БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

Красимир Бориславов Кънчев

ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЯТА НА МИНИМАЛНИТЕ ПОВЪРХНИНИ В 4-МЕРНО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО ИЛИ ПРОСТРАНСТВО НА МИНКОВСКИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за присъждане на
образователната и научна степен „Доктор“

Област на висше образование 4. Природни науки, Математика и Информатика

Професионално направление 4.5. Математика

Докторска програма „Геометрия и Топология”

Научни консултанти: доц. д-р Георги Ганчев
проф. д-р Огнян Касабов

София, 2018 г.

Дисертационният труд съдържа 237 страници, от които 234 страници основен текст и 3 страници библиография с 37 заглавия.

Номерацията на формулите, дефинициите, следствията, твърденията и теоремите в автореферата съответства точно на номерацията им в дисертационния труд.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на заседание на разширено звено към секция "Анализ, Геометрия и Топология" на ИМИ-БАН, назначено със заповед номер 44/19.02.2018 г., проведено на 27.02.2018г.

Дисертантът работи като асистент към катедра „Математика и Информатика" във ВТУ „Тодор Каблешков"

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от .... часа в аудитория .... на ИМИ–БАН на открито заседание на научно жури в състав:

1. _
2. _
3. _
4. _
5. _

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ-БАН.

Заглавие: *Върху Геометрията на Минималните Повърхнини в 4-Мерно Евклидово Пространство или Пространство на Минковски.*

Автор: Красимир Бориславов Кънчев

Увод

Теорията на гладките повърхнини е основен обект на изследване както в диференциалната геометрия, така и във физиката. Класически проблем в диференциалната геометрия на гладките повърхнини е изучаването на свойствата на повърхнините, удовлетворяващи условия за техните инварианти. Така се получават: минималните повърхнини, CMC-повърхнините, повърхнините с постоянна Гаусова кривина и пр.

През 1744 г. Ойлер поставя и решава проблема за намирането на ротационна повърхнина, която минимизира функционала на лицето. Единственото решение на тази задача е катеноидът. Малко по-късно Лагранж намира диференциалното уравнение (уравнение на Ойлер-Лагранж) на повърхнините, които минимизират функционала на лицето (минимални повърхнини). През 1776 г. Мьоние показва, че хеликоидът също е решение на тази задача и дава основната интерпретация на повърхнините, удовлетворяващи уравнението на Ойлер-Лагранж: сумата на главните кривини във всяка точка е нула, т.е. минималните повърхнини се характеризират с нулева средна кривина. Това свойство се използва най-често като дефиниция на минимална повърхнина и в по-общите случаи.

Естествено продължение на изследването на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$ е теорията на минималните повърхнини в четиримерните и многомерните псевдоевклидови пространства. Основа на изучаването на минималните повърхнини в четиримерните пространства $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4_1, \mathbb{R}^4_2)$ е теорията на гладките повърхнини в тези пространства.

Инварианти на гладките повърхнини в $\mathbb{R}^4$ са изучавани от Eisenhart [9], Kommerell [28], Schouten и Struik [32], Spivak [34], Wong [37], Little [29]. Първите локални изследвания са посветени на изучаването на конфигурацията от точка и елипсата на нормалната кривина, която е фигура в нормалната равнина на повърхнината в тази точка.

Нов подход в изучаването на повърхнините в $\mathbb{R}^4$, основан на изображение от тип на Вайнгартен, въвеждат и използват Ганчев и Милушева в [18] и [19].

Нека $\mathcal{M}$ е повърхнина в $\mathbb{R}^4$. Изображението γ от тип на Вайнгартен, въведено в [18] във всяка точка на повърхнината, поражда две инвариантни функции k и $\varkappa$. Функцията k е геометрична инварианта, а $\varkappa$ е инварианта с точност до знак.

В [20] Ганчев и Милушева въвеждат геодезична торзия на тангента в точка от повърхнината. Главните относно γ тангенти се характеризират като тангенти с нулева геодезична торзия. Нормалните кривини ν', ν'' на главните тангенти се наричат главни нормални кривини. Инвариантите k и $\varkappa$ се изразяват чрез главните нормални кривини по следния начин: $k = \nu'\nu'',\ \varkappa = \dfrac{\nu' + \nu''}{2}$.

В [19] Ганчев и Милушева въвеждат 8 инварианти на една повърхнина и доказват фундаменталната теорема в теорията на двумерните повърхнини в $\mathbb{R}^4$, която гласи, че повърхнината се определя еднозначно с тези инварианти.

Основен подход в нашите разглеждания на повърхнините е използването на специални геометрични координати – канонични координати.

В [15] е показано, че в $\mathbb{R}^3$ класът на Вайнгартеновите повърхнини допуска канонични координати. Спрямо тези координати коефициентите на първата и втората основна форма се изразяват чрез инвариантите на повърхнината, а условията за интегруемост се свеждат до едно нелинейно частно диференциално уравнение (*естествено частно диференциално уравнение*). Всяко решение на това уравнение съответства на единствена с точност до движение Вайнгартенова повърхнина. По този начин описанието на даден подклас повърхнини се свежда до изучаването на решенията на съответното естествено уравнение.

Основна класическа векторна функция върху една повърхнина е векторната функция на средната кривина H. Повърхнината $\mathcal{M}$ се нарича *минимална*, ако векторът на средната кривина във всяка точка е нула: $\mathrm{H} = 0$.

Една повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^4$ е минимална точно когато центърът на елипсата на нормалната кривина във всяка точка на повърхнината съвпада с началото на координатната система в нормалната равнина на $\mathcal{M}$.

В [18] е доказано, че:

Една повърхнина в $\mathbb{R}^4$ е минимална точно когато инвариантите k и $\varkappa$ удовлетворяват равенството $\varkappa^2 - k = 0$.

В [19] е доказано, че:

Една повърхнина в $\mathbb{R}^4$ е минимална точно когато във всяка нейна точка всички тангенти са главни.

