsilon > 0$ в доказателствата на лемми 1 – 3 се използува само, за да осигурява съществуването на решения $u \in C^3(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$. Веднага се вижда обаче, че лемите остават в сила и при $\varepsilon = 0$, ако се предположи съществуването на решения с необходимата гладкост. В частност, всичките константи, които се появяват в доказателствата, са независими от ε. Във формулировката на теорема 1 по-долу се предполага, че константите m_0, m_1 и m_2 удовлетворяват /27/, тъй като са точните максимуми, константата $2\alpha_1 = \alpha_0$ се дефинира с /40/, а константите $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – съответно с /54/ и /56/. Тъй като и K зависи само от $\partial\Omega$ и от коефициентите на оператора /8/, предполага се, че константите μ_1, μ_2 и μ_3 се дефинират чрез m_0, m_1, m_2, α_0, a_0, K и f, както е посочено в забележка 1, но зависят от f чрез нормите и в Ω', а не само в $\bar{\Omega}$.

§ 3. ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ, КОГАТО ЦЕЛИЯТ КОНТУР Е НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕН

В настоящия параграф се доказва теорема за съществуване и единственост, когато за контура на областта Ω , в която се разглежда уравнението /1/, е в сила неравенството /25/, т.е. когато целият контур на тази област е нехарактеристичен за уравнението.

ТЕОРЕМА 1. Нека операторът /8/ с /2/, областта Ω и функцията f удовлетворяват предположенията а/ – г/ от § 1, а функцията f и константата a_0 удовлетворяват неравенствата

/117/
$$\frac{\varkappa_1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar\Omega')} < M$$

и

/118/
$$a_0 > 2 + (12n+6)m_1\Big[1+\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha f\|_{C^0(\bar\Omega')} + \mu_1\|f\|_{C^0(\bar\Omega')}\Big] + \max\Big\{\sqrt{12n^5},\, 9n\varkappa_2 + 12n^2 + 12n + 6\Big\}\Big\{m_1\Big(\frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_{C^2(\bar\Omega')} + \mu_2 + \mu_3\sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}}\Big) + m_2\sum_{\nu=0}^{2}\Big(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha f\|_{C^0(\bar\Omega')} + \mu_1\|f\|_{C^0(\bar\Omega')}\Big)^\nu\Big\}.$$

Тогава граничната задача

/119/
$$L(u) = f$$

в Ω и

/120/
$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

притежава единствено класическо решение.

ЗАБЕЛЕЖКА 3. Неравенствата /117/ и /118/ показват, че за всяка дадена функция $f \in C^2(\bar{\Omega}')$, на която втрите производни са липшицови, граничната задача /119/, /120/ притежава класическо решение, стига константата a_0 да е достатъчно голяма.

Доказателство на теорема 1.

Съществуване. Нека $\omega_1(x)$ и $\omega(x,s)$ са безкрайно гладки функции, дефинирани съответно в R^n и R^{n+1}, които удовлетворяват условията

$$0 \leq \omega_1(x), \quad \operatorname{supp} \omega_1 \subset \{x \in R^n : |x| < 1\}, \quad \int_{R^n} \omega_1(x)\,dx = 1$$

и

/121/ $$0 \leq \omega(x,s), \quad \operatorname{supp} \omega \subset \{(x,s) \in R^{n+1} : |x|^2 + s^2 < 1\}, \quad \int_{R^{n+1}} \omega(x,s)\,dx\,ds = 1$$

/ ω и ω_1 могат да се дефинират например както в [27] /. За $\varepsilon > 0$ образуваме средните функции от коефициентите на оператора /8/ и от дясната страна на /1/, вж. [28]:

/122/ $$a^{ij}_\varepsilon(x,s) = \varepsilon^{-n-1} \int_{\Omega' \times [-M,M]} a^{ij}(\xi,\sigma)\, \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi\, d\sigma,$$

/123/ $$a^{i}_\varepsilon(x,s) = \varepsilon^{-n-1} \int_{\Omega' \times [-M,M]} a^{i}(\xi,\sigma)\, \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi\, d\sigma,$$

/124/ $$c_\varepsilon(x,s) = \varepsilon^{-n-1} \int_{\Omega' \times [-M,M]} c(\xi,\sigma)\, \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi\, d\sigma,$$

/125/ $$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\Omega'} f(\xi)\, \omega_1\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right) d\xi .$$

Както е известно, функциите /122/-/125/ са безкрайно гладки с компактни носители в R^{n+1} и R^n, които върху всяко компактно подмножество $\Omega' \times [-M, M]$ и Ω' клонят равномерно съответно към функциите $a^{ij}(x,s)$, $a^i(x,s)$, $c(x,s)$ и $f(x)$.

Нека Ω'' е област в R^n, която съдържа носителя на функцията χ от /55/ и $\Omega'' \subset \Omega'$. Нека освен това

$$0 < \delta < M - \frac{\varkappa_1}{a_0} \|f\|_{C^0(\bar{\Omega}')} .$$

Очевидно $\bar{\Omega} \subset \Omega''$. При всички достатъчно малки $\varepsilon > 0$ за функциите /122/-/124/ са в сила неравенствата

/126/ $$m_k \geq \max_{\bar{\Omega}'' \times [-M+\delta, M-\delta]} \left\{ |D^{\alpha+p} a_\varepsilon^{ij}|, |D^{\alpha+p} a_\varepsilon^i|, |D^{\alpha+p} c_\varepsilon| \right\}$$

/ $|\alpha| + p = k$, $k = 0, 1, 2$/. Наистина, нека

/127/ $$\varepsilon_0 \leq dist(\bar{\Omega}'', \partial\Omega'), \quad \varepsilon_0 \leq \delta .$$

Тогава, както е известно / [27], 1.2.2/, е в сила

$$\varepsilon^{-n-1} \int_{\Omega' \times [-M, M]} \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi d\sigma = 1$$

за $(x, s) \in \bar{\Omega}'' \times [-M+\delta, M-\delta]$ при всяко $\varepsilon < \varepsilon_0$. Нека $\chi_{\Omega', M}$ е характеристичната функция на множеството $\bar{\Omega}' \times [-M, M]$. Тогава /124/ например е равносилно с

/128/ $$c_\varepsilon(x, s) = \varepsilon^{-n-1} \int_{R^{n+1}} \chi_{\Omega', M}(\xi, \sigma) c(\xi, \sigma) \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi d\sigma$$

$$= \int_{R^{n+1}} \chi_{\Omega', M}(x - \varepsilon\xi, s - \varepsilon\sigma) c(x - \varepsilon\xi, s - \varepsilon\sigma) \omega(\xi, \sigma) d\xi d\sigma .$$

Нека $(x, s) \in \Omega'' \times [-M+\delta, M-\delta]$. Поради /127/ тогава е в сила

$(x-\varepsilon\xi, s-\varepsilon\sigma) \in \Omega' \times [-M, M]$, функцията c е диференцируема в околност на тази точка и $\chi_{\Omega', M}$ има стойност 1. Като диференцираме под знака на интеграла, получаваме

$$/129/ \quad D^{\alpha+p} c_\varepsilon(x,s) = \int\limits_{R^{n+1}} \chi_{\Omega', M}(x-\varepsilon\xi, s-\varepsilon\sigma) D^{\alpha+p} c(x-\varepsilon\xi, s-\varepsilon\sigma)\, \omega(\xi,\sigma)\, d\xi\, d\sigma,$$

откъдето

$$|D^{\alpha+p} c_\varepsilon(x,s)| \leqq m_k \int\limits_{R^{n+1}} \chi_{\Omega', M}(x-\varepsilon\xi, s-\varepsilon\sigma)\, \omega(\xi,\sigma)\, d\xi\, d\sigma$$

$$= \frac{m_k}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_{\Omega' \times [-M,M]} \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi\, d\sigma = m_k .$$

Аналогично се доказват и другите неравенства /126/. Също така се установяват и неравенствата

$$/130/ \qquad \| f_\varepsilon \|_{C^k(\bar{\Omega})} \leqq \| f \|_{C^k(\bar{\Omega}')} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Валидни са и неравенствата

$$/131/ \quad a_\varepsilon^{ij}(x,s)\, \zeta_i \zeta_j = \varepsilon^{-n-1} \int\limits_{\Omega' \times [-M,M]} a^{ij}(\xi,\sigma)\, \zeta_i \zeta_j\, \omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right) d\xi\, d\sigma \geqq 0$$

за $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in R^n$, $(x,s) \in \bar{\Omega}'' \times [-M+\delta, M-\delta]$ и

$$/132/ \qquad c_\varepsilon(x,s) \geqq 0$$

в $\bar{\Omega}'' \times [-M+\delta, M-\delta]$.

Тъй като функциите $a_\varepsilon^{ij}(x,s)$ клонят равномерно към $a^{ij}(x,s)$ върху всяко компактно множество, при $\varepsilon < \varepsilon_0'$ ще бъде валидно неравенството

$$/133/ \qquad a_\varepsilon^{ij}(x,s) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \geqq 2\alpha_1$$

върху всяко от множествата $F \times [-M+\delta, M-\delta]$.

Сега може да се дефинира една редица $\{u_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ от функции по следния начин: $u_0 = 0$ и $u_{\nu+1}$ е единственото решение на граничната задача

/139/
$$L_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu, u_{\nu+1}) = f_{\varepsilon_{\nu+1}}$$

в Ω и

/140/
$$u_{\nu+1}\Big|_{\partial\Omega} = 0 .$$

По-точно, от теоремата на Шаудер следва, че съществува решение $u_1 \in C^3(\bar{\Omega}) \cap C^5(\Omega)$, а от лема 1 и /130/ следва

$$\| u_1 \|_{C^0(\bar{\Omega})} \leqq \frac{1}{a_0} \| f_{\varepsilon_1} \|_{C^0(\bar{\Omega})} \leqq \frac{1}{a_0} \| f \|_{C^0(\bar{\Omega}')}$$

Нека $u_\nu \in C^3(\bar{\Omega}) \cap C^5(\Omega)$ и

/141/
$$\| u_\nu \|_{C^0(\bar{\Omega})} \leqq \frac{1}{a_0} \| f \|_{C^0(\bar{\Omega}')}$$

Тогава уравнението /139/ има смисъл и има решение $u_{\nu+1} \in C^3(\bar{\Omega}) \cap C^5(\Omega)$ съгласно същата теорема. От лема 1 и /130/ сега следва /141/ за $\nu+1$. Като се използува лема 2 аналогично се доказват и неравенствата

/142/
$$| D^1 u_\nu | \leqq \sum_{|\alpha| \leqq 1} \| D^\alpha f \|_{C^0(\bar{\Omega}')} + \mu_1 \| f \|_{C^0(\bar{\Omega}')}$$

По-точно, от /126/, /131/-/133/ и /138/ следва, че за операторите /137/ при $\nu = 1, 2, \ldots$ са изпълнени предположенията а/ ÷ г/ от § 1 в $\bar{\Omega}'' \times [-M+\delta, M-\delta]$ с α_1 вместо α_0, а от /141/, /117/ и /118/ следва, че множеството V' не е празно, като в частност $0 \in V'$. Сега от лема 2 следва

/143/
$$| D^1 u_1 | \leqq \sum_{|\alpha| \leqq 1} \| D^\alpha f_{\varepsilon_1} \|_{C^0(\bar{\Omega})} + \mu_1 \| f_{\varepsilon_1} \|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

От /143/ и /130/ следва /142/ за $\nu = 1$. Нека /142/ е в сила за някое ν. Отново от /141/, /117/ и /118/ следва, че множеството V' не е празно и в частност, че $u_\nu \in V'$. Сега от лема 2, приложена за

$v = u_\nu$, $u = u_{\nu+1}$ следва

/144/ $$|D^1_i u_{\nu+1}| \leqq \sum_{|\kappa| \leqq 1} \|D^\alpha f_{\varepsilon_{\nu+1}}\|_{C^0(\bar\Omega)} + \mu_1 \|f_{\varepsilon_{\nu+1}}\|_{C^0(\bar\Omega)}$$

От /144/ и /130/ следва /142/ за $\nu + 1$.

След като /141/ и /142/ са вече установени, напълно аналогично, чрез прилагане на лема 3, се доказва верността на неравенствата

/145/ $$|D^2 u_\nu| \leqq (u_\nu^2 + P_\nu + Q_\nu)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar\Omega')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

където по дефиниция

$$P_\nu = \sum_{\kappa=1}^{n} \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\kappa}\right)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

и

$$Q_\nu = \sum_{\kappa, l=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_\kappa \partial x_l}\right)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

По-нататък доказателството на теоремата се основава на следващите две леми.

ЛЕМА 4. Третите производни на функциите u_ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ са равномерно ограничени в $\bar\Omega$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека

/146/ $$R_\nu = \sum_{\kappa, l, m=1}^{n} \left(\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial x_\kappa \partial x_l \partial x_m}\right)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \dots).$$

По-долу в доказателството на лемата за краткост е положено $u_\nu = u$, $u_{\nu-1} = v$ и $\varepsilon_\nu = \varepsilon$ за ν = 1, 2, ... и също така е изпуснат индексът ε_ν в кофицентите на уравненията /139/. Ако

$$S_\varepsilon(R_\nu) = \sum_{\kappa, l, m=1}^{n} S_\varepsilon(u_{\kappa l m}),$$

от /52/ с N = 2 следва

/147/ $$L_\varepsilon(v; R_\nu) = 2u_{\kappa l m} L_\varepsilon(v; u_{\kappa l m}) + 2S_\varepsilon(R_\nu) + aR_\nu.$$

С диференцирање спрямо x_k, x_l и x_m $(k,l,m=1,\dots,n)$ от /137/ и /139/ се получава

/148/ $$L_\varepsilon(v;u_{klm})=f_{klm}-\bar a^{ij}_k u_{ijlm}-\bar a^{ij}_l u_{ijkm}-\bar a^{ij}_m u_{ijkl}$$
$$-\bar a^{ij}_{kl}u_{ijm}-\bar a^{ij}_{km}u_{ijl}-\bar a^{ij}_{lm}u_{ijk}-\bar a^{i}_k u_{ilm}-\bar a^{i}_l u_{ikm}$$
$$-\bar a^{i}_m u_{ikl}-\bar a^{ij}_{klm}u_{ij}-\bar a^{i}_{kl}u_{im}-\bar a^{i}_{km}u_{il}-\bar a^{i}_{lm}u_{ik}$$
$$-\bar a^{i}_{klm}u_i+\bar a_k u_{lm}+\bar a_l u_{km}+\bar a_m u_{kl}+\bar a_{kl}u_m$$
$$+\bar a_{km}u_l+\bar a_{lm}u_k+\bar a_{klm}u.$$

От /21/, /56/ и /30/ следва

/149/ $$2\left|u_{klm}\left(\bar a^{ij}_k u_{ijlm}+\bar a^{ij}_l u_{ijkm}+\bar a^{ij}_m u_{ijkl}\right)\right|$$
$$\leq 9\delta n\varkappa_2 C_2(v)S_\varepsilon(R_v)+\frac{1}{\delta}R_v.$$

От /21/ и /29/-/31/ следва

/150/ $$2\left|u_{klm}\left(\bar a^{ij}_{kl}u_{ijm}+\bar a^{ij}_{lm}u_{ijk}+\bar a^{ij}_{mk}u_{ijl}\right)\right|$$
$$\leq 6n^2C_2(v)R_v,$$

/151/ $$2\left|u_{klm}\left(\bar a^{i}_k u_{ilm}+\bar a^{i}_l u_{ikm}+\bar a^{i}_m u_{ikl}\right)\right|$$
$$\leq 6n\,C_1(v)R_v,$$

/152/ $$2\left|u_{klm}\left(\bar a^{i}_{kl}u_{im}+\bar a^{i}_{lm}u_{ik}+\bar a^{i}_{mk}u_{il}\right)\right|$$
$$\leq 3n\,C_2(v)R_v+3n^2C_2(v)Q_v,$$

/153/ $$2\left|u_{klm}\left(\bar a_k u_{lm}+\bar a_l u_{km}+\bar a_m u_{kl}\right)\right|$$
$$\leq 3C_1(v)R_v+3n\,C_1(v)Q_v,$$

/154/ $$2\left|u_{klm}\left(\bar a_{kl}u_m+\bar a_{lm}u_k+\bar a_{km}u_l\right)\right|$$
$$\leq 3C_2(v)R_v+3n^2C_2(v)P_v,$$

/155/ $$2\left|u_{klm}\bar a^{ij}_{klm}u_{ij}\right|\leq \eta_1 n^2C_3(v)R_v+\frac{n^3}{\eta_1}C_3(v)Q_v,$$