Една повърхнина в $\mathbb{R}^4$ се нарича *суперконформна*, ако елипсата на нормалната кривина във всяка точка на повърхнината е окръжност.

При изучаването на несуперконформните минимални повърхнини в четиримерното Евклидово пространство съществено използваме факта, че тези повърхнини допускат канонични координати. Съществуването на канонични координати за този клас повърхнини в $\mathbb{R}^4$ е доказано в [25], а съществуването на канонични координати върху минимални пространственоподобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$ е доказано в [1].

В Глава 3 на тази дисертация ние решаваме следната задача:

Да се изследват всички минимални несуперконформни повърхнини в $\mathbb{R}^4$.

Тази задача има два аспекта. Първият е: *Да се намерят решенията на системата на Френе, която описва минималните несуперконформни повърхнини в* $\mathbb{R}^4$. Тази задача решаваме, като намираме канонично представяне на Вайерщрас за всяка минимална несуперконформна повърхнина.

Вторият аспект е: *Да се намерят локално решенията на системата от естествени уравнения на минималните несуперконформни повърхнини в*

$\mathbb{R}^4$. Тази задача решаваме като използваме каноничното представяне на Вайерщрас или свеждаме проблема до решаване на естественото уравнение на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$.

В Глава 5 на дисертацията поставяме и решаваме аналогичните задачи за минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$.

Материалът е разпределен в пет глави, както следва:

Глава 1. Минимални повърхнини в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_1$

В Глава 1 се разглеждат минимални повърхнини в $\mathbb{R}^n_k$, $k = 0; 1$. Тук се разглеждат тези свойства на минималните повърхнини, които са валидни при произволна размерност $n \geq 3$. В Секция 1.1 са дадени основните означения и дефиниции. С $\mathbb{R}^n_k$ означаваме стандартното n-мерно псевдо-Евклидово пространство със скаларно произведение:

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \sum_{s=1}^{n-k} a_s b_s - \sum_{s=n-k+1}^{n} a_s b_s \ . \tag{1.1.1}$$

В нашите разглеждания k ще бъде 0 или 1, което отговаря на стандартното n-мерно Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ или съответно на n-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^n_1$. С $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0, \mathrm{x})$ означаваме гладка повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$, където $\mathcal{M}_0$ е двумерно гладко многообразие, а x – имерсия на $\mathcal{M}_0$ в $\mathbb{R}^n_k$. С $T_p(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^n_k$ означаваме допирателното пространство, а с $N_p(\mathcal{M})$ съответно нормалното пространство на $\mathcal{M}$ в точката $p \in \mathcal{M}$. При $k = 1$ ще предполагаме, че индуцираното от $\mathbb{R}^n_1$ скаларно произведение в $T_p(\mathcal{M})$, е положително определено. Повърхнините от разглеждания вид в $\mathbb{R}^n_1$ се наричат *пространствено-подобни*. За точка $p \in \mathcal{M}$ с (u, v) означаваме двойка локални координати (параметри) около p, които се менят в област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Имерсията x поражда векторна функция $\mathrm{x}(u, v) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n_k$. Тъй като понататъшните разглеждания са локални, за $\mathcal{M}$ ще предполагаме, че е от вида $(\mathcal{D}, \mathrm{x})$, където $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. За коефициентите на първата основна форма на $\mathcal{M}$ използваме стандартните означения E, F и G. Известно е, че около всяка точка $p \in \mathcal{M}$ могат да се въведат изотермични координати, характеризиращи се с условията $E = G$ и $F = 0$. По-нататък, ако не е казано друго, ще предполагаме че координатите (u, v) са изотермични. В този случай е удобно, наред с реалните координати (u, v) да разглеждаме и комплексната координата $t = u + \mathrm{i}v$.

Като използваме стандартното влагане на $\mathbb{R}^n_k$ в $\mathbb{C}^n$, ще разглеждаме комплексифицираното допирателно пространство $T_{p,\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ на $\mathcal{M}$ в точката p като подпространство на $\mathbb{C}^n$. Аналогично ще отъждествяваме комплексифицираното нормално пространство $N_{p,\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ на $\mathcal{M}$ със съответното подпространство на $\mathbb{C}^n$. Ако a и b са два вектора в $\mathbb{C}^n$, то с $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$ (или само ab) означаваме билинейното произведение в $\mathbb{C}^n$, явяващо се естествено продължение на произведението (1.1.1) от $\mathbb{R}^n_k$. С a^2 означаваме скаларния квадрат относно това произведение.

За даден вектор a от $\mathbb{C}^n$, с $\mathrm{a}^\top$ означаваме ортогоналната проекция на вектора a върху $T_{p,\mathbb{C}}(\mathcal{M})$, а с $\mathrm{a}^\perp$ ортогоналната проекция върху $N_{p,\mathbb{C}}(\mathcal{M})$. Със $\sigma(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (\nabla_\mathrm{X}\mathrm{Y})^\perp$ означаваме втората основна форма на $\mathcal{M}$, където ∇ е каноничната свързаност в $\mathbb{R}^n_k$. Ако n е нормален вектор за $\mathcal{M}$, с A_n означаваме съответното Вайнгартеново изображение, при което имаме $A_\mathrm{n}\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y} = \sigma(\mathrm{X},\mathrm{Y})\cdot\mathrm{n}$. Основни инварианти на всяка повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^n_k$ са нейната векторнозначна *средна кривина* H, която по дефиниция се дава с: $\mathrm{H} = \frac{1}{2}\operatorname{trace}\sigma = \frac{1}{2}(\sigma(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_1)+\sigma(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_2))$ и нейната *Гаусова кривина* K, за която имаме уравнението на Гаус: $K = \sigma(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_1)\sigma(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_2) - \sigma^2(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$. Основен обект на изучаване в дисертацията са минималните повърхнини, които се определят чрез:

Дефиниция 1.1.1 ***Минимална повърхнина*** *в $\mathbb{R}^n_k$ се наричa всяка повърхнина, за която* $\mathrm{H} = 0$.

В Секция 1.2 за дадена повърхнина (възможно неминимална) $\mathcal{M} = (\mathcal{D},\mathrm{x}(t))$, зададена с изотермични координати $t = u + \mathrm{i}v$, е въведена векторната функция $\Phi(t)$ чрез равенството:

$$\Phi(t) = 2\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t} = \mathrm{x}_u - \mathrm{i}\mathrm{x}_v\,. \tag{1.2.1}$$

Тази функция ни служи като основен аналитичен инструмент при изучаване на минималните повърхнини. Основните свойства на $\Phi(t)$ се дават от

Теорема 1.2.2 *Нека повърхнината $\mathcal{M} = (\mathcal{D},\mathrm{x})$ в $\mathbb{R}^n_k$ е зададена с изотермични координати $(u,v)\in\mathcal{D}$ и $t = u+\mathrm{i}v$. Тогава функцията Φ, дефинирана с* (1.2.1) *удовлетворява трите условия:*

$$\Phi^2 = 0; \qquad \|\Phi\|^2 > 0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial t}\,. \tag{1.2.8}$$

Обратно, нека $\Phi(t) : \mathcal{D}\to\mathbb{C}^n$ е комплекснозначна векторна функция, дефинирана в област $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$, удовлетворяваща трите условия (1.2.8). *Тогава около всяка точка $t_0\in\mathcal{D}$ съществува подобласт $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$ и функция $\mathrm{x} : \mathcal{D}_0\to\mathbb{R}^n_k$, така че $(\mathcal{D}_0,\mathrm{x})$ е регулярна повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$. Тази повърхнина има за изотермични координати двойката (u,v), определена от равенството $t = u+\mathrm{i}v$ и изпълнява* (1.2.1). *Повърхнината $(\mathcal{D}_0,\mathrm{x})$ се определя от функцията Φ чрез равенството* (1.2.1) *еднозначно с точност до транслация в $\mathbb{R}^n_k$.*

В Секция 1.3 са установени някои основни взаимовръзки между минималните повърхнини в $\mathbb{R}^n_k$ и функцията Φ. За произволна повърхнина са изведени известните равенства:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{t}} = \frac{1}{2}\Delta\mathrm{x} = E\mathrm{H}\,. \tag{1.3.6}$$

Оттук получаваме следната:

Теорема 1.3.1 *Нека $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати $(u, v) \in \mathcal{D}$, а $\Phi(t)$ е комплексната векторна функция, дефинирана в $\mathcal{D}$ с* (1.2.1)*. Тогава следните три условия са еквивалентни:*

1. *Функцията $\Phi(t)$ е холоморфна:* $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{t}} = 0$.

2. *Функцията $\mathrm{x}(u, v)$ е хармонична:* $\Delta \mathrm{x} = 0$.

3. *$\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$:* $\mathrm{H} = 0$.

От горната теорема виждаме, че за минимална повърхнина функцията x е хармонична и следователно можем локално да въведем хармонично спрегната функция y на x. Тогава $\Psi = \mathrm{x} + \mathrm{i}\mathrm{y}$ е холоморфна и имаме:

$$\mathrm{x} = \operatorname{Re}\Psi; \qquad \Phi = \mathrm{x}_u - \mathrm{i}\mathrm{x}_v = \mathrm{x}_u + \mathrm{i}\mathrm{y}_u = \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \Psi'. \tag{1.3.12}$$

Минималните повърхнини се характеризират чрез Ψ по следния начин:

Теорема 1.3.2 *Нека $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$, с изотермични координати $(u, v) \in \mathcal{D}$. Тогава x се представя локално във вида:*

$$\mathrm{x}(u, v) = \operatorname{Re}\Psi(t) , \tag{1.3.13}$$

където Ψ е холоморфна функция на $t = u + \mathrm{i}v$, изпълняваща условията:

$$\Psi'^2 = 0; \qquad \|\Psi'\|^2 > 0 . \tag{1.3.14}$$

Обратно, нека Ψ е холоморфна функция, дефинирана в област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяваща (1.3.14)*. Тогава двойката $(\mathcal{D}, \mathrm{x})$, където x се дефинира чрез* (1.3.13)*, представлява минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати (u, v).*

Функцията y също е хармонична и следователно $\bar{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \mathrm{y})$ също е минимална повърхнина, наречена спрегната на $\mathcal{M}$. Тя е член на фамилията от минимални повърхнини, получаващи се по формулата:

$$\mathrm{x}_\theta = \operatorname{Re} e^{-\mathrm{i}\theta}\Psi = \mathrm{x}\cos\theta + \mathrm{y}\sin\theta . \tag{1.3.15}$$

За тази фамилия имаме следната:

Дефиниция 1.3.2 *Ако $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати $(u, v) \in \mathcal{D}$, то ще наричаме $\mathcal{M}_\theta = (\mathcal{D}, \mathrm{x}_\theta)$* ***еднопараметрична фамилия от асоциирани минимални повърхнини*** *на дадената, ако x_θ се задава с* (1.3.15)*, където θ е произволен реален параметър.*

Едно от основните свойства на тази фамилия се дава от

Предложение 1.3.4 *Ако $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати $(u, v) \in \mathcal{D}$, а $\mathcal{M}_\theta = (\mathcal{D}, \mathrm{x}_\theta)$ е съответната ѝ еднопараметрична фамилия от асоциирани минимални повърхнини, то изображението $\mathcal{F}_\theta : \mathrm{x}(u, v) \to \mathrm{x}_\theta(u, v)$ задава изометрия между $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_\theta$ за всяко θ.*