/156/ $$2\left|u_{klm}\,\bar a^{i}_{klm}\,u_i\right| \leqq \eta_2 n\, C_3(v) R_\nu + \frac{n^3}{\eta_2} C_3(v) P_\nu ,$$

/157/ $$2\left|u_{klm}\,\bar a_{klm}\,u\right| \leqq \eta_3 C_3(v) R_\nu + \frac{n^3}{\eta_3} C_3(v) u_\nu^2 ,$$

/158/ $$2\left|u_{klm}\,f_{klm}\right| \leqq R_\nu + \sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha f_\varepsilon\|^2_{C^0(\bar\Omega)} .$$

От /147/-/158/ следва

/159/ $$\begin{aligned} L_\varepsilon(v;R_\nu) \geqq{} & \left(2 - 9\delta n \varkappa_2 C_2(v)\right) S_\varepsilon(R_\nu) \\ & + \Big\{ a_0 - 1 + (\eta_1 n^2 + \eta_2 n + \eta_3) C_3(v) - \frac{1}{\delta} \\ & - (6n^2+3n+3) C_2(v) - (6n+3) C_1(v) \Big\} R_\nu \\ & - \left[3n^2 C_2(v) + 3n C_1(v) + \frac{n^3}{\eta_3} C_3(v)\right] Q_\nu \\ & - \left[3n^2 C_2(v) + \frac{n^3}{\eta_2} C_3(v)\right] P_\nu - \frac{n^3}{\eta_3} C_3(v) u_\nu^2 \\ & - \sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha f_\varepsilon\|^2_{C^0(\bar\Omega)} \end{aligned}$$

От /159/ с

$$\delta = \frac{2}{9n\varkappa_2 C_2(v)}, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \frac{a_0}{6n^2 C_3(v)}$$

следва

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(v;R_\nu) \geqq{} & \Big\{ \frac{a_0}{2} - 1 - \left(\frac{9}{2} n \varkappa_2 + 6n^2 + 6n + 3\right) C_2(v) \\ & - (6n+3) C_1(v) \Big\} R_\nu - \frac{1}{a_0} 6n^5 C_3^2(v) (u_\nu + P_\nu + Q_\nu) \\ & - (3n^2 C_2(v) + 3n C_1(v)) Q_\nu - 3n^2 C_2(v) P_\nu - \sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha f_\varepsilon\|^2_{C^0(\bar\Omega)} \end{aligned}$$

От /31/ при $v = u_{\nu-1}$ и /146/ следва

$$C_3^2(v) \leqq 2m_1^2 R_{\nu-1} + M_2 ,$$

където поради /135/, /142/ и /145/ константата M_2 не зависи от ν.

От /118/ следва, че множителят на R_ν е неотрицателен, откъдето

/160/ $L_\varepsilon(v; R_\nu) \geqq -\frac{1}{a_0} 12n^5 m_1^2 \max R_{\nu-1} \max(u_\nu^2 + P_\nu + G_\nu) - M_3,$

като отново поради /142/ и /145/ константата M_3 не зависи от ν.
От /160/ и принципа за максимум следва

/161/ $R_\nu \leqq \frac{1}{a_0^2} 12n^5 m_1^2 \max(u_\nu^2 + P_\nu + G_\nu) \max R_{\nu-1} + \frac{M_3}{a_0} + \max_{\partial\Omega} R_\nu$

От /118/ следва

/162/ $a_0^2 > 12n^5 m_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega}')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \right)^2.$

Сега от /145/, /161/ и /162/ следва

/163/ $\max R_\nu \leqq \alpha R_{\nu-1} + \frac{M_3}{a_0} + \max_{\partial\Omega} R_\nu,$

където $0 < \alpha < 1$.

За да се оцени $\max_{\partial\Omega} R_\nu$ нека

/164/ $$r_\nu = \left(\max_{\partial\Omega} R_\nu \right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$w_3 = e^{-\gamma_3 t + \beta_3 \psi(y)}$$

в областта $0 < t < \frac{\beta_3}{\gamma_3} \psi(y)$, където

$$e^{\beta_3} > 1 + \left| \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial y_r \partial y_s} \right| \quad (r, s = 1, \ldots, n-1).$$

Съгласно /142/ и /143/ константата β_3 може да се определи независимо от ν. С диференциране спрямо y_r и y_s $(r, s = 1, \ldots, n-1)$ от /41/ следва

/165/ $$\tilde{L}_\varepsilon(v; u_{y_r y_s}) = F_{rs} - \bar{A}_s^{kl} u_{klr} - \bar{A}_r^{kl} u_{kls} - 2\bar{A}_s^k u_{krt}$$
$$-2\bar{A}_r^k u_{kst} - \bar{A}_r u_{stt} - \bar{A}_s u_{rtt} - \bar{A}_{rs}^{kl} u_{kl} - 2\bar{A}_{rs}^k u_{kt}$$

$$-\bar{A}_{rs} u_{tt} - \bar{B}^k_s u_{kr} - \bar{B}^k_r u_{ks} - \bar{B}_r u_{st} - \bar{B}_s u_{rt}$$

$$-\bar{B}^k_{rs} u_k - \bar{B}_{rs} u_t + \bar{C}_s u_r + \bar{C}_r u_s + \bar{C}_{rs} u$$

От /126/, /130/, /141/, /142/, /145/ и /165/ следва

/166/ $$|\tilde{L}_\varepsilon(v; u_{y_r y_s})| \leqq M_4 |D^3 u_\nu| + M_5 ,$$

където константите M_4 и M_5 могат да се изберат независимо от ν.
От /163/ и /164/ следва

/167/ $$|D^3 u_\nu| \leqq \sqrt{\alpha R_{\nu-1}} + \sqrt{\frac{M_3}{a_0}} + \tau_\nu .$$

Сега от /166/, /167/ следва

/168/ $$|\tilde{L}_\varepsilon(v; u_{y_r y_s})| \leq M_4 \sqrt{\alpha R_{\nu-1}} + M_4 \tau_\nu + M_6 ,$$

където константата M_6 не зависи от ν . При

$$\gamma_3 = \gamma_0(\beta_3) + \left(\frac{m_0 + a_0}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\left(M_4\sqrt{\alpha R_{\nu-1}} + M_5 \tau_\nu + M_6\right)^{\frac{1}{2}}$$

от /44/, /49/ и /168/ следва

$$L_\varepsilon(v; w_3 \pm u_{y_r y_s}) \geqq 0 ,$$

тъй като минимумът на w_3 е равен на 1. Както в доказателствата на леми 2 и 3 аналогично се получава

/169/ $$\left|\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial y_r \partial y_s \partial t}\right| \leqq \gamma_3 e^{\beta_3} \leqq M_7 \sqrt[4]{\alpha R_{\nu-1}} + M_8 \sqrt{\tau_\nu} + M_9$$

при $t = 0$, $\psi(y) = 1$, където константите M_7 , M_8 и M_9 не зависят от ν . С диференциране спрямо y_r $(r = 1, \dots, n-1)$ от /41/ следва

/170/ $$A^{kl} u_{klr} + 2A^k u_{ktr} + A u_{rtt} + B^k u_{kr} + B u_{tr} - C u_r$$

$$= F_r - \bar{A}^{kl}_r u_{kl} - 2\bar{A}^k_r u_{kt} - \bar{A}_r u_{tt} - \bar{B}^k_r u_k - \bar{B}_r u_t + \bar{C}_r u .$$

$$/171/ \qquad \left.\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial y_\kappa \partial y_i \partial y_2}\right|_{t=0} = 0,$$

/169/, /170/ и /133/ следва

$$/172/ \qquad \left.\left|\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial y_2 \partial t^2}\right|\right|_{t=0} \leqq M_{10}\sqrt[4]{\alpha R_{\nu-1}} + M_{11}\sqrt{\tau_\nu} + M_{12}.$$

Аналогично, с диференциране спрямо t и заместване на /169/ и /172/, от /41/ следва

$$/173/ \qquad \left.\left|\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial t^3}\right|\right|_{t=0} \leqq M_{13}\sqrt[4]{\alpha R_{\nu-1}} + M_{14}\sqrt{\tau_\nu} + M_{15}.$$

Сега от /169/, /171/-/173/ следва

$$/174/ \qquad \tau_\nu \leqq M_{16}\sqrt[4]{\alpha R_{\nu-1}} + M_{17}\sqrt{\tau_\nu} + M_{18},$$

където никоя от константите $M_{10} - M_{18}$ не зависи от ν. От /174/, аналогично на начина, по който се получава /113/, следва

$$/175/ \qquad \tau_\nu \leqq M_{17}^2 + 2M_{18} + 2M_{16}\sqrt[4]{R_{\nu-1}}.$$

Сега от /163/, /164/ и /175/ следва

$$/176/ \qquad \max R_\nu \leqq \alpha \max R_{\nu-1} + M_{19}\sqrt{\max R_{\nu-1}} + M_{20}.$$

Тъй като никоя от константите в /176/ не зависи от ν, с това е доказана равномерната ограниченост на третите производни.

Наистина, ако за една редица $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ от реални числа е в сила неравенството

$$/177/ \qquad 0 \leqq a_{\nu+1} \leqq \alpha a_\nu + \beta\sqrt{a_\nu} + \gamma \quad (0<\alpha<1;\ \beta,\gamma>0),$$

тази редица е ограничена. За установяване на това твърдение нека ξ е положително решение на уравнението

$$x = \alpha x + \beta\sqrt{x} + \gamma$$

/такова решение съществува поради $\alpha < 1$/. За всяко $x > \xi$ е в сила

/178/ $$\alpha x + \beta\sqrt{x} + \gamma < x,$$

а за всяко $x \leqq \xi$ - неравенството

/179/ $$x \leqq \alpha x + \beta\sqrt{x} + \gamma.$$

От друга страна, функцията

/180/ $$\alpha x + \beta\sqrt{x} + \gamma \qquad (x > 0)$$

е очевидно монотонно растяща. Ще покажем, че

/181/ $$\bar{a}_\nu \leqq \max\{\xi, a_1\}.$$

За $\nu =$ 1 твърдението е очевидно вярно. Нека /181/ е вярно за някое ν. Сега или

/182/ $$a_\nu \leqq \xi$$

или

/183/ $$\xi < a_\nu \leqq a_1.$$

Тъй като функцията /180/ е монотонно растяща, от /182/, /177/ и /179/ следва

/184/ $$a_{\nu+1} \leqq \alpha a_\nu + \beta\sqrt{a_\nu} + \gamma \leqq \alpha\xi + \beta\sqrt{\xi} + \gamma = \xi,$$

а от /183/, /177/ и /178/ следва

/185/ $$a_{\nu+1} \leqq \alpha a_\nu + \beta\sqrt{a_\nu} + \gamma < a_\nu \leqq a_1.$$

От /184/, /185/ следва /181/ за $\nu + 1$.

ЛЕМА 5. Редицата $\{u_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $\bar{\Omega}$.

Доказателство. От /139/ следва

/186/ $$L_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu; u_{\nu+1}) - L_{\varepsilon_\nu}(u_{\nu-1}; u_\nu) = f_{\varepsilon_{\nu+1}} - f_{\varepsilon_\nu},$$

а от /137/ следва

/187/ $$L_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu; u_{\nu+1}) - L_{\varepsilon_\nu}(u_{\nu-1}; u_\nu)$$

$$= L_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu; u_{\nu+1} - u_\nu) + (\varepsilon_{\nu+1} - \varepsilon_\nu)\Delta u_\nu$$

$$+\left(a^{ij}_{\varepsilon_{\nu+1}}(x,u_\nu) - a^{ij}_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu)\right)\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j} + \left(a^{ij}_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu) - a^{ij}_{\varepsilon_\nu}(x,u_{\nu-1})\right)\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\left(a^{i}_{\varepsilon_{\nu+1}}(x,u_\nu) - a^{i}_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu)\right)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} + \left(a^{i}_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu) - a^{i}_{\varepsilon_\nu}(x,u_{\nu-1})\right)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}$$

$$\left(a_{\varepsilon_{\nu+1}}(x,u_\nu) - a_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu)\right)u_\nu + \left(a_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu) - a_{\varepsilon_\nu}(x,u_{\nu-1})\right)u_\nu$$

От /135/ и теоремата за крайните нараствания следват неравенствата

/188/ $$\left|a^{ij}_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu) - a^{ij}_{\varepsilon_\nu}(x,u_{\nu-1})\right|\left|\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j}\right|$$

$$\leqq \left|\frac{\partial a^{ij}}{\partial s}(x,\zeta)\right|\left|u_\nu - u_{\nu-1}\right|\left|\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqq m_1\left|u_\nu - u_{\nu-1}\right|\left|\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j}\right|$$

/189/ $$\left|a^{i}_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu) - a^{i}_{\varepsilon_\nu}(x,u_{\nu-1})\right|\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}\right| \leqq m_1\left|u_\nu - u_{\nu-1}\right|\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}\right|,$$

/190/ $$\left|a_{\varepsilon_\nu}(x,u_\nu) - a_{\varepsilon_\nu}(x,u_{\nu-1})\right|\left|u_\nu\right| \leqq m_1\left|u_\nu - u_{\nu-1}\right|\left|u_\nu\right|.$$

От друга страна, от /128/ при $(x,s) \in \bar\Omega \times [-M+\varepsilon, M-\varepsilon]$ следва

/191/ $$\left|c_{\varepsilon_\nu}(x,s) - c_{\varepsilon_{\nu+1}}(x,s)\right|$$

$$\leqq \int_{R^{n+1}} \Big|\chi_{\Omega',M}(x-\varepsilon_\nu\xi, s-\varepsilon_\nu\sigma)c(x-\varepsilon_\nu\xi, s-\varepsilon_\nu\sigma)$$

$$-\chi_{\Omega',M}(x-\varepsilon_{\nu+1}\xi, s-\varepsilon_{\nu+1}\sigma)c(x-\varepsilon_{\nu+1}\xi, s-\varepsilon_{\nu+1}\sigma)\Big|\omega(\xi,\sigma)d\xi d\sigma$$

Тъй като стойностите на характеристичните функции са равни на 1, като приложим отново теоремата за крайните нараствания, получаваме

/192/ $$\Big|\chi_{\Omega',M}(x-\varepsilon_\nu\xi, s-\varepsilon_\nu\sigma)c(x-\varepsilon_\nu\xi, s-\varepsilon_\nu\sigma)$$

$$-\chi_{\Omega',M}(x-\varepsilon_{\nu+1}\xi, s-\varepsilon_{\nu+1}\sigma)c(x-\varepsilon_{\nu+1}\xi, s-\varepsilon_{\nu+1}\sigma)\Big|$$

$$\leq (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \left(\left| \frac{\partial c}{\partial x_i} \right| |\xi_i| + \left| \frac{\partial c}{\partial s} \right| |\sigma| \right) \leq m_1 (n+1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) (|\xi|^2 + \sigma^2)$$

От /121/ следва, че интегрирането в /191/ се извършва само при $|\xi|^2 + \sigma^2 \leq 1$, поради което от /191/, /192/ следва

$$|c_{\varepsilon_\nu}(x, s) - c_{\varepsilon_{\nu+1}}(x, s)| \leq m_1 (n+1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}),$$

откъдето

/193/ $$|a_{\varepsilon_\nu}(x, u_\nu) - a_{\varepsilon_{\nu+1}}(x, u_\nu)| |u_\nu| \leq m_1 (n+1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) |u_\nu|$$

Аналогично се получават и неравенствата

/194/ $$\left| a^i_{\varepsilon_\nu}(x, u_\nu) - a^i_{\varepsilon_{\nu+1}}(x, u_\nu) \right| \left| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} \right| \leq m_1 (n+1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \left| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} \right|,$$

/195/ $$\left| a^{ij}_{\varepsilon_\nu}(x, u_\nu) - a^{ij}_{\varepsilon_{\nu+1}}(x, u_\nu) \right| \left| \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq m_1 (n+1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \left| \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

/196/ $$\left| f_{\varepsilon_\nu}(x) - f_{\varepsilon_{\nu+1}}(x) \right| \leq n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{C^1(\bar{\Omega}')} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})$$