В Секция 1.4 са получени формули, изразяващи Гаусовата кривина K чрез функцията Φ. Това са:

$$K = \frac{-4\|\Phi'^{\perp}\|^2}{\|\Phi\|^4} \ . \tag{1.4.2}$$

Също така и:

$$K = \frac{-4\|\Phi \wedge \Phi'\|^2}{\|\Phi\|^6} \ . \tag{1.4.7}$$

В Секция 1.5 е въведено понятието канонични координати за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^n_k$ при произволна размерност $n \geq 3$. Известно е, че в случая на $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^4$ за минималните повърхнини могат да се въведат специални изотермични координати, притежаващи допълнителни свойства. Така например в работите [27] и [36] независимо едно от друго, са получени такива резултати за по-общия клас на повърхнините с постоянна средна кривина в $\mathbb{R}^3$. В случая на минимална повърхнина тези резултати се свеждат до следното: В околност на точка за която $K \neq 0$, могат да се въведат такива локални координати, които са едновременно *изотермични* и *главни*. Ако използваме стандартните означения за коефициентите на втората основна форма L, M и N, това означава $E = G$, $F = 0$ и $M = 0$. Нещо повече, тези координати могат така да се нормират, че да бъде изпълнено и $L = -N = 1$. Тези свойства на локалните координати ги определят еднозначно с точност до подредба и посока на координатните линии. Този вид координати по-нататък в текста ще наричаме *канонични координати*. Теорията на каноничните координати за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$ е развита по-нататък в работата [11], където е дадена връзка между каноничните координати и представянето на Вайерщрас. В същата работа е показано, че за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$ могат да се въведат втори вид канонични координати, които са едновременно *изотермични* и *асимптотични*. Те се характеризират с условията $L = N = 0$ и $M = 1$. В случая на $\mathbb{R}^4$, в работата [25] се доказва, че за един широк клас от минимални повърхнини в четиримерното евклидово пространство могат да се въведат локално специални изотермични координати (u, v), които при нашите означения се характеризират по следния начин:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{x}_u^2 = \mathrm{x}_v^2 \ , & \sigma^2(\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_u) - \sigma^2(\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v) = 1 \ , \\ \mathrm{x}_u \cdot \mathrm{x}_v = 0 \ , & \sigma(\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_u) \cdot \sigma(\mathrm{x}_u, \mathrm{x}_v) = 0 \ . \end{array} \tag{1.5.1}$$

Тези свойства на локалните координати, също както и в $\mathbb{R}^3$, ги определят еднозначно с точност до подредба и посока на координатните линии и по-нататък в текста наричаме *канонични координати* за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. В Секция 1.5 е показано, че главните канонични координати в $\mathbb{R}^3$, а също и каноничните координати в $\mathbb{R}^4$, се характеризират с условието ${\Phi'^{\perp}}^2 = 1$. Съответно асимптотичните канонични координати в $\mathbb{R}^3$ се характеризират с условието ${\Phi'^{\perp}}^2 = -1$. Тези наблюдения ни показват как с помощта на функцията Φ, можем да обобщим понятието канонични координати за минимални повърхнини в $\mathbb{R}^n_k$ при произволна размерност $n \geq 3$. Аналогът на главните канонични координати в $\mathbb{R}^3$ се получава с:

Дефиниция 1.5.1 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати (u, v), то ще казваме, че тези координати са **канонични координати от първи вид**, ако функцията Φ дефинирана с $(1.2.1)$ удовлетворява условието ${\Phi'^{\perp}}^2 = 1$.*

Аналогът на асимптотичните канонични координати в $\mathbb{R}^3$ се дава с:

Дефиниция 1.5.2 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати (u, v), то ще казваме, че тези координати са **канонични координати от втори вид**, ако функцията Φ, дефинирана с $(1.2.1)$, удовлетворява условието ${\Phi'^{\perp}}^2 = -1$.*

При холоморфна смяна на изотермичните координати $t = t(s)$ имаме:

$$\tilde{\Phi}'^{\perp}_s = \Phi'^{\perp}_t t'^2 \,, \qquad {\tilde{\Phi}'^{\perp}_s}{}^2 = {\Phi'^{\perp}_t}{}^2 t'^4 \,. \tag{1.5.4}$$

Съответно при антихоломорфната смяна $t = \bar{s}$ е в сила:

$$\tilde{\Phi}'^{\perp}_s(s) = \overline{\Phi'^{\perp}_t(\bar{s})} \,, \qquad {\tilde{\Phi}'^{\perp}_s}{}^2(s) = \overline{{\Phi'^{\perp}_t}{}^2(\bar{s})} \,. \tag{1.5.5}$$

От формулите (1.5.4) и (1.5.5) се вижда, че условието ${\Phi'^{\perp}_t}{}^2 = 0$ е инвариантно при смяна на координатите и следователно в околност на точка, в която е изпълнено ${\Phi'^{\perp}}^2 = 0$, не съществуват канонични координати. Затова даваме следната:

Дефиниция 1.5.3 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ с изотермични координати (u, v), то ще казваме, че точката p е **изродена точка** за $\mathcal{M}$, ако функцията Φ, дефинирана с $(1.2.1)$, удовлетворява условието ${\Phi'^{\perp}}^2 = 0$ в тази точка.*

Тъй като ни интересуват каноничните координати, ще дадем следната:

Дефиниция 1.5.4 *За минималната повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^n_k$ ще казваме, че е от **общ тип**, ако не притежава изродени точки.*

За такива повърхнини доказваме следната:

Теорема 1.5.7 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ от общ тип, то за всяка нейна точка съществува околност, в която могат да се въведат канонични координати както от първи, така и от втори вид.*

Както и в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$, имаме единственост на каноничните координати:

Теорема 1.5.8 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ от общ тип и нека t и s са комплексни променливи, които задават канонични координати от един и същи вид в околност на дадена точка от $\mathcal{M}$. Тогава ако t и s задават една и съща ориентация върху $\mathcal{M}$, то те са свързани с равенство от вида:*

$$t = \pm s + c\,; \quad t = \pm \mathrm{i} s + c\,. \tag{1.5.11}$$

Ако t и s задават различна ориентация върху $\mathcal{M}$, то те са свързани с равенство от вида:

$$t = \pm \bar{s} + c\,; \quad t = \pm \mathrm{i} \bar{s} + c\,. \tag{1.5.12}$$

В горните равенства c е произволна комплексна константа.

Забележка 1.5.1 *На геометричен език получените осем съотношения* (1.5.11) *и* (1.5.12) *означават, че каноничните координати от един и същи вид са единствени с точност до подредба и посока на координатните линии.*

Връзката между каноничните координати от различен вид се дава от:

Теорема 1.5.9 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ от общ тип и комплексната променлива t задава канонични координати върху $\mathcal{M}$. Нека променливата s е свързана с t посредством равенството $t = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} s$. Променливата t задава канонични координати от първи вид тогава и само тогава, когато s задава канонични координати от втори вид.*

Глава 2. Минимални повърхнини в $\mathbb{R}^3$

В Глава 2 се разглеждат минимални повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Тази глава се явява като подготвителна за теорията в $\mathbb{R}^4$. Тук са доказани вече известни свойства на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$ по нов начин, който лесно се пренася в $\mathbb{R}^4$. В Секция 2.1 са дадени някои означения, дефиниции и свойства на минималните повърхнини, специфични за $\mathbb{R}^3$. В Секция 2.2 са разгледани свойствата на каноничните координати за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. В края на тази секция са приведени функциите Φ, дадени в канонични координати, за основните класически примери на минимални повърхнини в $\mathbb{R}^3$.

Повърхнината на Енепер се получава при:

$$\Phi(t) = \left(\frac{1}{2}(t^2 - 1), \frac{\mathrm{i}}{2}(t^2 + 1), t \right). \tag{2.2.5}$$

Координатите в горната формула са главни канонични.

Катеноидът се получава при:

$$\Phi(t) = (\sinh(t),\ \mathrm{i}\cosh(t),\ 1)\ . \tag{2.2.8}$$

Координатите в горната формула също са главни канонични.

Хеликоидът се получава при:

$$\Phi(t) = (-\mathrm{i}\sinh(t),\ \cosh(t),\ -\mathrm{i})\ . \tag{2.2.11}$$

Координатите в горната формула са асимптотични канонични.

В Секция 2.3, с помощта на функцията Φ, са изведени по нов начин формули от тип на Френе и естественото уравнение на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Като основен скаларен инвариант за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$ е удобно да се ползва величината ν, зададена с:

Дефиниция 2.3.1 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$, то с ν ще означаваме положителната собствена стойност на оператора на Вайнгартен за $\mathcal{M}$ и ще го наричаме* ***нормална кривина*** *на повърхнината $\mathcal{M}$.*

При главни канонични координати коефициентът E на първата основна форма и нормалната кривина ν са свързани с равенството:

$$E\nu = 1\,. \tag{2.3.2}$$

Гаусовата кривина K и нормалната кривина ν удовлетворяват равенството:

$$K = -\nu^2\,. \tag{2.3.3}$$

Да отбележим, че K и ν са скаларни инварианти и следователно последното съотношение, за разлика от (2.3.2), не зависи от избора на координатите.

За Вайнгартеновите повърхнини и в частност за минимални повърхнини в $\mathbb{R}^3$ е известно (вж. [15] и [11]), че съществуват формули от тип на Френе за базиса $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{n})$, където X_1 и X_2 са единичните координатни вектори, а n е единичният нормален вектор. В настоящата работа предлагаме алтернативен подход, при който вместо векторите X_1 и X_2 ще използваме комплексните вектори Φ и $\bar{\Phi}$. Равенството $\Phi^2 = 0$ означава, че Φ и $\bar{\Phi}$ са ортогонални относно Ермитовото произведение в $\mathbb{C}^3$. Следователно тройката $(\Phi, \bar{\Phi}, \mathrm{n})$ представлява подвижен ортогонален (но не нормиран) базис на $\mathbb{C}^3$. Ако t задава главни канонични координати за $\mathcal{M}$, за този базис са получени следните формули от тип на Френе:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{t}} &= 0\,;\\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{\partial\ln E}{\partial t}\Phi + \mathrm{n}\,;\\
\frac{\partial\mathrm{n}}{\partial t} &= -\frac{1}{2E}\bar{\Phi}\,.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Условията за интегруемост на тази система ЧДУ се свеждат до:

$$\Delta\ln E - \frac{2}{E} = 0\,. \tag{2.3.7}$$

Оттук и от (2.3.2) виждаме, че за нормалната кривина ν имаме:

$$\Delta \ln \nu + 2\nu = 0 \,. \tag{2.3.8}$$

Това уравнение се нарича *естествено уравнение* на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Ние избираме да разглеждаме като естествено уравнение именно (2.3.8), а не еквивалентното му (2.3.7) поради това, че величината ν, за разлика от E, е скаларен инвариант.

Ако две минимални повърхнини $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ и $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ от общ тип в $\mathbb{R}^3$ са свързани чрез собствено движение от вида:

$$\hat{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + \mathrm{b}\,; \qquad A \in \mathbf{SO}(3,\mathbb{R}), \quad \mathrm{b} \in \mathbb{R}^3\,, \tag{2.3.9}$$

то те имат общи главни канонични координати и една и съща нормална кривина ν, разглеждана като функция на тези координати.

Получените резултати за ν са събрани във вид на следната:

Теорема 2.3.1 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$ и в околност на дадена точка от $\mathcal{M}$ са въведени главни канонични координати. Тогава нормалната кривина ν на $\mathcal{M}$, разглеждана като функция на тези координати, е решение на естественото уравнение* (2.3.8) *на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Ако $\hat{\mathcal{M}}$ се получава от $\mathcal{M}$ чрез движение от вида* (2.3.9)*, то тя поражда същото решение на* (2.3.8).

Уравнението (2.3.8) е не само необходимо, но и достатъчно условие за съществуване поне локално на решение на системата (2.3.6). Приложено към минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$, това означава, че всяко решение на (2.3.8) може локално да се представи като нормална кривина на някаква минимална повърхнина в $\mathbb{R}^3$. Така имаме теорема от тип на Боне за системата (2.3.6) (вж. също [11] и [15]).