От /186/-/190/, /193/-/196/ и /145/ следва

/197/ $$\left| L^{\prime}_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu, u_{\nu+1} - u_\nu) \right| \leq m_1 (n^2 + n + 1)(v_\nu^2 + P_\nu + Q_\nu)^{\frac{1}{2}} \|u_\nu - u_{\nu-1}\|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

$$+ (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \left\{ m_1 (n+1)^2 (v_\nu^2 + P_\nu + Q_\nu)^{\frac{1}{2}} + n \|f\|_{C^1(\bar{\Omega}')} \right\}$$

$$\leq m_1 (n+1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega}')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_0}} \right\} \|u_\nu - u_{\nu-1}\|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

$$+ (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) M_{21},$$

където константата M_{21} не зависи от ν. Тъй като поради /140/ е в сила

/198/ $$(u_{\nu+1} - u_\nu)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

аналогично на доказателството на лема 1, от /197/, /198/ и принципа за максимум следва

$$/199/ \quad \| u_{\nu+1} - u_\nu \|_{C^0(\bar\Omega)} \leqq \frac{m_1(n+1)}{a_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a_0}} \| f \|_{C^2(\bar\Omega')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \right\} \| u_\nu - u_{\nu-1} \|_{C^0(\bar\Omega)} + (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \frac{M_{21}}{a_0}$$

$$\leqq \alpha \| u_\nu - u_{\nu-1} \|_{C^0(\bar\Omega)} + \frac{M_{21}}{a_0} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}),$$

където поради /118/ е в сила

$$/200/ \quad \alpha = \frac{m_1(n+1)}{a_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} \| f \|_{C^2(\bar\Omega')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \right) < 1.$$

Неравенствата /199/, /200/ дават основание да се твърди, че редът

$$/201/ \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - u_{\nu-1})$$

е равномерно сходящ в $\bar\Omega$. Нека за една редица $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ от реални числа са в сила неравенствата

$$/202/ \quad 0 \leqq a_{\nu+1} \leqq \alpha a_\nu + b_\nu \qquad (b_\nu \geqq 0),$$

където $0 < \alpha < 1$ и редът

$$/203/ \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$$

е сходящ. Тогава и редът

$$/204/ \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

е сходящ. Наистина, от /202/ чрез индукция следва

$$0 \leqq a_{\nu+1} \leqq \alpha^\nu a_1 + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha^{\nu-i} b_i .$$

Редът с общ член

$$\alpha^\nu a_1 + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha^{\nu-i} b_i$$

е сходящ като сума на сходяща геометрична прогресия и произведението на сходящия ред /203/ със сходяща геометрична прогресия. Съгласно принципа за сравняване на редове сходящ е и редът /204/. Сега сходимостта на /201/ се получава с полагането

$$a_\nu = \| u_\nu - u_{\nu-1} \|_{C^0(\bar{\Omega})}, \quad b_\nu = (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \frac{M_{21}}{a_0},$$

като сходимостта на реда с общ член b_ν е следствие от /136/. С това лемата е доказана.

Край на доказателството на теорема 1. От /141/, /142/, /145/ и теоремата на Арцела-Асколи [29] следва, че съществува подредица $\{u_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$ на редицата $\{u_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, която е равномерно сходяща в $\bar{\Omega}$ заедно с производните си до втори ред включително. Нека

/205/ $$u = \lim_{\mu\to\infty} u_{\nu_\mu}$$

Тогава

/206/ $$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial u_{\nu_\mu}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и

/207/ $$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial^2 u_{\nu_\mu}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

От лема 5 следва, че редицата $\{u_{\nu_\mu - 1}\}_{\mu=1}^{\infty}$ също е равномерно сходяща в Ω и

$$\lim_{\mu\to\infty} u_{\nu_\mu - 1} = u.$$

Ето защо, граничният преход в равенствата

$$L_{\varepsilon_{\nu_\mu}}(u_{\nu_\mu - 1}; u_{\nu_\mu}) = f_{\varepsilon_{\nu_\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

е законен. Сега от /137/ следва, че u удовлетворява в Ω уравнението

$$a^{ij}(x,u)u_{ij} + a^{i}(x,u)u_i - a(x,u)u = f(x).$$

От /180/ и /205/ следва $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. С това е доказано съществуването на класическо решение на граничната задача /119/, /120/. Да отбележим, че от /205/-/207/, /145/ и /18/ следва, че за това решение u е в сила неравенството

$$\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_{C^2(\bar{\Omega}')} + \mu_2 + \mu_3\sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \tag{208}$$

Е д и н с т в е н о с т. Нека u е построеното по-горе решение на граничната задача /119/, /120/, а v е произволно решение на същата задача. Тогава

$$L(u) - L(v) = 0 \tag{209}$$

в Ω и

$$(u-v)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{210}$$

От /8/, /209/, /210/ при $w = u - v$ и

$$\phi(x) = -(a^{ij}(x,u) - a^{ij}(x,v))u_{ij} \tag{211}$$

$$-(a^{i}(x,u) - a^{i}(x,v))u_i + (a(x,u) - a(x,v))u$$

следва

$$a^{ij}(x,v)w_{ij} + a^{i}(x,v)w_i - a(x,v)w = \phi(x) \tag{212}$$

в Ω и

$$w\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{213}$$

От /212/, /213/ и принципа за максимум, както в доказателството на лема 1 следва

/214/ $$\|w\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{a_0} \max_{\bar{\Omega}} |\phi(x)|.$$

Сега с помощта на теоремата за крайните нараствания, от /27/ и /208/ се получава

/215/ $$|\phi(x)| \leq |u-v| \left|\frac{\partial a^{ij}}{\partial s}(x,\xi^{ij})\right| |u_{ij}| + |u-v| \left|\frac{\partial a^{i}}{\partial s}(x,\xi^{i})\right| |u_i|$$

$$+ |u-v| \left|\frac{\partial a}{\partial s}(x,\xi)\right| |u| \leq \|u-v\|_{C^0(\bar{\Omega})} m_1(n+1) \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$$

$$\leq \|w\|_{C^0(\bar{\Omega})} m_1(n+1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega}')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \right\}.$$

От /244/, /245/ следва

/216/ $$\left[1 - \frac{m_1(n+1)}{a_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega}')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \right) \right] \|w\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq 0$$

Съгласно /118/ първият множител в лявата страна на /216/ е положителен; оттук следва $\|w\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0$. С това доказателството на теорема 1 е завършено.

ЗАБЕЛЕЖКА 4. Поради лема 4 вторите производни на построеното в теорема 1 решение на граничната задача /119/, /120/ са липшицови. При това липшицовите константи на тези производни зависят само от коефициентите и дясната страна на уравнението /119/ и от контура на областта Ω , но не и от "размерите" на областта.

§ 4. ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ В ОБЩИЯ СЛУЧАЙ

В настоящия параграф е разгледана задачата на Дирихле за области $G \subset R^n$ с частично гладка граница $\partial G \neq S_3$. Съществуването на решение се доказва въз основа на резултатите от предишния параграф, като аналогично на линейния случай [13], [14] се предполага възможност за подходящо продължаване на уравнението /1/ в по-широка област Ω през частите S_1 и S_2 на ∂G, така че границата $\partial\Omega$ да е нехарактеристична за продълженото уравнение и да продължават да са в сила аналогични на /117/, /118/ неравенства и в новата област. След това за полученото с помощта на теорема 1 решение се доказва, че е решение и на първоначалната задача.

ТЕОРЕМА 2. Нека $G \subset R^n$ е област с частично гладка граница и съществуват области Ω и Ω' в R^n, които удовлетворяват предположенията:

А/ $\bar{\Omega} \subset \Omega'$.

Б/ Коефициентите на оператора /8/ и дясната страна на уравнението /1/ са дефинирани и двукратно гладки, а вторите им производни са липшицови в $\bar{\Omega}' \times [-M, M]$ и

$$a^{ij}(x, s)\,\xi_i \xi_j \geq 0$$

за $\xi \in R^n$, $(x, s) \in \bar{\Omega}' \times [-M, M]$.

В/ Контурът $\partial\Omega$ е поне от класа C^4 и

$$a^{ij}(x, s)\,\nu_i(x)\nu_j(x) > 0 \quad (x \in \partial\Omega, y \in [-M, M]),$$

където $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ е единичният вектор на външната нормала към $\partial\Omega$ и

/217/ $$S_3 \subset \partial\Omega$$

/за дефинициите на S_1, S_2 и S_3 вж. /9/-/13/ /.

Г/ Съществуват области $\Omega_\lambda \subset \Omega \setminus \bar{G}$ $(\lambda = 1, \dots, l)$

с частично гладки граници и такива, че ако $\Gamma_\lambda' = \partial\Omega \cap \partial\Omega_\lambda$ и $\Gamma_\lambda'' = \partial\Omega \setminus \Gamma_\lambda'$, за оператора /8/, разглеждан в Ω_λ, Γ_λ'' е от вида S_1.

Д/ $S_2 \subset \bigcup_{\lambda=1}^{l} \Gamma_\lambda''$

Е/ Функцията f и константата a_0 са такива, че да са в сила неравенствата

/218/ $$\frac{\varkappa_1}{a_0} \|f\|_{C^0(\bar\Omega')} < M$$

и

/219/ $$a_0 > 2 + (12n+6)m_1 \Big[1 + \sum_{|\alpha| \le 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar\Omega')} + \mu_1 \|f\|_{C^0(\bar\Omega')} \Big] + \max\Big\{ \sqrt{12n^5}, 9n\varkappa_2 + 12n^2 + 12n + 6 \Big\} \Big\{ m_1 \Big(\frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar\Omega')} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \Big) + m_2 \sum_{\nu=0}^{2} \Big(\sum_{|\alpha| \le 1} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar\Omega')} + \mu_1 \|f\|_{C^0(\bar\Omega')} \Big)^\nu \Big\},$$

където константите μ_1, μ_2, μ_3, α_1, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ са свързани с оператора /8/ и областите Ω и Ω' както в теорема 1 и

/220/ $$f(x) = 0$$

при $x \in \Omega_\lambda$ $(\lambda = 1, \dots, l)$

Тогава граничната задача $L(u) = f$ в G и $u|_{S_2 \cup S_3} = 0$ притежава единствено класическо решение.

Д о к а з а т е л с т в о. Изискването Γ_λ'' да е от вида S_1 за Ω_λ и условието Д/ са съвместими. Наистина, ако $\nu(x)$ е външна нормала към ∂G в точка от S_2, тя е вътрешна нормала за $\partial\Omega_\lambda$ в същата точка, следователно ако се образува функцията

/221/ $$b^*(x,s) = (a^i(x,s) - a^{ij}_j(x,s))\nu_i^*(x)$$

аналогично на /11/ за оператора /8/ в Ω_λ, където $\nu^*(x) =$

$(\nu_1^+(x), \dots, \nu_n^+(x))$ е външната нормала за $\partial\Omega_\lambda$, то $\nu^+(x) = -\nu(x)$

и

/222/ $$b^+(x, \nu) = -b(x, \nu) < 0,$$

т.е. съответната точка наистина е от частта S_1. Оттук се вижда, че изискването Γ_λ'' да е $\overline{S_1}$ се налага само за точките от $\partial\Omega_\lambda$, които са вътрешни за $\Omega \setminus G$.

От А/ - В/, /218/, /219/ следва, че са изпълнени всичките предположения на теорема 1. Следователно съществува единствено решение u на граничната задача

/223/ $$L(u) = f$$

в Ω и

/224/ $$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

и за него е в сила аналогично на /208/ неравенство. Тъй като $G \subset \Omega$ от /223/ следва $L(u) = f$ в G, а от /217/ следва $u\big|_{S_3} = 0$. Остава да се докаже

/225/ $$u\big|_{S_2} = 0.$$

Това се извършва аналогично на [14]. От /220/, т.е. $f(x) = 0$ в Ω_λ чрез двукратно интегриране по части се получава

/226/ $$0 = \int_{\Omega_\lambda} f u\,dx = \int_{\Omega_\lambda} L(u) u\,dx$$

$$= \int_{\Omega_\lambda} \left(a^{ij} u_i u_j + \frac{1}{2}(2a + \bar{a}^i_i - \bar{a}^{ij}_{ij}) u^2\right) dx$$

$$- \int_{\partial\Omega_\lambda} a^{ij} u_i u \nu_j^+ ds - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\lambda} (a^i - \bar{a}^{ij}_j) u^2 \nu_i^+ ds.$$

Интегралите върху повърхнина в /226/ са не положителни. Наистина, от

/217/ и /224/ следва, че интегралите върху Γ_λ' са нули, т.е. остава да се докаже

$$/227/ \quad \int_{\Gamma_\lambda''} a^{ij} u_i u \nu_j^{*} ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\lambda''} (a_i^i - \bar{a}_j^{ij}) u^2 \nu_i^{2} ds \leq 0.$$

От /10/ следва

$$/228/ \quad -a^{ij}(x,s)\nu_j^{*}(x) \equiv a^{ij}(x,s)\nu_j(x) = 0 \quad (i=1,\dots,n)$$

и

$$/229/ \quad -a^{ij}(x,s)\nu_i^{*}(x) = a^{ij}(x,s)\nu_i(x) = 0 \quad (j=1,\dots,n)$$

върху S. От /228/ следва, че първият интеграл в /227/ е нула. От /229/ чрез диференциране спрямо s се получава

$$a_s^{ij}(x,s)\nu_i^{*}(x) = 0 \quad (j=1,\dots,n),$$

което заедно с /221/, /222/ дава

$$/230/ \quad \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\lambda''} (a_i^i - \bar{a}_j^{ij}) \nu_i^{*} u^2 ds \leq 0.$$

Тъй като u удовлетворява аналогично на /208/ условие, от /219/ следва

$$/231/ \quad \frac{1}{2}(2a + \bar{a}_i^i - \bar{a}_{ij}^{ij}) \geq \frac{1}{2}(2a_0 - n C_1(u) - n^2 C_2(u)) \geq 1$$

От неотрицателността на характеристичната форма на /8/ следва

$$/232/ \quad a^{ij}(x,u) u_i u_j \geq 0.$$

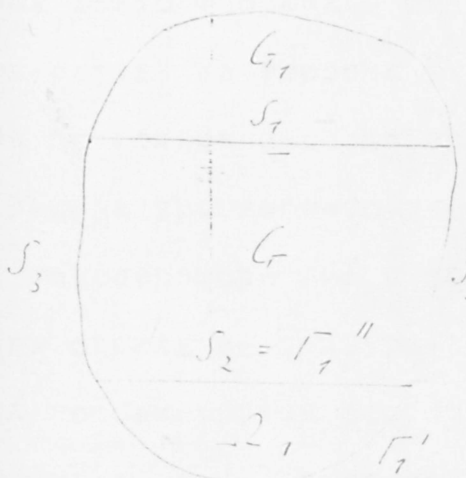
Сега от /226/, /227/, /230/ - /232/ следва

$$\int_{\Omega_\lambda} u^2 dx \leq 0$$

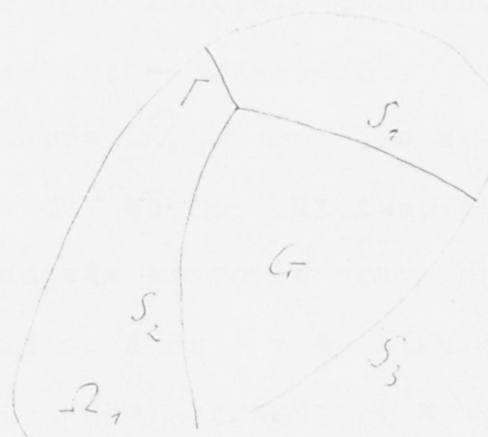
т.е. $u \equiv 0$ в Ω_λ и в частност $u\Big|_{\Gamma_\lambda''} = 0 \quad (\lambda = 1,\dots,l)$

С това съществуването е доказано.

на теоремата, стига Γ_1' да е произволна гладка повърхнина, която се съдържа в $G'\cap\{x: 1-\chi(x)\neq 0\}$. Подобно продължение на оператора L може да се осъществи и когато множествата S_1, S_2 и S_3 се пресичат по "ръбове" на областта G /фиг. 2 и 3/, вж. [14] за аналогична ситуация в линейния случай. Представеното на фиг. 2 положение възниква по естествен начин при разглеждане на израждащи



Фиг. 2



Фиг. 3

се параболични уравнения. В последния случай /фиг. 3/ $\Gamma_1''=S_2\cup\Gamma$ и предположението Г/ се свежда до съществуване на повърхнина Γ, която да е от вида S_1 за оператора /8/.