Теорема 2.3.2 *Нека $\nu > 0$ е функция, дефинирана в дадена област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ и нека ν е решение на естественото уравнение* (2.3.8) *на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. За всяка точка $p_0 \in \mathcal{D}$, съществува околност $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ на p_0 и изображение $\mathrm{x} : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}^3$, такива че $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ е минимална повърхнина от общ тип, зададена с главни канонични координати и имаща за нормална кривина дадената функция ν. Ако $(\hat{\mathcal{D}}_0, \hat{\mathrm{x}})$ е друга повърхнина със същите свойства, то съществува подобласт $\tilde{\mathcal{D}}_0$ на $\mathcal{D}_0$ и $\hat{\mathcal{D}}_0$, съдържаща точка p_0, така че повърхнината $(\tilde{\mathcal{D}}_0, \hat{\mathrm{x}})$ се получава от $(\tilde{\mathcal{D}}_0, \mathrm{x})$ чрез собствено движение в $\mathbb{R}^3$ от вида* (2.3.9).

Като приложение на естествените уравнения, разглеждаме следния въпрос: *При какви условия две минимални повърхнини в $\mathbb{R}^3$ са локално изометрични?* От Предложение 1.3.4 знаем, че повърхнините, принадлежащи на една и съща еднопараметрична фамилия от асоциирани минимални повърхнини в $\mathbb{R}^n$, са изометрични помежду си. Оказва се, че в случая на $\mathbb{R}^3$, този пример изчерпва всички възможности: Ако две минимални повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$ са локално изометрични, то те с точност до движение, локално принадлежат на една и съща еднопараметрична фамилия от асоциирани минимални повърхнини. В работата [33] е получен резултат от този вид, за по-общия клас на повърхнините с постоянна средна кривина в $\mathbb{R}^3$. Ние се ограничаваме в случая на минимални повърхнини и даваме ново доказателство, като използваме свойствата на каноничните координати и естествените уравнения.

Теорема 2.3.4 *Нека $\mathcal{M}$ и $\hat{\mathcal{M}}$ са минимални повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$ и нека $p_0 \in \mathcal{M}$ и $\hat{p}_0 \in \hat{\mathcal{M}}$ са фиксирани точки от тях. Да предположим, че съществуват такива околности на p_0 и $\hat{p}_0$ в $\mathcal{M}$ и $\hat{\mathcal{M}}$ съответно, които са изометрични помежду си, като p_0 и $\hat{p}_0$ са съответни точки при тази изометрия. Тогава съществуват $\theta \in \mathbb{R}$ и околност на $\hat{p}_0$ в $\hat{\mathcal{M}}$, която се получава чрез собствено движение от някаква част на повърхнината $\mathcal{M}_\theta$, където $\mathcal{M}_\theta$ е елемент на еднопараметричната фамилия от асоциирани минимални повърхнини на $\mathcal{M}$.*

Друго приложение на каноничните координати и естественото уравнение се получава, като разгледаме следния въпрос: *Кои са минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$, за които едното семейство главни линии са едновременно и геодезични?* Този въпрос е разгледан за по-общия клас на Вайнгартеновите повърхнини в [15] и там е показано, че всяка такава повърхнина, локално е част от ротационна повърхнина. Тъй като катеноидът е единствената, с точност до подобие, ротационна минимална повърхнина в $\mathbb{R}^3$, то от тези резултати следва, че всяка минимална повърхнина с разглежданото свойство, локално е подобна на катеноида. В настоящята работа, с помощта на естественото уравнение (2.3.8), даваме директно доказателство на този факт. В сила е следното:

Предложение 2.3.5 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$ и $p_0 \in \mathcal{M}$ е фиксирана точка от нея. Нека $t = u + \mathrm{i}v$ задава главни канонични координати за $\mathcal{M}$ в околност на p_0. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *Съществува околност на p_0 в $\mathcal{M}$, в която главните u-линии са геодезични.*
2. *Съществува околност на p_0 в $\mathcal{M}$, която се получава от някаква част на катеноида (2.2.8), чрез собствено движение, хомотетия и холоморфна смяна на каноничните координати.*

В Секция 2.4 са дадени прости, чисто аналитични изводи на някои класически формули от тип „представяне на Вайерщрас“ за минимални повърхнини в $\mathbb{R}^3$, зададени относно произволни изотермични координати. Ако $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е такава повърхнина, то за съответната функция $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ имаме:

$$\Phi = (f \sinh h\,,\ \mathrm{i}f \cosh h\,,\ f)\,, \tag{2.4.5}$$

където $(f \neq 0, h)$ са двойка холоморфни функции. Обратно, всяка такава двойка функции поражда по формулите (2.4.5) функция Φ, която е съответна на минимална повърхнина в $\mathbb{R}^3$.

Ако в последната формула направим замяната:

$$f \to 2fg; \qquad e^h \to g\,, \tag{2.4.7}$$

то получаваме ново представяне на Φ чрез двойка холоморфни функции, което е една от формите на класическото представяне на Вайерщрас:

$$\Phi = (f(g^2-1)\,,\, \mathrm{i}f(g^2+1)\,,\, 2fg)\,, \tag{2.4.8}$$

където $(f \neq 0, g)$ е двойка холоморфни функции. Обратно, всяка такава двойка функции поражда по формулите (2.4.8) функция Φ, която е съответна на минимална повърхнина в $\mathbb{R}^3$. Функциите f и g се изразяват експлицитно чрез Φ по следния начин:

$$f = -\frac{1}{2}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2); \qquad g = -\frac{\phi_3}{\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2}\,. \tag{2.4.9}$$

По-нататък са получени формулите, по които се преобразуват функциите, участващи в представянията от тип на Вайерщрас (2.4.5) и (2.4.8) при смяна на изотермичните координати и при основните геометрични преобразувания на дадената минимална повърхнина в $\mathbb{R}^3$. С помощта на теорията на спинорите в $\mathbb{R}^3$ са получени трансформационни формули за двойката функции в (2.4.8) при движение на повърхнината в $\mathbb{R}^3$. Основният резултат е, че функцията g се преобразува с помощта на дробно-линейна трансформация, зададена със специална унитарна матрица:

$$\hat{f} = f(bg + \bar{a})^2\,; \quad \hat{g} = \frac{ag - \bar{b}}{bg + \bar{a}}\,; \qquad a, b \in \mathbb{C}\,;\ |a|^2 + |b|^2 = 1\,. \tag{2.4.23}$$

За последните формули е в сила следната:

Теорема 2.4.3 *Нека* $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ *и* $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ *са две минимални повърхнини в* $\mathbb{R}^3$*, зададени с представяния на Вайерщрас от вида* (2.4.8)*, където* $\mathcal{D}$ *е свързана област в* $\mathbb{C}$*. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. $\hat{\mathcal{M}}$ *и* $\mathcal{M}$ *са свързани със собствено движение в* $\mathbb{R}^3$ *от вида:* $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$*, където* $A \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ *и* $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^3$.
2. *Функциите от представянията на Вайерщрас на* $\hat{\mathcal{M}}$ *и* $\mathcal{M}$ *са свързани с равенствата* (2.4.23).

В Секция 2.5 са изразени основните инварианти на една минимална повърхнина в $\mathbb{R}^3$ чрез двойката функции, участващи в представянето на

Вайерщрас. Така при представянето (2.4.5) имаме следните формули за Гаусовата и нормалната кривини:

$$K = -\,\frac{|h'|^2}{|f|^2\cosh^4(\operatorname{Re} h)}\,; \qquad \nu = \frac{|h'|}{|f|\cosh^2(\operatorname{Re} h)}\,. \tag{2.5.12}$$

Съответно при представянето (2.4.8) имаме:

$$K = -\,\frac{4|g'|^2}{|f|^2(|g|^2+1)^4}\,; \qquad \nu = \frac{2|g'|}{|f|(|g|^2+1)^2}\,. \tag{2.5.18}$$

В Секция 2.6 е даден нов извод на каноничното представяне на Вайерщрас за минималните повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$. Тази нова схема на изложението е подбрана така, че да допуска естествено пренасяне в случая на $\mathbb{R}^4$. Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$, зададена с главни канонични координати, то е показано, че функциите f и h в представянето (2.4.5) са свързани с равенството:

$$f = \frac{1}{h'}\,. \tag{2.6.1}$$

Като приложим последната формула към представянето (2.4.5) получаваме, че $\mathcal{M}$ поне локално има представяне на Вайерщрас от вида:

$$\Phi = \left(\frac{\sinh h}{h'}\,,\, \mathrm{i}\frac{\cosh h}{h'}\,,\, \frac{1}{h'} \right), \tag{2.6.2}$$

където h е холоморфна функция, изпълняваща условието $h' \neq 0$. Обратно, всяка такава функция поражда по формулите (2.6.2) минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$, зададена с главни канонични координати. За така полученото представяне ще казваме накратко, че е *канонично представяне на Вайерщрас* за минималната повърхнина от общ тип $\mathcal{M}$.

Съответно за функциите от представянето (2.4.8) имаме:

$$f = \frac{1}{2g'}\,. \tag{2.6.3}$$

Като приложим това към представянето (2.4.8), получаваме представянето от работата [11]:

$$\Phi = \left(\frac{1}{2}\frac{g^2-1}{g'}\,,\, \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{g^2+1}{g'}\,,\, \frac{g}{g'} \right), \tag{2.6.4}$$

където g е холоморфна функция, изпълняваща условието $g' \neq 0$. Обратно, всяка такава функция поражда по формулите (2.6.4) минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$, зададена с главни канонични координати. За така полученото представяне също ще казваме, че е *канонично представяне на*

Вайерщрас за минималната повърхнина от общ тип $\mathcal{M}$. Функцията g се изразява в явен вид чрез Φ по следния начин:

$$g = -\frac{\phi_3}{\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2} \,. \tag{2.6.5}$$

От формулите (2.4.23) следва, че при собствено движение в $\mathbb{R}^3$, функциите $\hat{g}$ и g от каноничните представяния (2.6.4) са свързани посредством дробно-линейно преобразование със специална унитарна матрица:

$$\hat{g} = \frac{ag - \bar{b}}{bg + \bar{a}}\,; \qquad a, b \in \mathbb{C}\,;\ |a|^2 + |b|^2 = 1\,. \tag{2.6.9}$$

В сила е следната:

Теорема 2.6.5 *Нека $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ и $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ са две минимални повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$, зададени с канонични представяния на Вайерщрас от вида* (2.6.4)*, където $\mathcal{D}$ е свързана област в $\mathbb{C}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^3$ от вида:* $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$*, където $A \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^3$.*

2. *Функциите $\hat{g}$ и g от представянията на Вайерщрас на $\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани с равенствата* (2.6.9)*.*

В Секция 2.7 са изразени основните инварианти на една минимална повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3$ чрез функцията, участваща в каноничното представяне на Вайерщрас. Ако минималната повърхнина $\mathcal{M}$ е зададена с (2.6.4), то за нормалната ѝ кривина имаме:

$$\nu = \frac{4|g'|^2}{(|g|^2 + 1)^2}\,. \tag{2.7.4}$$

Прилагайки подхода от [11] показваме, че последния израз за ν може да се интерпретира като локална формула за общото решение на естественото уравнение (2.3.8) на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Възможно е две различни функции g да дават по (2.7.4) едно и също решение на уравнението (2.3.8). Това е така точно когато функциите са свързани с (2.6.9).

По-нататък са дефинирани релации на еквивалентност в множествата от минималните повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$, решенията на естественото уравнение (2.3.8) на минималните повърхнини и холоморфните функции на една променлива. Две повърхнини от този вид считаме за *еквивалентни*, ако локално са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^3$. Две решения са *еквивалентни*, ако локално съвпадат. Две холоморфни функции са *еквивалентни*, ако локално са свързани с равенство от вида (2.6.9). Формулите (2.6.4) и (2.7.4) дават естествени съответствия (биекции) между така дефинираните три вида класове на еквивалентност.