§ 5. ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ, КОГАТО ЦЕЛИЯТ КОНТУР Е ХАРАКТЕРИСТИЧЕН

В този параграф се разглежда задачата на Дирихле за области $G \subset R^n$ с частично гладък контур, за които $S_3 = \emptyset$. По-точно, предполага се, че $\partial G = S_2$, като случаят $\partial G = S_1 \cup S_2$ следва от този, както теорема 2 от теорема 1. Тези разглеждания очевидно са частен случай на теорема 2. При него обаче предположението $\partial G = S_2$ дава по-голяма свобода за избор на областта $\Omega \supset G$, в която да се решава уравнението и е налице възможност за по-подходящо продължение на оператора /8/ в новата област, поради което се получават по-добри оценки по контура, отколкото онези от леми 2 – 4. Така се получава по-симетричен резултат по отношение на зависимостите между константата a_0, дясната страна на уравнението /1/ и областта G, отколкото онзи, който може да се получи с директно прилагане на теорема 2.

ТЕОРЕМА 3. Нека $G \subset R^n$ е ограничена област с частично гладка граница ∂G, а операторът /8/ с /2/ е дефиниран в $G' \times [-M, M]$, където $\bar{G} \subset G'$, $M > 0$, коефициентите и дясната страна на уравнението /1/ са двукратно гладки, вторите им производни са липшицови и $\partial G = S_2$. При

/235/ $\psi \in C_0^3(G'),\ 0 \leq \psi \leq 1,\ \psi(x) = 1 \quad (x \in \bar{G})$

и

/236/ $$m_k' = \max_{\bar{G}' \times [-M,M]} \left\{ |D^{\alpha+p}\psi a^{ij}|, |D^{\alpha+p}\psi a^i|, |D^{\alpha+p}\psi c| \right\}$$

/$|\alpha| + p = k$, $k = 1, 2$/, където

/237/ $$a(x,s) = a_0 + c(x,s),\ a_0 > 0,\ c(x,s) \geq 0,$$

Нека a_0 и f удовлетворяват неравенствата

/238/ $$\frac{1}{a_0} \|f\|_{C^0(\bar{G}')} < M$$

и

/239/ $$a_0 > 2 + (12n+6)m_1'(1+\eta_1) + \max\{\sqrt{12n^5}, 9nc(n) + 12n^2+12n+6\}(m_2'(1+\eta_1+\eta_1^2) + m_1'\eta_2)$$

при

/240/ $$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_{C^k(\bar{G}')} \qquad (k=1,2),$$

като $C(n)$ е константата от /24/ и –

/241/ $$f(x) = 0 \qquad (x \in G' \setminus G).$$

Тогава граничната задача $L(u) = f$ в G и $u|_{\partial G} = 0$ притежава единствено класическо решение.

Д о к а з а т е л с т в о. С ъ щ е с т в у в а н е. Тъй като доказателството има много общи черти с онова на теорема 1, някои подробности са съкратени.

При доказателството се използува частен случай на известните вътрешни оценки на Шаудер за равномерно елиптичните оператори. Нека

$$L'(u) = \mu\Delta u - a_0 u,$$

където μ и a_0 са константи. Тогава /[30], § 5.5/ е в сила неравенството

/242/ $$\|u\|_{C_{2+\gamma}(\Sigma_r)} \leq C\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-(2+\gamma)^2}\left(\|Lu\|_{C_\gamma(\Sigma_r)} + \|u\|_{C_0(\Sigma_r)}\right),$$

където $0 < \gamma < 1$, $\Sigma_r = \{x \in R^n : |x| < r\}$, $0 < r < R \leq R_0$ за всяко $u \in C_{2+\gamma}(\Sigma_r)$, като константата C зависи само от γ, n, μ и a_0, а R_0 се определя от μ и a_0. Нормите в /242/ са хьолдеровите, дефинирани както в [30], т.е. за ограничени области G по дефиниция

$$H_{\gamma,G}[\varphi] = \sup_{x',x''\in G} \frac{|\varphi(x')-\varphi(x'')|}{|x'-x''|^{\alpha}} \qquad (0<\alpha<1)$$

/243/ $$\|\varphi\|_{C_k(G)} = \sum_{\nu=0}^{k} (\operatorname{diam} G)^{\nu} \max_{|\alpha|=\nu} \|D^{\alpha}\varphi\|_{C^0(\bar G)}$$

при $k \geqq 0$ и

/244/ $$\|\varphi\|_{C_{k+\gamma}(G)} = \|\varphi\|_{C_k(G)} + (\operatorname{diam} G)^{k+\gamma} \max_{|\alpha|=k} H_{\gamma,G}[D^{\alpha}\varphi].$$

Както веднага се вижда, нормата $\|\varphi\|_{C_0(G)}$, дефинирана с /243/ съвпада с нормата, дефинирана с /17/. При /244/ и $R=R_0$, $r=\frac{R_0}{2}$ от /242/ следва

/245/ $$\sum_{|\alpha|\leqq 2} \max |D^{\alpha}u| \leqq C' 2^{9}\left(\frac{2}{R_0}\right)^{3}\left(\|L'u\|_{C_\gamma(\Sigma_{R_0})} + \|u\|_{C_0(\Sigma_{R_0})}\right) \leqq C''\left(\|L'u\|_{C_\gamma(\Sigma_{R_0})} + \|u\|_{C_0(\Sigma_{R_0})}\right),$$

където константата C'' се определя от γ, n, μ и a_0.

Нека функциите $a_{\varepsilon}^{ij}(x,s)$, $a_{\varepsilon}^{i}(x,s)$, $c_{\varepsilon}(x,s)$ и $f_{\varepsilon}(x)$ са дефинирани при $0<\varepsilon_0<M-\frac{1}{a_0}\|f\|_{C'(\bar G)}$ чрез равенства, аналогични на /122/-/125/, а именно

/246/ $$a_{\varepsilon}^{ij}(x,s) = \varepsilon^{-n-1}\int_{R^n\times[-M,M]} \varphi(\xi)a^{ij}(\xi,\sigma)\omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon},\frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right)d\xi d\sigma,$$

/247/ $$a_{\varepsilon}^{i}(x,s) = \varepsilon^{-n-1}\int_{R^n\times[-M,M]} \varphi(\xi)a^{i}(\xi,\sigma)\omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon},\frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right)d\xi d\sigma,$$

/248/ $$c_{\varepsilon}(x,s) = \varepsilon^{-n-1}\int_{R^n\times[-M,M]} \varphi(\xi)c(\xi,\sigma)\omega\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon},\frac{s-\sigma}{\varepsilon}\right)d\xi d\sigma,$$

/249/ $$f_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n}\int_{R^n} f(\xi)\omega_1\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right)d\xi,$$

като в /246/-/249/ са използувани /235/ и /241/. Нека μ е реално число с $\frac{1}{4} \leqq \mu < \frac{1}{3}$, а $\psi \in C^4(R^n)$ - функция, за която

/250/ $$0 \leqq \psi \leqq 1, \psi(x) = 0 \ (x \in \bar{G}), \psi(x) = 1 \ (0 < R' < |x|),$$

където R' е толкова голямо, че да е в сила

/251/ $$\mu |D^\alpha \psi| \leqq m_k' \ (|\alpha| = k, k = 1,2).$$

Нека

/252/ $$M_\varepsilon(v; u) \equiv b_\varepsilon^{ij}(x,v)u_{ij} + b_\varepsilon^i(x,v)u_i - b_\varepsilon(x,v)u$$

е оператор, чиито коефициенти са определени с

/253/ $$\begin{cases} b_\varepsilon^{ij}(x,s) = a_\varepsilon^{ij}(x,s) + (\psi(x)\mu + \varepsilon)\delta_i^j, \\ b_\varepsilon^i(x,s) = a_\varepsilon^i(x,s), \\ b_\varepsilon(x,s) = c_\varepsilon(x,s) + a_0 \end{cases}$$

Ясно е, че операторът M_ε е дефиниран за $(x,s) \in R^n \times [-M,M]$ и при $\varepsilon \to 0$ коефициентите му клонят равномерно към коефициентите на оператора

/254/ $$M_0(u,v) = \varphi(x)a^{ij}(x,v)u_{ij} + \varphi(x)a^i(x,v)a_i - \varphi(x)c(x,v)u + \mu\psi(x)\Delta u - a_0 u$$

От /236/, /246/-/249/ и /251/ следва, както в доказателството на теорема 1, че са в сила неравенствата

$$m_k' \geqq \max\{|D^{\alpha+p} b_\varepsilon^{ij}|, |D^{\alpha+p} b_\varepsilon^i|, |D^{\alpha+p} c_\varepsilon|\}$$

/ $|\alpha| + p = k$, k = 1, 2, 3/ при $\varepsilon \geqq 0$, ако под m_3' се разбира мажоранта на липшицовите константи на коефициентите на /8/.

Нека $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е редица от двукратно гладки функции, дефинирани в R^n по такъв начин, че

/255/ $$0 \leqq \varphi_\lambda \leqq 1,$$

/256/ $$\max_{|\alpha|=2} |D^\alpha \varphi_\lambda| < \frac{1}{2n},$$

/257/ $$\{x : \varphi_\lambda(x) \neq 0\} \cap \{x : \psi(x) \neq 1\} = \emptyset,$$

/258/ $$\{x : \varphi_{\lambda+1}(x) \neq 0\} \subset \{x : \varphi_\lambda(x) = 1\}.$$

Такава редица може да се построи например чрез

$$\varphi_\lambda(x) = 1 - \delta^{-n} \int_{|\xi| < R_\lambda} \omega_1\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right) d\xi,$$

където $\{R_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е подходяща редица от реални числа с $R_\lambda \to \infty$, а δ е достатъчно голямо число. Нека цялото число l е толкова голямо, че

/259/ $$a_0^{\frac{l+1}{2}} > C''.$$

Ако Q_R е кубът

$$Q_R = \{x \in R^n : |x_i| < R \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

нека $R > 0$ да е такова, че

/260/ $$R^n \setminus Q_{R-1} \subset \{x : \varphi_l(x) = 1\}.$$

При $v \in C^5(\bar{Q}_R)$ удовлетворяваща $\|v\|_{C^0(\bar{Q}_R)} < M$ и

/261/ $$|D^k v| \leqq \eta_k \qquad (k = 1, 2),$$

нека u да е решение на граничната задача

/262/ $$M_\varepsilon(v; u) = f_\varepsilon$$

в Q_R и

/263/ $$u\Big|_{\partial Q_R} = 0.$$

Както е известно / [2], стр. 235/, тази задача притежава единствено решение, което е поне от класа C^5 в Q_R и върху гладките части на контура. Ще покажем, че $u \in C^5(\bar{Q}_R)$. Това може да се постигне чрез "продължаване по симетрия", аналогично на [31]. За тази цел па разглеждаме в областта

$$P_1 = \{x \in R^n : -R < x_1 < 3R, |x_k| < R \ (k=2,\dots,n)\}$$

оператора

$$/264/ \quad M_\varepsilon(\underline{v}; u) \equiv \tilde{b}_\varepsilon^{ij}(x,v)u_{ij} + \tilde{b}_\varepsilon^{i}(x,v)u_i - \tilde{b}_\varepsilon(x,v)u,$$

чиито коефициенти при означенията $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$ са дефинирани с

$$/265/ \quad \tilde{b}_\varepsilon^{ij}(x_1,x',v(x_1,x')) = \begin{cases} b_\varepsilon^{ij}(x,v(x)) & (|x_1| < R), \\ (-1)^{\sigma_1} b_\varepsilon^{ij}(2R-x_1,x',v(2R-x_1,x')) & (R < x_1 < 3R), \end{cases}$$

където $\sigma_1 = 2$ при $i \neq 1$, $j \neq 1$ и при $i = 1$, $j = 1$ и $\sigma_1 = 1$ при $i \neq j$, $i = 1$ или $j = 1$;

$$/266/ \quad \tilde{b}_\varepsilon^{i}(x_1,x',v(x_1,x')) = \begin{cases} b_\varepsilon^{i}(x,v(x)) & (|x_1| < R), \\ (-1)^{\sigma_2} b_\varepsilon^{i}(2R-x_1,x',v(2R-x_1,x')) & (R < x_1 < 3R), \end{cases}$$

където $\sigma_2 = 2$ при $i \neq 1$ и $\sigma_2 = 1$ при $i = 1$;

$$/267/ \quad \tilde{b}_\varepsilon(x_1,x',v(x_1,x')) = \begin{cases} b_\varepsilon(x,v(x)) & (|x_1| < R) \\ b_\varepsilon(2R-x_1,x',v(2R-x_1,x')) & (R < x_1 < 3R). \end{cases}$$

Нека освен това

$$/268/ \quad \tilde{f}_\varepsilon(x_1,x') = \begin{cases} f_\varepsilon(x_1,x') & (|x_1| < R), \\ -f_\varepsilon(2R-x_1,x') & (R < x_1 < 3R). \end{cases}$$

Тъй като поради /246/-/249/, /253/ и /241/ са в сила равенствата

$$/269/ \quad b_\varepsilon^{ij}(x,v(x)) = \delta_i^j(\mu+\varepsilon),\ b_\varepsilon^{i}(x,v(x)) = 0,\ b_\varepsilon(x,v(x)) = a_0,\ f_\varepsilon(x) = 0$$

при $x_1 > R'$, дефинираните с /265/-/268/ продължения ще имат в P_1 същата гладкост, каквато имат в Q_R коефициентите на $M_\varepsilon(v;u)$. Освен това операторът /264/ е равномерно елиптичен, тъй като при $R < x_1 < 3R$ и при $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) = (-\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ е в сила

$$\tilde{b}_\varepsilon^{ij}(x_1, x', v(x_1, x'))\xi_i \xi_j = b_\varepsilon^{ij}(2R - x_1, x', v(2R - x_1, x'))\xi_i^* \xi_j^* \geq \varepsilon |\xi|$$

Нека $\tilde{u}$ е решение на граничната задача

/270/
$$\tilde{M}_\varepsilon(v; u) = \tilde{f}_\varepsilon$$

в P_1 и

/271/
$$u\Big|_{\partial P_1} = 0$$

Такова решение съществува и съгласно цитираната по-горе теорема е поне от класа C^σ в P_1 и върху гладките части на контура. От /265/ следва

$$\tilde{b}_\varepsilon^{ij}(x_1, x', v(x_1, x')) = (-1)^{\delta_1}\tilde{b}_\varepsilon^{ij}(2R - x_1, x', v(2R - x_1, x'))$$

при $(x_1, x') \in P_1$; аналогични равенства се получават за дясната страна и за останалите коефициенти. Това дава възможност за пресмятане на стойността на оператора /264/ за функцията $\tilde{u}(2R - x_1, x')$; така се получава

/272/
$$\tilde{M}_\varepsilon(v, \tilde{u}(2R - x_1, x')) = -\tilde{M}_\varepsilon(v; \tilde{u}(x, x'))$$

Нека

/273/
$$\tilde{w}(x_1, x') = \tilde{u}(x_1, x') + \tilde{u}(2R - x_1, x')$$

От /271/-/273/ следва $\tilde{M}_\varepsilon(v; \tilde{w}) = 0$ в P_1 и $\tilde{w}\Big|_{\partial P_1} = 0$, откъдето поради теоремата за единственост на решението на елиптичните уравнения следва $\tilde{w} \equiv 0$. Сега от /273/ следва $\tilde{u}\Big|_{x_1 = R} = 0$, т.е. оказва се, че u и $\tilde{u}$ удовлетворяват в Q_R едно и също уравнение с едни и същи гранични условия, откъдето следва, че за $x \in \bar{G}_R$ тъждествено $u(x) = \tilde{u}(x)$.

По аналогичен начин, последователни "отражения" спрямо стените $x_1 = -R$ и $x_k = \pm R\ (k=2,\dots,n)$ дават възможност да се построи функция $\tilde{\tilde{u}} \in C^r(Q_{3R})$, за която

$$\tilde{\tilde{u}}(x) = u(x) \tag{274}$$

за $x \in \bar{Q}_R$, откъдето следва, че $u \in C^r(\bar{Q})$, което искахме да докажем.

От /257/, /260/ и /265/ следва нещо повече: в областта

$$\{x \in R^n : R-1 < |x_k| < R+1;\ k=1,\dots,n\},$$

т.е. в околност на ∂Q_R, функцията $\tilde{\tilde{u}}$ удовлетворява уравнението

$$L'_\varepsilon(\tilde{\tilde{u}}) \equiv (\mu+\varepsilon)\Delta\tilde{\tilde{u}} - a_0\tilde{\tilde{u}} = c.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е такова, че

$$\frac{1}{4} \leq \mu+\varepsilon \leq \frac{1}{3}. \tag{275}$$

Сега от /245/ следва

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} \max_{Q_{R+\frac{R_0}{2}} \setminus Q_{R-\frac{R_0}{2}}} |D^\alpha \tilde{\tilde{u}}| \leq C'' \|\tilde{\tilde{u}}\|_{C_0(Q_{R+1}\setminus Q_{R-1})} \tag{276}$$

Тъй като поради дефиницията на $\tilde{\tilde{u}}$ и /274/ следва

$$\|\tilde{\tilde{u}}\|_{C_0(Q_{R+1}\setminus Q_{R-1})} = \|u\|_{C_0(Q_R\setminus Q_{R-1})},$$

от /276/ сега се получава

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} \max_{\partial Q} |D^\alpha u| \leq C'' \|u\|_{C^0(Q_R\setminus Q_{R-1})} \tag{277}$$

По-нататък доказателството е твърде близко до снова на теорема 1.

ЛЕМА 6. Нека u е решение на граничната задача /262/, /263/. Тогава е в сила неравенството

$$\|u\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \leqq \frac{1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar{Q}_R)}$$

Д о к а з а т е л с т в о. Напълно аналогично на онова на лема 1.

Сега ще наведем някои оценки за произведенията $\varphi_\lambda u^2$, където φ_λ удовлетворява /255/-/258/. Нека

$$-u^2(x) \leqq M' \qquad \{x : \varphi_\lambda(x) \neq 0\}.$$

От /252/, /253/ и /257/ следва, че операторът $M_\varepsilon(v;u)$ има вида

/278/ $$M_\varepsilon(v;u) = (\mu+\varepsilon)\Delta u - a_0 u$$

върху множеството $\{x : \varphi_\lambda(x) \neq 0\}$, откъдето се получава

/279/ $$M_\varepsilon(v;\varphi_\lambda u^2 - N) = a_0 N + \varphi_\lambda M_\varepsilon(v;u^2)$$

$$+ u^2 M_\varepsilon(v;\varphi_\lambda) + 4(\mu+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_i}u_i u + a_0\varphi_\lambda u^2$$

$$= a_0 N + \varphi_\lambda\left(2u M_\varepsilon(v;u) + 4(\mu+\varepsilon)(\operatorname{grad} u)^2 + a_0 u^2\right)$$

$$+ u^2\left((\mu+\varepsilon)\Delta\varphi_\lambda - a_0\varphi_\lambda\right) + 4(\mu+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_i}u_i u + a_0\varphi_\lambda u^2.$$

От /241/, /257/, /270/ и /278/ следва

/280/ $$2\varphi_\lambda u M_\varepsilon(v;u) = 0.$$

От /21/ с $\delta = 1$ следва

/281/ $$4\left|(\mu+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_i}u_i u\right| \leqq 2(\mu+\varepsilon)u^2 + 2(\mu+\varepsilon)(\operatorname{grad}\varphi)^2(\operatorname{grad} u)^2.$$

От доказателството на предложението III, § 1, дадено в [15], се вижда, че за всяка двукратно гладка неотрицателна функция φ, дефинирана в R^n, която има ограничени втори производни, е в сила

/282/ $$(\operatorname{grad}\varphi)^2 \leq 2n\left(\max_{|\alpha|=2}|D^\alpha\varphi|\right)\varphi.$$

От /282/, /281/ и /275/ следва

/283/ $$4\left|(\mu+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_i}u_i u\right| \leq 2(\mu+\varepsilon)^2+2(\mu+\varepsilon)\varphi_\lambda(\operatorname{grad} u)^2.$$

От /256/ и /275/ следва

/284/ $$u^2(\mu+\varepsilon)|2+\Delta\varphi_\lambda| \leq u^2(\mu+\varepsilon)\frac{\sqrt{5}}{2} < u^2.$$

От /279/-/281/, /283/ и /284/ следва

/285/ $$M_\varepsilon(v;\varphi_\lambda u^2 - N) \geq a_0 N - M' = 0$$

при $N = \frac{M'}{a_0}$. От /271/ и /285/ следва $u^2(x) \leq \frac{M'}{a_0}$ върху множеството $\{x : \varphi_\lambda(x) = 1\}$ съгласно принципа за максимум. От /258/, от горните разглеждания, приложени за $\lambda = 1, \ldots, l$ и от лема 6 следва неравенството

$$u^2(x) \leq \frac{\|f\|^2_{C^0(\bar{Q}_R)}}{a_0^{2+l}} \qquad \{x : \varphi_l(x) = 1\}$$

От /259/, /260/ и /277/ следва

$$\sum_{|\alpha|\leq 2}\max_{\partial Q_R}|D^\alpha u| \leq C'' a_0^{-\frac{2+l}{2}}\|f\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_{C^0(\bar{Q}_R)},$$

т.е.

/286/ $$\max_{\partial Q_R}\sum_{|\alpha|\leq 2}|D^\alpha u|^2 \leq \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C^0(\bar{Q}_R)}.$$

Именно тази оценка за производните до втори ред по контура дава възможност по-нататък сравнително лесно да се оценят и производните на u в $\bar{Q}_R$.

ЛЕМА 7. Нека u е решение на граничната задача /262/, /263/. Ако $P = \sum_{i=1}^{n}(u_i)^2$, то

/287/ $$\| P \|_{C^0(\bar{Q}_R)} \leq \frac{1}{a_0} \| f \|^2_{C^1(\bar{Q}_R)}$$

Д о к а з а т е л с т в о. Аналогично на онова на лема 2. Тъй като коефициентите на оператора $M_\varepsilon(v; u)$ са дефинирани в R^n и близо до контура на Q_R вече не зависят от функцията v, в този случай предложението III, § 1 може да се приложи директно, откъдето се получава

/288/ $$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_\varepsilon^{ij}(x, v)\right) u_{ij}\right)^2 \leq c(n) C_2(v) \sum_{k=1}^{n} S_\varepsilon(u_k)$$

за функции v с $\|v\|_{C^0(\bar{Q}_R)} < M$. По-нататък чрез пресмятания, аналогични на онези от лема 2, но с използуване на /288/ вместо на /56/, поради /238/, /239/, /261/, /29/ и /30/ от /76/ с $m = 1$ следва

/289/ $$M_\varepsilon(v; P) \geq - \| f \|^2_{C^1(\bar{Q}_R)}$$

От /289/, /286/ и принципа за максимум следва /287/.

ЛЕМА 8. Ако u е решение на граничната задача /262/, /263/ и $Q = \sum_{k,l=1}^{n} u_{kl}^2$, то

/290/ $$\| Q \|_{C^0(\bar{Q}_R)} \leq \frac{1}{a_0} \| f \|^2_{C^2(\bar{Q}_R)}$$

Д о к а з а т е л с т в о. При /238/, /239/, /261/, /29/ и /30/, както в доказателството на лема 3 се получава

/291/ $$M_\varepsilon(v; Q) \geq - \left\{ n^2 C_2(v) + 2n C_1(v) \right\} P - n^2 C_2(v) u^2 - \sum_{|\alpha| \leq 2} \| D^\alpha f \|^2_{C^0(\bar{Q}_R)}$$

От /239/, /261/ и леми 6 и 7 следва

/292/ $$\left(n^2 C_2(v) + 2n C_1(v)\right) P + n^2 C_2(v) u^2 \leq \frac{1}{a_0}\left(n^2 C_2(v) + 2n C_1(v)\right) \| f \|^2_{C^1(\bar{Q}_R)} + \frac{n^2 C_2(v)}{a_0} \| f \|^2_{C^0(\bar{Q}_R)} \leq \| f \|^2_{C^1(\bar{Q}_R)}$$

т /291/, /292/, /286/ и принципа за максимум следва /290/.

Нека $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е редица от реални числа с

$$< \varepsilon_{\nu+1} \le \varepsilon_\nu, \quad \lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0, \quad \varepsilon_1 \le \min\left(\mu - \frac{1}{3}, M - \frac{1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar{Q}_R)}\right)$$

нека $\{u_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ е редица от функции, дефинирани с условията: $u_0 = 0$ и $u_{\nu+1}$ е единственото решение на граничната задача $(u_\nu, u_{\nu+1}) = f_{\varepsilon_{\nu+1}}$ в Q_R и $u_{\nu+1}\big|_{\partial Q_R} = 0$. Както вече бе уста-овено, такива решения съществуват и $u_\nu \in C^r(\bar{Q}_R)$. Сега анало-ично на доказателството на теорема 1 се показва, че

$$/293/ \quad \|u_\nu\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \le \frac{1}{a_0}\|f_{\varepsilon_\nu}\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \le \frac{1}{a_0}\|f\|_{C^0(\bar{G})},$$

$$/294/ \quad \|P_\nu\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \le \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C^1(\bar{Q}_R)}$$

$$/295/ \quad \|Q_\nu\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \le \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C^2(\bar{Q}_R)}$$

ЛЕМА 9. Третите производни на функциите u_ν $(\nu = 1, \dots, n)$ а равномерно ограничени в $\bar{Q}_R$.

Д о к а з а т е л с т в о. От вътрешните оценки на Шаудер ъв вида

$$\|u\|_{C^{3+\gamma}(\Sigma_r)} \le C'''\left(\|Lu\|_{C_{1+\gamma}(\Sigma_R)} + \|u\|_{C_0(\Sigma_R)}\right)$$

2] както по-рано се получава, че третите производни са равномерно граничени по контура на Q_R. При

$$R_\nu = \sum_{k,l,m=1}^{n} \left(\frac{\partial^3 u_\nu}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}\right)^2$$

ека

$$R_\nu\Big|_{\partial Q_R} \le \tau.$$

Сега както в доказателството на лема 4 се получава

$$\max R_\nu \leq \alpha \max R_\nu + \frac{M_3}{a_0} + \tau, \qquad /296/$$

където $0 < \alpha < 1$, откъдето следва, че тези трети производни са равномерно ограничени в $\bar{Q}_R$.

ЛЕМА 10. Редицата $\{u_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $\bar{Q}_R$.

Доказателство. Напълно аналогично на онова на лема 5.

Сега, както в доказателството на теорема 1, чрез избиране на подходящи сходящи редици и граничен преход, се намира решение u на граничната задача $M_0(v,u) = f$ в Q_R и $u\big|_{\partial Q_R} = 0$, като освен това е в сила неравенствата

$$\|u\|_{C^0(\bar{Q}_R)} < M, \quad |D^2 u| < \eta_k \quad (k=1,2).$$

От /235/, /250/ и /254/ следва, че u е решение и на уравнението $L(u) = f$ в G . Поради /249/ доказателството, че $u\big|_{\partial G} = 0$, е аналогично на онова от края на теорема 2, като се интегрира върху компонентите Ω_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ на $Q_R \setminus \bar{G}$. Валидни са същите разсъждения, тъй като в този случай $\partial\Omega_\lambda \subset \partial Q_R \setminus \partial G$ и частите $\partial\Omega_\lambda \cap \partial G$ са от вида S_1 в Ω_λ , както се вижда чрез пресмятания, аналогични на /221/, /222/.

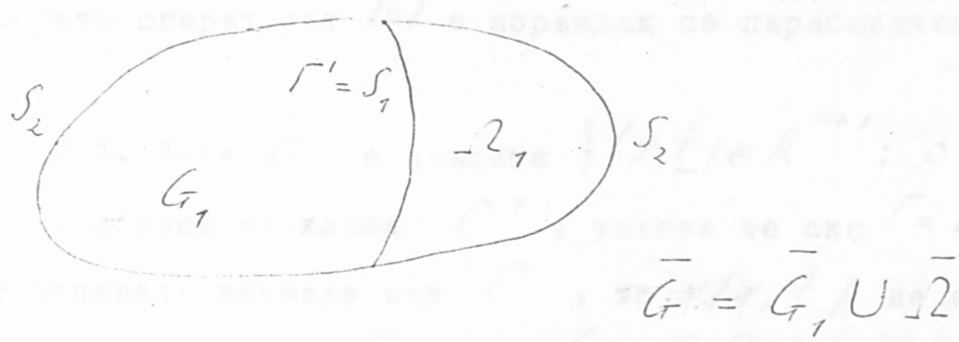
Единственост. Установява се както в теорема 1.

Случаят, когато $\partial G = S_1 \cup S_2$, се свежда към теорема 3, както теорема 2 се свежда към теорема 1: предполага се, че уравнението може да се продължи през частта от контура S_1 в области Ω_1 , ..., Ω_λ , чийто контур за продълженото уравнение да е S_2 . Всъщност, валидно е следното твърдение.

При предположенията на теорема 3 нека $G_1 \subset G$ и $\Gamma_1' = \partial G_1 \setminus \partial G$ е S_1 . Тогава граничната задача $L(u) = f$ в G_1 и

$u\big|_{S_2} = 0$ има единствено класическо решение.

Съществуването следва директно от теорема 3, а единствеността се доказва, както в теорема 2, като се използува оценката II, § 1 на Фикера /Фиг. 4/.



Фиг. 4

§ 6. НЯКОИ ПРИМЕРИ

В настоящия параграф се дават примери, от които се вижда, ак изглежда теорема 2 в някои по-важни, естествено възникващи случаи например, когато операторът /8/ е израждащ се параболичен или ултрапараболичен.

ПРИМЕР 1. Нека H е ивицата $\{(x,t)\in R^{n+1} : 0<t<T\}$ $\Omega\subset R^{n+1}$ е област от класа C^4, такава че ако $\Gamma=\partial\Omega\cap\bar{H}$, $\nu(x,t)$ е външната нормала към Γ, то $\nu(x,t)$ не е успоредна а оста t в никоя точка от Γ. При $G=\Omega\cap H$ и $G'\supset G$ нека $G'\times[-M,M]\ (M>0)$ са дефинирани и двукратно гладки коефициентите на оператора

$$M(u)\equiv a^{ij}(x,t,u)u_{ij}+a^{i}(x,t,u)u_{i}-u_{t}-a(x,t,u)u,$$

ато вторите им производни са липшицови и

297/ $$a^{ij}(x,t,s)\xi_i\xi_j\geq 0\quad ((x,t)\in G',\ s\in[-M,M]),$$

298/ $$a^{ij}(x,t,s)\nu_i(x,t)\nu_j(x,t)>0\quad ((x,t)\in\Gamma,\ s\in[-M,M]),$$

299/ $$a(x,t,s)=a_0+c(x,t,s),\ a_0>0,\ c(x,t,s)\geq 0.$$

ека $f\in C^2(\bar{G}')$, като вторите й производни са липшицови, $f(x,t)=0$ при $t\leq 0$ и константата a_0 е достатъчно голяма. огава граничната задача

300/ $$M(u)=f$$

G и

301/ $$u\big|_{\{t=0\}\cup\Gamma}=0$$

ритежава единствено класическо решение.

Очевидно, интересен е само случаят, когато множеството G

също е област, защото в противен случай задачата /300/, /301/ би се разпаднала на две или повече аналогични задачи за области G_1, G_2 и т.н. От условието за нормалата следва, че множествата $\partial G \cap \{t=0\}$ и $\partial G \cap \{t=T\}$ не са празни. Да означим първото с S_2, а второто с S_1. Тъй като при $t = 0$ нормалата има вида $(0,\dots,0,-1)$, а при $t = T$ - вида $(0,\dots,0,1)$, веднага се вижда, че тези означения са съгласувани с дефинициите /9/-/13/ и освен това $\Gamma = S_3$. От /298/ следва, че съществува $\delta > 0$, такова че е в сила включването $\Omega \cap \{(x,t): -\delta < t < T+\delta\} \subset G'$ и, ако $\Gamma_\delta = \partial\Omega \cap \{(x,t): -\delta<t<T+\delta\}$ /298/ да е в сила и при $(x,t) \in \Gamma_\delta$, $s \in [-M,M]$. Нека $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ са функции от $C^3(R)$ с ограничени производни и такива, че

/302/
$$\begin{cases} \chi_1(t) = 0 & (0 \leqq t \leqq T), \\ \chi_1(t) \geqq \alpha' > 0 & (t \leqq -\frac{\delta}{2},\ t \geqq T+\frac{\delta}{2}) \end{cases}$$

и

/303/
$$\begin{cases} \chi_2(t) = 1 & (0 \leqq t \leqq T), \\ \chi_2(t) = 0 & (t \leqq -\delta,\ t \geqq T+\delta). \end{cases}$$

Нека L е операторът

/304/
$$L(u) \equiv \chi_1(t)(\Delta_x u + u_{tt}) + \chi_2(t)M(u) + (1-\chi_2(t))a_0 u,$$

където Δ_x е операторът на Лаплас спрямо променливите $x_1,\dots,x_n$. Нека Ω' е произволна област в R^{n+1} с $\bar\Omega \subset \Omega'$. Сега е ясно, че операторът /304/ удовлетворява предположенията на теорема 2 с $\Omega_1 = \{(x,t) \in \Omega,\ t<0\}$, стига константата a_0 да е достатъчно голяма в сравнение с коефицентите на оператора L и да зависи от областите Ω и Ω', както в теорема 2. Тогава граничната задача

/305/
$$L(u) = f$$

в Ω и

/306/
$$u\big|_{S_2 \cup S_3} = 0$$

притежава единствено класическо решение. От /302/-/304/ веднага следва, че това е единственото решение и на задачата /300/, /301/.

ПРИМЕР 2. При $0 < \beta_k \in R\,(k=1,\dots,m)$, $0 < \delta$ и

/307/ $$P = \{ y \in R^m : |y_k| < \beta_k \ (k=1,\dots,m)\},$$

/308/ $$P_\delta = \{ y \in R^m : |y_k| < \beta_k + \delta \ (k=1,\dots,m)\},$$

/309/ $$H^* = R_x^n \times P, \ H_\delta^* = R_x^n \times P_\delta$$

нека $G = H^* \cap \Omega$, където $\Omega \subset R^{n+m}$ е такава област от класа C^4, че ако $\Gamma = \partial\Omega \cap \bar{H}^*$, а $\nu(x,y) = (\nu_1(x,y),\dots,\nu_n(x,y),\nu_{n+1}(x,y),$ ...) е нормалата към Γ, то $\nu(x,y)$ не е успоредна на R_y^m в никоя точка на Γ. При $G' \supset \bar{G}$, $M > 0$ нека в $\bar{G}' \times [-M,M]$ са дефинирани и двукратно гладки коефициентите на оператора

$$M(u) \equiv a^{ij}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$+ b^k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y_k} - a(x,y,u)u,$$

като вторите производни са липшицови и

/310/ $$a^{ij}(x,y,s)\xi_i\xi_j \geq 0 \ (\xi \in R^n, (x,y) \in \bar{G}', s \in [-M,M]),$$

/311/ $$a^{ij}(x,y,s)\nu_i(x,y)\nu_j(x,y) > 0 \ ((x,y) \in \Gamma, s \in [-M,M]),$$

/312/ $$a(x,y,s) = a_0 + c(x,y,s), \ a_0 > 0, \ c(x,y,s) \geq 0$$

и нека при $y_k = \pm\beta_k$ коефициентите $b^k(x,y,s)\,(k=1,\dots,m)$ не си сменят знака върху множествата $(\bar{G}' \times [-M,M]) \cap \{y_k = \pm\beta_k\}$. Да разделим частта $S = \partial G \setminus \Gamma$ от границата на части S_1 и S_2 по следния начин: частта от границата с $y_k = -\beta_k$ причисляваме към S_1

при $b^k > 0$ и към S_2 при $b^k < 0$; частта от S с $y_k = \beta_k$ причисляваме към S_1 при $b^k < 0$ и към S_2 при $b_k > 0$. Непосредствено се вижда, че тази дефиниция се съгласува с /91/-/13/. Освен това е в сила $\Gamma = S_3$.

Нека $f \in C^2(\bar{G}')$, като вторите й производни са липшицови и

/313/ $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2}(x,y) = 0 \quad (y_k = \pm \beta_k),$$

ако тази част от границата на G е S_2 и нека константата a_0 е достатъчно голяма. Тогава граничната задача

/314/ $$M(u) = f$$

в G и

/315/ $$u\Big|_{\Gamma \cup S_2} = 0$$

притежава единствено класическо решение.

От /311/ следва, че съществува $\delta > 0$, така че да е в сила $\Omega \cap H_\delta \subset G'$ и при $\Gamma_\delta = \partial\Omega \cap \bar{H}$ неравенството /311/ да е изпълнено върху $\Gamma_\delta \times [-M, M]$. Нека $\chi_1 \in C^3(R_y^m)$ и $\chi_2 \in C^3(R_y^m)$ са функции с ограничени трети производни и с

/316/ $$\begin{cases} \chi_1(y) = 0 & (y \in P), \\ \chi_1(y) \geq \alpha' > 0 & (y \bar{\in} P_{\frac{\varepsilon}{2}}) \end{cases}$$

и

/317/ $$\begin{cases} \chi_2(y) = 1 & (y \in P), \\ \chi_2(y) = 0 & (y \bar{\in} P_\varepsilon). \end{cases}$$

Нека L е операторът

/318/ $$L(u) \equiv \chi_1(y)(\Delta_x u + \Delta_y u) + \chi_2(y)M(u) + (1-\chi_2(y))a_0,$$

където Δ_x и Δ_y са операторите на Лаплас съответно спрямо променливите x и y и нека Ω' е произволна област в R^{n+m} с $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. Да дефинираме множества Ω_k' и Ω_k'' по следния начин. Ако при някое k $(k=1,\dots,m)$ хиперравнината $y_k = -\beta_k$ е от S_2, то $\Omega_k' = \{(x,y) \in \Omega : y < -\beta_k\}$, а в противния случай $\Omega_k' = \emptyset$. Ако $y_k = \beta_k$ е от S_2, то $\Omega_k'' = \{(x,y) \in \Omega : y_k > \beta_k\}$, а в противния случай $\Omega_k'' = \emptyset$. Нека Ω_λ $(\lambda = 1,\dots,l)$ са непразните измежду тези множества. От /313/ следва, че съществува функция $\tilde{f} \in C^2(\bar{\Omega}')$ с липшицови втори производни, така че $\tilde{f}(x,y) = 0$ върху Ω_λ $(\lambda = 1,\dots,l)$ и

/319/ $$\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$$

при $(x,y) \in G$.

Съгласно теорема 2 граничната задача $L(u) = \tilde{f}$ в G и $u|_{S_2 \cup S_3} = 0$ притежава единствено класическо решение. От /316/-/319/ веднага следва, че това е единственото решение и на задачата /314/, /315/.

§ 7. ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ В НЕОГРАНИЧЕНИ ОБЛАСТИ

В настоящия параграф се прилагат резултатите на теореми 1 – 3 за изучаване на задачата на Дирихле в някои неограничени области. Това се извършва, като се прилагат съответните теореми за редици от разширяващи се ограничени области, така че получените решения да са равномерно ограничени заедно с производните си. По-долу H и H_δ ще означават съответно ивиците

$$H = \{ (x,t) \in R^{n+1} : 0 < t < T \}$$

и

$$H_\delta = \{ (x,t) \in R^{n+1} : -\delta < t < T+\delta \} .$$

Ще бъдат използувани и означенията /307/-/309/ от предишния параграф.

ТЕОРЕМА 4. Нека в $\overline{H}_\delta \times [-M,M] \; (M>0)$ са дефинирани и двукратно гладки коефициентите на оператора

/320/ $$M(u) \equiv A^{ij}(x,t,u)u_{ij} + 2A^i(x,t,u)u_{it} + A(x,t,u)u_{tt} + B^i(x,t,u)u_i + B(x,t,u)u_t - C(x,t,u)u,$$

като вторите им производни са липшицови, а всичките производни са ограничени. Нека

/321/ $$A^{ij}(x,t,s)\xi_i\xi_j + 2A^i(x,t,s)\xi_i\xi_0 + A(x,t,s)\xi_0^2 \geq 0$$

при

$$(x,t) \in \overline{H}_\delta , \; s \in [-M,M], \; \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^{n+1},$$

/322/ $$A(x,0,s) \geq \alpha_0 > 0, \quad A(x,T,s) \geq \alpha_0$$

/323/ $$C(x,t,s) = a_0 + c(x,t,s), \quad a_0 > 0, \quad c(x,t,s) \geq 0.$$

Нека функцията $f(x,t)$ е двукратно гладка в $\bar{H}_\varepsilon$, като производните ѝ са ограничени, а вторите ѝ производни са и липшицови. Ако константата a_0 е достатъчно голяма /както в теореми 1 – 3/, граничната задача

/324/ $$M(u) = f$$

в H и

/325/ $$u\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=T} = 0$$

притежава единствено ограничено класическо решение.

Доказателство. Съществуване. Нека

/326/ $$G_\tau = \left\{(x,t)\in R^{n+1} : |x| < \tau,\ 0 < t < T\right\}$$

и Ω_τ е ограничена област в R^{n+1} от класа C^4, като

/327/ $$G_\tau \subset \bar{\Omega}_\tau,\ \bar{G}_\tau \cap \{t=0\} \subset \partial\Omega_\tau,\ G_\tau \cap \{t=T\} \subset \partial\Omega_\tau$$

За границата на Ω_τ се предполага, че се задава с такива функции, че трансформациите от вида /37/, нормирани с /38/, да са ограничени с една и съща константа K при всички достатъчно големи τ. Тъй като областта Ω_τ може да бъде произволно голяма по отношение на променливите x, възможността за набор на такава трансформация се определя единствено от T. Нека $\chi_\tau \in C^3(R^n)$, производните ѝ са ограничени и

/328/ $$0 \le \chi_\tau(x) \le 1,$$

/329/ $$\chi_\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \tau. \end{cases}$$

Да разгледаме в Ω_τ оператора

/330/ $$L_\tau(u) \equiv (1-\chi)(\Delta_x u + u_{tt} - a_0 u) + \chi M(u),$$

За него са изпълнени предположенията на теорема 1 с $\Omega = \Omega_r$, $\Omega' = H_\delta$, тъй като поради /322/, /328/-/330/ очевидно $\partial\Omega_r = S_3$.
Следователно граничната задача

/331/ $$L_r(u) = f$$

в Ω_r и

/332/ $$u\Big|_{\partial\Omega_r} = 0$$

притежава единствено класическо решение u_r. При това от /208/ следва, че е в сила неравенството

/333/ $$\|u_r\|_{C^2(\bar\Omega_r)} \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_{C^2(\bar H_\delta)} + \mu_2 + \mu_3\sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \quad (r \geq r_0),$$

където константите α_1, μ_2 и μ_3 се определят, както в теорема 1 и не зависят от r поради избора на областта Ω_r. Освен това липшицовите константи на вторите производни на u_r се определят само от липшицовите константи на коефициентите и на дясната страна на /330/ и също не зависят от r /вж. забележка 4/. Ето защо, теоремата на Арцела-Асколи позволява да се твърди, че от фамилията от функции $\{u_r\}_{r>r_0}$ може да се извлече редица $\{u_{r_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$, за която $r_\nu \to \infty$, а функциите u_{r_ν}, заедно с производните си до втори ред включително, са равномерно сходящи върху всяко компактно множество в $\bar H$.
Нека

/334/ $$u = \lim_{\nu\to\infty} u_{r_\nu}$$

Тогава

/335/ $$\lim_{\nu\to\infty} D^\alpha u_{r_\nu} = D^\alpha u \qquad (|\alpha| \leq 2)$$

От /334/ и /335/ следва, че граничен преход в /331/ дава $M(u) = f$ в H, тъй като поради /328/-/330/ операторите $M(u)$ и $L_{r_\nu}(u)$

съвпадат в $G_{\frac{\tau_\nu}{2}}$ и $\tau_\nu \to \infty$. Също така от /327/, /332/ и /334/ следва $u\big|_{t=0} = u\big|_{t=T} = 0$, а от /333/-/335/ следва, че така полученото решение е ограничено заедно с производните си до втори ред и

/336/ $$\|u\|_{C^2(\bar H)} \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}} \|f\|_{C^2(\bar H_\varepsilon)} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}}.$$

Единственост. Нека u е построеното по-горе решение на граничната задача /324/, /325/, а v е произволно ограничено решение на същата задача. Тогава

/337/ $$L(u) - L(v) = 0$$

в H и

/338/ $$(u-v)\big|_{t=0} = (u-v)\big|_{t=T} = 0.$$

От /320/, /337/, /338/ и теоремата за крайните нараствания, приложена върху $w = u - v$, следва

/339/ $$\tilde L(w) \equiv A^{ij}(x,t,v)w_{ij} + 2A^i(x,t,v)w_{it} + A(x,t,v)w_{tt} + B^i(x,t,v)w_i + B(x,t,v)w_t - \{C(x,t,v) - A_s^{ij}(x,t,\xi^i)u_{ij} - 2A_s^i(x,t,\xi^i)u_{ti} - A_s(x,t,\xi)u_{tt} - B_s^i(x,t,\eta^i)u_i - B_s(x,t,\eta)u_t - C_s(x,t,\zeta)u\}w = 0$$

където ξ, η, ζ и т.н. означават междинни стойности. Нека $d(x,t)$ означава израза в скобите в /339/. От /336/ и предположенията за константата a_0 следва валидността на неравенството

/350/ $$d(x,t) \geq 1 + \lambda \qquad (\lambda > 0).$$

Нека

/351/ $$g(x,t)=e^{\beta t}(r^2+N) \quad (\beta, N>0,\ r^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

Тогава

/352/ $$\tilde{L}(g)=2e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}A^{ii}+4\beta e^{\beta t}A^i x_i+\beta^2 e^{\beta t}Ar^2$$

$$+2e^{\beta t}B^i x_i+\beta e^{\beta t}Br^2-e^{\beta t}d(r^2+N)$$

$$\leq e^{\beta t}\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(2A^{ii}+2\beta(A^i)^2+(B^i)^2\big)-dN\Big]$$

$$+r^2(2\beta+\beta^2A+\beta B+1-d)\Big\}.$$

При достатъчно малко β и достатъчно голямо N от /350/ и /352/ следва $\tilde{L}(g)<0$. От /339/ и /352/ следва

/353/ $$\tilde{L}(\varepsilon g+w)=\varepsilon\tilde{L}(g)<0$$

за всяко $\varepsilon>0$. От /338/ следва

/354/ $$\varepsilon g+w\Big|_{t=0}\geq 0, \quad \varepsilon g+w\Big|_{t=T}\geq 0.$$

Нека $(x_0,t_0)\in\bar{H}$. Тъй като функцията w е ограничена в $\bar{H}$, от /351/ следва, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова R_ε, че при $|x|=R_\varepsilon$ да е в сила

/355/ $$\varepsilon g+w\geq 0 \qquad (0\leq t\leq T)$$

От /353/-/355/ и принципа за максимум следва $(\varepsilon g+w)(x,t)\geq 0$ в $\bar{G}_{R_\varepsilon}$ и в частност

/356/ $$(\varepsilon g+w)(x_0,t_0)\geq 0.$$

Чрез граничен преход при $\varepsilon\to 0$ в /356/ се получава

/357/ $$w(x_0,t_0)\geq 0.$$

Аналогични разглеждания за функцията $\varepsilon g - w$ дават

/358/ $$- w(x_0, t_0) \geq 0$$

От /357/, /358/ следва $w(x_0, t_0) = 0$. Тъй като точката $(x_0, t_0) \in \bar{H}$ е произволна, с това теоремата е доказана.

Приведеното доказателство за съществуване е директно приложение на теорема 1. По-долу ердаден един вариант на теорема 4, чието доказателство по същество е комбинация между доказателствата на теореми 1 и 3 и позволява да се види по-точно, колко голяма трябва да бъде константата a_0.

ТЕОРЕМА 4 бис. При предположенията на теорема 4 нека функцията f и константата a_0 удовлетворяват неравенствата

$$\frac{\varkappa_1}{a_0} \| f \|_{C^0(\bar{H}_\delta)} < M$$

и

$$a_0 > 2 + (12n+18) m_1 \Big[1 + \sum_{|\alpha| \leq 1} \| D^\alpha f \|_{C^0(\bar{H}_\delta)} + \mu_1 \| f \|_{C^0(\bar{H}_\delta)} \Big] + \max \Big\{ \sqrt{12(n+1)^r},\ 9(n+1)\varkappa_2 + 12n^2 + 36n + 30 \Big\} \Big\{ m_1 \Big(\frac{1}{\sqrt{a_0}} \| f \|_{C^2(\bar{H}_\delta)} + \mu_2 + \mu_3 \sqrt{\frac{a_0}{\alpha_1}} \Big) + m_2 \sum_{\nu=0}^{2} \Big(\sum_{|\alpha| \leq 1} \| D^\alpha f \|_{C^0(\bar{H}_\delta)} + \mu_1 \| f \|_{C^0(\bar{H}_\delta)} \Big)^\nu \Big\},$$

където константите $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, μ_1, μ_2 и μ_3 се определят както в теорема 1, но за областите H и H_δ при $\alpha_1 = \min\left(\frac{1}{3}, \alpha_0\right)$ и $K = 1$. Тогава граничната задача /324/, /325/ притежава единствено ограничено класическо решение.

Доказателство. Съществуване. Нека G_2 е дефинирано с /326/ и

/359/ $$Q_{R,T} = \{(x,t): |x_k| < R;\ 0 < t < T\}.$$

В този случай, както в теорема 3, сме в състояние да оценим по-точно производните на функциите върху онази част на контура на $Q_{R,T}$, която е "далече" от G_r при $R > r$. Отново се използуват вътрешните оценки /245/ на Шаудер и аналогичните оценки близко до границата /вж. [30], § 5.6/

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \max_{\Sigma_{\frac{R_0}{2}}} |D^\alpha u| \leq C'''\left(\|L''(u)\|_{C_\gamma(\Sigma_{R_0})} + \|u\|_{C_0(\Sigma_{R_0})}\right),$$

като тук

$$\Sigma_r = \left\{(x,t) \in R^{n+1}: \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2 < r^2,\ t \geq 0\right\};$$

а L'' е операторът

$$L''(u) = \mu_1(\Delta_x u + u_{tt}) - a_0 u.$$

Нека $\varphi_r \in C^3(R^n)$ и $\psi_r \in C^3(R^n)$ са дефинирани аналогично на същите функции от теорема 3 за областта $\{|x| \leq r\}$ и нека $\{\psi_\lambda(x)\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е редица от функции на x със свойства, аналогични на дефинираните с /255/-/258/, а $R > 0$ да е толкова голямо, че при

$$a_0^{\frac{l+1}{2}} > \max(C'', C''')$$

да е в сила

$$R^n \setminus \{x \in R^n: |x| < R-1\} \subset \{x: \varphi_l(x) = 1\}.$$

Нека $M_{R,\varepsilon}(v;u)$ са оператори, които се дефинират аналогично на операторите /252/, и u е решение на граничната задача

$M_{R,\varepsilon}(v;u) = F_{R,\varepsilon}(x)$ в $Q_{R,T}$ и $u\big|_{\partial Q_{R,T}} = 0$, където $F_{R,\varepsilon}(x)$ са подходящи гладки приближения на $f(x)$ в $Q_{R,T}$. Като се извършат отражения спрямо хиперравнините $x_k = \pm R$, се получава гладка функция $\tilde{u}$, дефинирана в $Q_{3R,T}$, която съвпада с u в $Q_{R,T}$.

удовлетворява в $Q_{R+1,T} \setminus Q_{R-1,T}$ уравнението

$$(\mu+\varepsilon)(\Delta_x u + u_{tt}) - a_0 u = 0$$

и $u\big|_{t=0} = u\big|_{t=T} = 0$. Както в доказателството на теорема 3, ако Γ е множеството

$$\partial Q_{R,T} \setminus \left\{ (x,t) \in R^{n+1} : |x_k| \leq R - \tfrac{1}{2} \ (k=1,\dots,n),\ t=0 \vee t=T \right\},$$

може да се заключи, че

$$\|u\|^2_{C^2(\Gamma)} \leq \frac{1}{a_0} \|f\|^2_{C^2(\bar{H}_\varepsilon)}$$

По-нататък отново може да се построи редица от "последователни приближения", чиито производни при

$$|x_k| < R - \frac{1}{2}$$

и $t = 0$ или $t = T$ се оценяват както в теорема 1, и чрез повтаряне на доказателството на теорема 1 да се построи фамилия от функции $\{u_R\}_{R>0}$, които в G_{T_2} удовлетворяват уравнението /324/ и $u_R\big|_{\partial Q_{R,T}} = 0$. От получената фамилия функции $\{u_R\}_{R>0}$ отново може да се избере подходяща сходяща подредица, чиято граница да е решение на граничната задача /324/, /325/. Единствеността се доказва както в теорема 4.

Теореми 1 - 3 дават възможност да се изучава задачата на Дирихле не само когато при $t = 0$ и $t = T$ контурът на ивицата H е S_3, но и в други случаи, например когато контурът при $t = 0$ е S_2, а при $t = T$ е S_1.

ТЕОРЕМА 5. Нека коефициентите на оператора /320/ с /321/ са дефинирани и притежават непрекъснати и ограничени производни до втори ред включително, $\underbrace{}_{\text{в } H_\delta \times [-M,M]}$ като вторите им производни са липшицови. Нека освен

/363/ $$u\big|_{t=0}=0$$

притежава единствено ограничено класическо решение.

Доказателство. Съществуването се доказва както в теорема 4, но като се използува теорема 3. Нека $\chi\in C^3(R)$ и $\psi\in C^3(R)$ са функции с ограничени производни и такива, че при $T_1>\delta$ и $0<r<R$ са изпълнени условията

/364/ $$\begin{cases}\chi(\tau)=0 & (|\tau|<r),\\ \chi(\tau)=-1 & (\tau<-R),\\ \chi(\tau)=1 & (\tau>R)\end{cases}$$

и

/365/ $$\begin{cases}0\leqq\psi\leqq 1,\\ \psi(\tau)=0 & (\tau<T+\frac{\delta}{2}),\\ \psi(\tau)=1 & (\tau>T+\frac{T_1}{2}).\end{cases}$$

Нека $\chi_1\in C^3(R^n)$ има ограничени производни и $0\leqq\chi_2\leqq 1$ и

/366/ $$\chi_2(x)=\begin{cases}1 & (|x|<r),\\ 0 & (|x|\geqq(R+r)\frac{1}{2}).\end{cases}$$

Нека числата r, R и T_1 са толкова големи, че производните на коефициентите на оператора

/367/ $$L_r(u)\equiv\chi_2(x)\psi(t)M(u)-(1-\chi_2(x)\psi(t))a_0u$$
$$+\chi(x_i)u_i+\psi(t)u_t$$

да са ограничени съответно от m_1' и m_2'. Това е възможно, както веднага се вижда от /360/. Нека $F_r\in C^2(R^{n+1})$ е такава, че

$$F_\tau(x,t) = 0 \text{ в окол } ((x,t) \in Q_{R,T+T_1}),$$

$$\|F_\tau\|_{C^0(R^{n+1})} \leqq \|f\|_{C^0(\bar{H}_\varepsilon)},$$

$$\|F_\tau\|_{C^k(R^{n+1})} \leqq \eta_k \qquad (k=1,2).,$$

/368/ $$F_\tau(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in G_\tau).$$

Горните ограничения за F могат поради /361/ да се реализират при подходящ избор на τ, R и T_1. При означението /359/ от теорема 3 следва, че граничната задача $L_\tau(u) = F_\tau$ в $Q_{R,T+T_1}$ и $u\big|_{\partial Q_{R,T+T_1}} = 0$ притежава единствено ограничено класическо решение u_τ. Сега отново може да се избере подходяща сходяща редица от фамилията функции $\{u_\tau\}$. Тъй като поради /364/-/367/ операторите L_τ и M съвпадат в G_τ, от /368/ следва, че граничната функция е решение на задачата /362/, /363/. Единствеността се доказва аналогично на единствеността в теорема 4, но като се използува следният принцип за максимум, аналогичен на онзи за параболични уравнения:

При /326/ нека в $\bar{G}_\tau$ е дефиниран операторът

$$L'(u) \equiv A^{ij}(x,t)u_{ij} + 2A^i(x,t)u_{it} + A(x,t)u_{tt}$$

$$+ B^i(x,t)u_i + B(x,t)u_t - C(x,t)u,$$

за който

$$A^{ij}\xi_i\xi_j + 2A^i\xi_i\xi_0 + A\xi_0^2 \geqq 0$$

и

$$A(x,T) = 0, \quad B(x,T) < 0, \quad C(x,t) > 0.$$

Ако $\Gamma = \partial G_\tau \setminus \{(x,t) : t = T\}$, за всяка функция u, която удовлетворява условията $u \in C^2(G_\tau) \cap C^0(\bar{G}_\tau)$, $L'(u) \leqq 0$ в

$\overline{G}_{T_2} \setminus \Gamma$ и $u\big|_{\Gamma} \geq 0$, е в сила $u \geq 0$ в $\overline{G}_{T_2}$.

Доказателството на този принцип е напълно аналогично на даденото в [32] доказателство на принципа за максимум при параболичните уравнения.

По подобен начин могат да се разглеждат и гранични задачи за ултрапараболични уравнения.

ТЕОРЕМА 6. При означенията /307/-/309/ от пример 2 нека в $\overline{H}_\delta^+ \times [-M, M]$ са дефинирани и притежават ограничени втори производни коефициентите на оператора

$$M(u) \equiv a^{ij}(x,y,u)u_{ij} + a^i(x,y,u)u_i \tag{369}$$

$$+ b^k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y_k} - c(x,y,u)u,$$

като вторите производни са липшицови. Нека в $\overline{H}_\delta^+ \times [-M, M]$ са изпълнени условията /310/ и /311/ и коефициентите $b^k(x,y,s)$ да имат постоянни знаци върху хиперравнините $y_k = \pm \beta_k$. Нека границата ∂H^+ е разделена на части S_1 и S_2, функцията $f \in C^2(\overline{H}_\delta^+)$ да има ограничени производни, като вторите ѝ производни са липшицови и са в сила аналогични на /313/ ограничения. Ако константата a_0 е достатъчно голяма, граничната задача $M(u) = f$ в H^+ и $u\big|_{S_2} = 0$ притежава единствено ограничено класическо решение.

Д о к а з а т е л с т в о. Доказателството за съществуване е напълно аналогично на доказателството на теорема 5 и се основава на прилагане на теорема 3 за редица от разширяващи се области и подходящи модификации на оператора /369/. Доказателството на единствеността също е аналогично на съответното доказателство от теорема 4, но като се използва следната модификация на принципа за максимум:

При $R > 0$ нека $Q_R = \{(x,y) : |x| < R, y_k < \beta_k\}$.

Ако за оператора

$$\tilde{L}(w) = a^{ij}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x,y)\frac{\partial w}{\partial x_i} + b^k(x,y)\frac{\partial w}{\partial y_k} - c(x,y)w$$

с $a^{ij}(x,y)\xi_i\xi_j \geqq 0$ и $c(x,y) > 0$ е в сила $\tilde{L}(w) \leqq 0$ в $Q_R \cup S_1$ и $w\big|_{\partial Q_R \setminus S_1} \geqq 0$, то $w \geqq 0$ в Q_R.

Този вариант на принципа за максимум също се доказва аналогично на предложените в [31] и [32] варианти на същия принцип.

Задачата от теорема 6 може да се формулира и реши и в случая, когато паралелепипедът P е неограничен по някои /но не по всички/ от променливите y_k. Тогава, разбира се, съответните гранични условия се изпускат. Така например, ако $P = \{y \in R^m : 0 < y_1 < \beta_1\}$, теорема 6 се превръща в частния случай $A^i(x,t,s) = A(x,t,s) \equiv 0$ на теорема 4.

§ 8. ЗАДАЧА НА КОШИ

В настоящия параграф се използуват получените при доказателствата на теореми 1 и 3 априорни оценки, за да се изучи задачата на Коши за израждащи се параболични и ултрапараболични уравнения в някои неограничени области. Изследванията се основават на следната теорема.

ТЕОРЕМА 7. Нека $\Omega \subset R^n$ е област с частично гладка граница и $G_T = \Omega \times (0,T)$. При $G' \supset \bar{G}_T$ нека в $\bar{G}'_T \times [-M,M]$ са дефинирани и двукратно гладки коефициентите на оператора

/370/ $$M(u) \equiv a^{ij}(x,t,u)u_{ij} + a^i(x,t,u)u_i - u_t - a(x,t,u)u,$$

като вторите им производни са липшицови, и

$$a^{ij}(x,t,s)\xi_i\xi_j \geq 0 \qquad (\xi \in R^n)$$

при $(x,t) \in \bar{G}'_T$, $s \in [-M,M]$. Нека $f \in C^2(\bar{G}'_T)$, като вторите производни на тази функция са липшицови, и

/371/ $$f(x,t) = 0$$

при $(x,t) \bar{\in} G_T$. Нека $\Gamma = \partial\Omega \times [0,T]$ е J_2 за оператора /370/. Тогава съществува такова τ с $0 < \tau \leq T$, че при $G_\tau = \Omega \times (0,\tau)$ уравнението

/372/ $$M(u) = f$$

в G_τ и

/373/ $$u \Big|_{\Omega \cup (\partial\Omega \times [0,\tau])}$$

притежава единствено класическо решение.

Д о к а з а т е л с т в о. Доказателството е модификация на онсва на теорема 3. Нека Q_R е кубът

$$Q_R = \{(x,t) : |t| < R, |x_k| < R\ (k=1,\dots,n)\},$$

а коефициентите на операторите

$$M_\varepsilon(v;u) \equiv b_\varepsilon^{ij}(x,t,v)u_{ij} + b_\varepsilon(x,t)u_{tt}$$

$$+ \varepsilon(\Delta_x u + u_{tt}) + b_\varepsilon^i(x,t,v)u_i - u_t - c_\varepsilon(x,t,v)u,$$

дефинирани в Q_R, са подходящи апроксимации на коефициентите на /370/ в G и

$$b_\varepsilon(x,t) \geqq 0;\ b_\varepsilon(x,t) = 0,\ (x,t) \in G.$$

Нека близо до ∂Q_R операторите $M_\varepsilon(v;u)$ имат вiда

$$M_\varepsilon(v;u) = (\mu+\varepsilon)(\Delta_x u + u_{tt})$$

и

$$L_{\varepsilon,\lambda}(v;u) \equiv M_\varepsilon(v;u) - \lambda u,$$

където $\lambda \geqq 0$ е константа, която ще бъде определена допълнително. Нека константите m_k' / $k =$ 1, 2, 3/ удовлетворяват неравенствата

$$m_k' \geqq \max\{|D^{\alpha+p} b_\varepsilon^{ij}|, |D^{\alpha+p} b_\varepsilon|, |D^{\alpha+p} b_\varepsilon^i|, |D^{\alpha+p} c_\varepsilon|\}$$

/ $|\alpha| + p = k$, $k =$ 1, 2, 3/. Такива константи съществуват и, както е известно, се определят от максимумите на производните на коефициентите на оператора /370/ и от липшицовите константи на вторите производни на тези коефициенти. Нека $f_\varepsilon(x,t)$ са достатъчно гладки апроксимации на $f(x,t)$. Поради /371/ може да се предполага, че

/374/ $$f_\varepsilon(x,t) = 0 \qquad (t<0)$$

Нека

/375/ $$\eta_k = \max_{Q_R} |D^\alpha f_\varepsilon(x,t)|$$

/ $k = 0, 1, 2, 3$/. Такива константи съществуват и се определят от съответните производни на f и от липшицовите константи на вторите й производни. Нека

/376/ $$F_{\varepsilon,\lambda}(x,t) = e^{-\lambda t} f_\varepsilon(x,t).$$

От /374/ и формулата на Тейлър следва

/377/ $$f_\varepsilon(x,t) = \frac{-t^3}{3!} \frac{\partial^3 f_\varepsilon}{\partial t^3}(\tau').$$

От /375/-/377/ следва

/378/ $$|F_{\varepsilon,\lambda}(x,t)| \leq \frac{e^{-\lambda t} t^3}{3!} \eta_3 = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^3}{3!\,\lambda^2} \leq \frac{m}{\lambda^3} \eta_3,$$

където

/379/ $$m = \max_{u \geq 0} \frac{e^{-u} u^2}{6}$$

Ето защо

/380/ $$\| F_{\varepsilon,\lambda}(x,t) \|_{C^0(\bar{Q}_R)} \leq \frac{m}{\lambda^2} \eta_3.$$

Аналогично се доказва валидността на неравенствата

/381/ $$\| F_{\varepsilon,\lambda}(x,t) \|_{C^1(\bar{Q}_R)} \leq \frac{m'}{\lambda^2} \eta_3,$$

/382/ $$\| F_{\varepsilon,\lambda}(x,t) \|_{C^2(\bar{Q}_R)} \leq \frac{m'}{\lambda} \eta_3$$

и

$$\| F_{\varepsilon,\lambda}(x,t) \|_{C^3(\bar{Q}_R)} \leq m' \eta_3,$$

където m' се определя от максимумите на функции от вида $Ce^{-u}u^2$ и $Ce^{-u}u$ $(C = const.)$.

Ако u е гладка функция в полупространството $\{t \leqq \tau\}$ с ограничени производни, известно е, че тя може да се продължи гладко до функция $\tilde{u}$ в цялото пространство по такъв начин, че да е в сила

/383/ $$\|\tilde{u}\|_{C^3(R^{n+1})} \leqq \theta \|u\|_{C^3(\{t \leqq \tau\})},$$

като θ не зависи от τ. Нека сега u е решение на граничната задача $L_{\varepsilon,\lambda}(v; u) = F_{\varepsilon,\lambda}$ в Q_R и $u|_{\partial Q_R} = 0$. Ако $c(x,t,s) \geqq \lambda_0$ /като е възможен и случаят $\lambda_0 < 0$/, при означенията

$$P_u = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u)^2,$$

$$Q_u = \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u)^2,$$

$$R_u = \sum_{|\alpha|=3} (D^\alpha u)^2$$

/тук са използувани очевидни модификации на дефиницията на D^α от /15/, /16/, когато $(x,y) \in R^{n+1}$ /, от леми 6 - 9 следват неравенствата

/384/ $$|u| \leqq \frac{\|F_{\varepsilon,\lambda}\|_{C^0(\bar{Q}_R)}}{\lambda + \lambda_0},$$

/385/ $$P_u \leqq \frac{1}{\lambda + \lambda_0} \|F_{\varepsilon,\lambda}\|^2_{C^1(\bar{Q}_R)},$$

/386/ $$u^2 + P_u + Q_u \leqq \frac{1}{\lambda+\lambda_0} \| F_{\varepsilon,\lambda} \|_{C^2(\bar{Q}_R)},$$

/387/ $$R_u \leqq \frac{n_2 m_2'^2}{(\lambda+\lambda_0)^2} \max (u^2 + P_u + Q_u) \max R_v + M' \leqq$$

$$\leqq \frac{n_2 m_2'^2}{(\lambda+\lambda_0)^3} \| F_{\varepsilon,\lambda} \|^2_{C^2(\bar{Q}_R)} \max R_v + M',$$

при предположенке, че е в сила неравенството

/388/ $$\lambda + \lambda_0 \geqq 2 + n_1 m_1' + n_2 m_2' + (n_1 m_1' + n_2 m_2') |D^1 v| +$$

$$+ n_2 m_2' |D^1 v|^2 + n_2 m_1' |D^2 v|,$$

като в /387/ и /388/ n_1 и n_2 са константи, които зависят само от размерността n, вж. /239/. По точно, неравенствата /384/-/387/ се получават от /293/-/296/ при $u = u_v$, $v = v_{v-1}$

При

/389/ $$k_1 = -\lambda_0 + 2 + n_1 m_1' + n_2 m_2',$$

$$k_2 = n_1 m_1' + n_2 m_2', \; k_3 = n_2 m_2', \; k_4 = n_2 m_1'$$

нека λ е такова, че

/390/ $$\lambda \geqq k_1 + 6 m' \eta_3 \Big(\frac{k_2}{\lambda} + \frac{k_2}{\lambda(\lambda+\lambda_0)^{1/2}}$$

$$+ \frac{k_3 m' \eta_3}{\lambda^2} + \frac{k_3 m' \eta_3}{\lambda^2(\lambda+\lambda_0)} + 2 k_4 + \frac{k_4}{(\lambda+\lambda_0)^{1/2}} \Big).$$

Ако за една функция u с $|D^0 u|_\tau$, $|D^1 u|_\tau$, $|D^2 u|_\tau$ са означени максимумите на самата функция и на съответните производни при $t \leq \tau$, вж. /28/, то за функцията

/391/ $$w = e^{\lambda t} v$$

се получава

/392/ $$\begin{cases} |D^0 w|_\tau \leqq e^{\lambda\tau} |D^0 v|, \\ |D^1 w|_\tau \leqq e^{\lambda\tau} |D^1 v| + \lambda e^{\lambda\tau} |v|, \\ |D^2 w|_\tau \leqq e^{\lambda\tau} |D^2 v| + 2e^{\lambda\tau}\lambda |D^1 v| + e^{\lambda\tau}\lambda^2 |v|. \end{cases}$$

Нека сега

/393/ $$\tau = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\lambda(\lambda+\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\right)$$

и нека $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ е редица от реални числа с $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$ и $\varepsilon_\nu \geqq \varepsilon_{\nu+1} > 0$. Да разгледаме редиците от функции $\{u_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, $\{\tilde{u}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ и $\{v_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, дефинирани по следния начин: $u_0 = \tilde{u}_0 = 0$, а ако u_ν и $\tilde{u}_\nu$ са вече дефинирани, то $v_{\nu+1}$ е единственото решение на граничната задача

$$L_{\varepsilon_{\nu+1},\lambda}(\tilde{u}_\nu; v_{\nu+1}) = F_{\varepsilon_{\nu+1},\lambda}$$

в Q_R и

$$v_{\nu+1}\Big|_{\partial Q_R} = 0;$$

сега по дефиниция

/394/ $$u_{\nu+1} = e^{\lambda t} v_{\nu+1},$$

а $\tilde{u}_{\nu+1}$ е продължението на $u_{\nu+1}$ през хиперравнината $\{t = \tau\}$, т.е.

/395/ $$\tilde{u}_{\nu+1} = u_{\nu+1}$$

при $t \leqq \tau$. От /383/, /391/, /392/ и /394/ следват неравенствата

/396/
$$\begin{cases} \|\tilde{u}_{\nu+1}\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \leqq \theta |D^0 u_{\nu+1}|_\tau \leqq \theta e^{\lambda\tau} \|v_{\nu+1}\|_{C^0(\bar{Q}_R)} \\ |D^1 \tilde{u}_{\nu+1}| \leqq \theta |D^1 u_{\nu+1}|_\tau \leqq \theta \left(e^{\lambda\tau} |D^1 v_{\nu+1}| + \lambda e^{\lambda\tau} |v_{\nu+1}|\right) \\ |D^2 \tilde{u}_{\nu+1}| \leqq \theta |D^2 u_{\nu+1}|_\tau \leqq \theta \left(|D^2 v_{\nu+1}| e^{\lambda\tau} \right. \\ \qquad \left. + 2\lambda e^{\lambda\tau} |D^1 v_{\nu+1}| + \lambda^2 e^{\lambda\tau} |v_{\nu+1}|\right). \end{cases}$$

От /396/, дефиницията на $v_{\nu+1}$, /384/-/397/, /378/-/382/, /383/ и /390/ следва

/397/ $$\lambda + \lambda_0 \geqq 2 + n_1 m_1' + n_2 m_2' + (n_1 m_1' + n_2 m_2') |D^1 \tilde{u}_{\nu+1}|$$
$$+ n_2 m_2' |D^1 \tilde{u}_{\nu+1}|^2 + n^2 m_1' |D^2 \tilde{u}_{\nu+1}|_{\nu+1}$$

Тъй като /397/ е в сила за $\tilde{v}_3$, горните разсъждения показват, че, ако то е в сила за $\tilde{u}_\nu$, в сила е и за $\tilde{u}_{\nu+1}$, т.е. неравенството /397/, а от там и неравенствата /396/, са в сила за всяко ν. От /387/ следва

$$R_{v_{\nu+1}} \leqq \frac{n_2 m_2'^2 m'^2 \eta_3^2}{(\lambda+\lambda_0)^3 \lambda^2} \max R_{\tilde{u}_\nu} + M'$$

Но от

$$\max R_{\tilde{u}_\nu} \leqq \theta^2 \max_{0 \leqq t \leqq \tau} R_{u_\nu} \leqq \theta^2 e^{2\lambda\tau} R_{v_\nu} + M'',$$

където съгласно вече доказаното M'' не зависи от ν, се получава

/398/ $$\max R_{v_{\nu+1}} \leqq \alpha \max R_{v_\nu} + M''',$$

където поради /393/ и /388/ е в сила $0 < \alpha < 1$. От /398/ следва, че редицата $\{R_{v_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ е равномерно ограничена, следователно същото важи и за редиците $\{R_{u_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ и $\{R_{\tilde{u}_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$. Като се използуват намерените по-горе оценки и се разгледат разликите

$$L_{\varepsilon_{\nu+1},\lambda}(\tilde{u}_\nu, v_{\nu+1}) - L_{\varepsilon_\nu,\lambda}(\tilde{u}_{\nu-1}, v_\nu)$$

$$= F_{\varepsilon_{\nu+1},\lambda} - F_{\varepsilon_\nu,\lambda},$$

както в лема 10 се вижда, че редицата $\{\tilde{u}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $\bar{Q}_R$.

Следователно може да се избере подредица $\{v_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$, за която

$$\lim_{\mu\to\infty} v_{\nu_\mu} = v$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty} D^\alpha v_{\nu_\mu} = D^\alpha v$$

в Q_R. Сега редицата $\{\tilde{u}_{\nu_\mu - 1}\}_{\mu=1}^{\infty}$ е също сходяща; нека

$$\lim_{\mu\to\infty} \tilde{u}_{\nu_\mu - 1} = \tilde{u}$$

Чрез граничен преход в

$$L_{\varepsilon_{\nu_\mu},\lambda}(\tilde{u}_{\nu_\mu - 1}, v_{\nu_\mu}) = F_{\varepsilon_{\nu_\mu},\lambda}$$

се получава

$$M_0(\tilde{u}; v) - \lambda v = F_\lambda$$

в Q_R, където

$$F_\lambda = e^{-\lambda t} f.$$

Както в доказателството на теорема 2 се установява, че са в сила равенствата

$$a^{ij}(x,t,\tilde{u}) v_{ij} + a^i(x,t,\tilde{u}) v_i - v_t$$

$$- (\lambda + c(x,t,\tilde{u})) v = e^{-\lambda t} f(x,t)$$

в G и

$$v\Big|_{\partial G \setminus (\Omega \times \{T\})} = 0.$$

От /394/ следва, че е в сила равенството

$$\lim_{\mu\to\infty} u_{\nu_\mu} = e^{\lambda t} v,$$

следователно функцията u удовлетворява в G уравнението

$$a^{ij}(x,t,\tilde{u})u_{ij} + a^i(x,t,\tilde{u})u_i - u_t - c(x,t,\tilde{u})u = f(x,t),$$

като освен това

$$u\Big|_{\Omega \cup \Gamma} = 0.$$

Тъй като поради /395/ при $0 \leq t \leq \tau$ е в сила $u = \tilde{u}$, с това е доказано съществуването на решение.

Единствеността се установява аналогично на единствеността в теорема 3. По-точно, ако u е вече построеното решение, а v е някое друго решение, като се разгледа функцията $w = e^{\lambda t}(u-v)$ в областта $\Omega \times (0,T)$ и се използува принципът за максимум при параболичните уравнения с подходящ избор на λ, се получава $w \equiv 0$.

ЗАБЕЛЕЖКА 6. Полученото решение u притежава производни до втори ред включително, като вторите му производни са липшицови. При това, както се вижда от доказателството, максимумите на производните и липшицовите константи на вторите производни се определят единствено от коефициентите и от дясната страна на уравнението, но не зависят от размерите на областта. Същото важи и за константата λ, а следователно и за интервала $[0,\tau]$, в който се получава решението. Тези обстоятелства се използуват при доказателството на следната теорема.

ТЕОРЕМА 8. Нека са удовлетворени предположенията на теорема 6, без евентуално изискването константата a_0 да е голяма. Ако са в сила неравенствата

$$/399/\qquad b^m(x,y,-1) \leq \mu_0 < 0,$$

съществува константа η с $0 < \eta \leq \beta_m$, така че в паралелопипеда

$$\{(x,y) : x \in R^n;\ |y_k| < \beta_k\ (k=1,\dots,m-1),\ 0 < y_m < \eta\}$$

уравнението

$$M(u) = f$$

притежава единствено ограничено класическо решение, което удовлетворява граничното условие

$$u\Big|_{S_2 \cup \{y_m = 0\}} = 0,$$

стига за f да е в сила

$$f(x,y) = 0$$

при $y_m < 0$.

Д о к а з а т е л с т в о . Прилагаме теорема 7 за областите

$$Q_R = \{(x,y) : |x_i| < R\ (i=1,\dots,n),\ |y_k| < \beta_k\ (k=1,\dots,m-1),\ 0 < y_m < \beta_m\}$$

при подходяща модификация на оператора /369/, така че частта от контура върху хиперравнините $x_i = \pm R$ да е S_2. /Такова изменяне на оператора /369/ може да се получи например с помощта на функциите /364/-/366/. /

Нека $\{R_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е редица от реални числа с $R_\nu \to \infty$.

От теорема 7 следва, че съществува редица $\{u_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ от функции, кои то са равномерно ограничени заедно с производните си до втори ред, като вторите им производни са липшицови с една и съща константа при $0 < y_m < l$. Сега, като извършим граничен преход, както в теорема 4, получаваме търсеното решение.

Единствеността се доказва, както в теорема 6. По-точно, ако u е вече полученото ограничено решение, а v е някое друго решение, разглеждаме функцията $w = e^{\lambda y_m}(u-v)$ при подходящо $\lambda > 0$ и установяваме, че тя удовлетворява равенството

$$a^{ij}(x,y,u)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x,y,u)\frac{\partial w}{\partial x_i} + b^k(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$+ (\lambda b^m(x,y,u) - c(x,y,u))w = \Phi(x,y),$$

където поради /399/ величината

$$\lambda b^m(x,y,u) - c(x,y,u)$$

може да се направи достатъчно голяма и отрицателна. По-нататък доказателството е напълно аналогично на онова от теорема 6.

При $m = 1$ теорема 8 е аналогична на резултатите, установени в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Генчев Т.: Частни диференциални уравнения. София, 1972.

2. Ладыженская О. А., Уральцева Н.Н.: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва, 1973.

3. Ладыженская О. А., Уральцева Н.Н., Солонников В. А.: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва, 1967.

4. Дубинский Ю. А.: Первая краевая задача для вырождающихся квазилинейных систем эллиптических дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 156, № 5 /1964/, 1018-1021.

5. Уральцева Н. Н.: Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы. Зам. научн. сем. ЛОМИ, 7 /1968/, 184-222.

6. Дубинский Ю. А.: Квазилинейные эллиптико-параболические уравнения. Мат. сб., 77:3 /1968/, 354-389.

7. Соломяк Т. Б.: Задача Дирихле для одного класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений. Изв. вузов, сер. мат., № 2 /1970/, 76-85.

8. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь: Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. ИАН СССР, сер. мат., 22:5 /1958/, 667-704.

9. Генчев Т.: Върху задачата на Коши за един клас квазилинейни уравнения с неотрицателна характеристична форма. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 60 /1965-1966/, 113-137.

10. Fichera G.: Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboloche del secondo ordine. Atti Acc. Naz. Lincei Mem. Ser. 8, vol. 5 (1956), 1-30.

11. Fichera G.: On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. Boundary value problems in differential equations. Madison, 1960, 97-120.

12. Генчев Т.: Об ультрапараболических уравнениях. ДАН СССР, 151 /2/ /1963/, 265-268.

13. Генчев Т.: Върху задачите на Дирихле и Коши за ултрапараболичните уравнения. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 57 /1962-1963/, 9-41.

14. Kohn J. J.: Nirenberg L. Non-coercive boundary value problems. Comm. pur. appl. math., 18 (3) (1965), 443-492.

15. Олейник О. А.: О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Мат. сб., 69 /111/:1 /966/, 111-139.

16. Kohn J. J., Nirenberg L.: Degenerate elliptic-parabolic equations of second order. Comm. pur. appl. math., 20 (1967), 797-872.

17. Bernstein S. N.: Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picards. C. R., 151 (1910), 635-638.

18. Бернштейн С. Н.: Ограничение моделуй последовательных производных решений уравнений параболического типа. ДАН СССР, 18, № 7 /1938/, 385-388.

19. Ильин А. М.: Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения. Мат. сб., 50 /92/,/1960/, 443-498.

20. Chobanov G.: Quasilinear degenerate elliptic-parabolic equations of second order. (In print.).

21. Чобанов Г.: Върху задачата на Дирихле за един клас квазилинейни уравнения от втори ред с неотрицателна характеристична форма. Год. на Соф. унив., Фак. мат. мех., 69 /1974-1975/ /под печат/.

22. Chobanov G. I.: On the Cauchy problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations. C. R. Acad. bulg. sci., 28 (1975), 12, 1579-1581.

23. Schwartz J. T.: Differential geometry and topology. New York, 1968.

24. Miranda C.: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

25. Kelly J. L.: General topology. New York-Toronto-London, 1957.

26. Lions J. L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. Paris, 1968.

27. Hörmander L.: Linear partial differential operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

28. Люстерник Л. А., Соболев В. И.: ЕлементьI функционального анализа. Москва, 1965.

29. Yosida K.: Functional analysis. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

30. Bers L., John F., Schechter M.: Partial differential equations. New York-London-Sydney, 1964.

31. Генчев Т.: Върху задачата на Коши за един клас от ултрапараболични уравнения. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 58 /1963-1964/, 141-170.

32. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.: ЛинейньIе уравнения второго порядка параболического типа. Усп. мат. наук, 17 /3/ /105/ /1962/, 3-146.

СЪДЪРЖАНИЕ