Глава 3. Минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$

В Глава 3 се разглеждат минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$. Тази глава е основна в настоящата дисертация. В Секция 3.1 са дадени някои означения, дефиниции и свойства на минималните повърхнини, специфични за $\mathbb{R}^4$. За всяка регулярна повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^4$, наред със средната и Гаусовата кривина, трети основен инвариант е *кривината на нормалната свързаност* $\varkappa$, която се дефинира чрез равенството:

$$\varkappa = R^N(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)\mathrm{n}_2 \cdot \mathrm{n}_1 \ , \tag{3.1.3}$$

където R^N е тензорът на кривината на нормалната свързаност на $\mathcal{M}$, X_1 и X_2 образуват ортонормиран базис на $T_p(\mathcal{M})$, а n_1 и n_2 образуват ортонормиран базис на $N_p(\mathcal{M})$ за всяко $p \in \mathcal{M}$. За $\varkappa$ по-нататък в текста ще използваме и съкратеното название *нормална кривина* на $\mathcal{M}$. За $\varkappa$ е получен израз чрез Φ, което заедно с формулите (1.4.2) и (1.4.7), които вече имаме за K, ни дава:

$$K = \frac{-4\|\Phi'^{\perp}\|^2}{\|\Phi\|^4} = \frac{-4\|\Phi \wedge \Phi'\|^2}{\|\Phi\|^6} \ ; \qquad \varkappa = -\frac{4}{\|\Phi\|^6}\det(\Phi, \bar{\Phi}, \Phi', \overline{\Phi'}) \, . \tag{3.1.10}$$

В Секция 3.2 е описана връзката между каноничните координати и елипсата на кривината на дадена минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$. За произволна регулярна повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^4$ *елипса на нормалната кривина* в точка $p \in \mathcal{M}$ е елипсата в $N_p(\mathcal{M})$, зададена с:

$$\mathscr{E}_p = \{\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{X}) : \quad \mathrm{X} \in T_p(\mathcal{M}), \ \|\mathrm{X}\|^2 = 1\} \, . \tag{3.2.1}$$

Получено е известното свойство, че $\mathcal{M}$ е минимална точно когато за всяка нейна точка p, елипсата $\mathscr{E}_p$ е с център в началото на нормалното пространство $N_p(\mathcal{M})$. По-нататък е получена характеризация на изродените точки чрез елипсата на кривината:

Предложение 3.2.2 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ и p е точка от $\mathcal{M}$, то p е изродена точка по смисъла на Дефиниция 1.5.3, точно когато елипсата на нормалната кривина $\mathscr{E}_p$, дефинирана с* (3.2.1)*, е окръжност.*

Точките p, за които $\mathscr{E}_p$ е окръжност съгласно класическата терминология, се наричат *суперконформни* точки. Съответно ако една минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ е от общ тип по смисъла на Дефиниция 1.5.4, я наричаме *несуперконформна минимална повърхнина.*

Ако $\mathcal{M}$ е зададена с канонични координати от първи вид, то за коефициента E на първата основна форма и кривините K и $\varkappa$ е в сила:

$$E = \frac{1}{\sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2}} \, . \tag{3.2.13}$$

За суперконформните (изродените) точки на една минимална повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^4$ е получена и известната (вж. [35]) характеризация чрез двойката $(K, \varkappa)$:

Теорема 3.2.3 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$, а K и $\varkappa$ са Гаусовата кривина и кривината на нормалната свързаност за $\mathcal{M}$, то е изпълнено:*

$$-K \geq |\varkappa| \,, \tag{3.2.14}$$

като равенството се достига точно в суперконформните точки на $\mathcal{M}$.

В Секция 3.3 с помощта на функцията Φ са изведени по нов начин формули от тип на Френе и системата естествени уравнения на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. Отначало са записани формулите, аналогични на (2.3.6) от $\mathbb{R}^3$, след което са получени и съответните им условия за интегруемост. Тези условия за интегруемост се наричат *система естествени ЧДУ* на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. Както и в $\mathbb{R}^3$, ако две несуперконформни минимални повърхнини $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ и $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ в $\mathbb{R}^4$ са свързани чрез собствено движение от вида:

$$\hat{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + \mathrm{b}; \qquad A \in \mathbf{SO}(4, \mathbb{R}), \quad \mathrm{b} \in \mathbb{R}^4 \,, \tag{3.3.9}$$

то те дават едно и също решение на системата естествени ЧДУ. Ако тази система естествени ЧДУ се запише чрез двойката $(K, \varkappa)$, то се получава система, еквивалентна на системата получена в [5]:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2}\, \Delta \ln \sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2} = 2K\,;\\ &\sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2}\, \Delta \ln \sqrt{\frac{K + \varkappa}{K - \varkappa}} = 2\varkappa\,; \end{aligned}\right. \qquad K < 0\,. \tag{3.3.10}$$

Така описаните резултати са събрани във вид на следната:

Теорема 3.3.3 *Нека $\mathcal{M}$ е несуперконформна минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ и в околност на дадена точка от $\mathcal{M}$ са въведени канонични координати от първи вид. Тогава Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$ на $\mathcal{M}$, разглеждани като функции на тези координати, са решение на системата естествени уравнения* (3.3.10) *на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. Ако $\hat{\mathcal{M}}$ се получава от $\mathcal{M}$ чрез собствено движение от вида* (3.3.9)*, то тя поражда същото решение на* (3.3.10)*.*

Както и в $\mathbb{R}^3$ имаме теорема от тип на Боне за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$ (вж. също [5] и [17]):

Теорема 3.3.5 *Нека $K < 0$ и $\varkappa$ са реални функции, дефинирани в дадена област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ и нека двойката $(K, \varkappa)$ е решение на системата естествени уравнения* (3.3.10) *на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. За всяка точка $p_0 \in \mathcal{D}$, съществува околност $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ на p_0 и изображение $\mathrm{x} : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}^4$, такива че $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ е несуперконформна минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$, зададена с канонични координати от първи вид и имаща дадените функции K*

и $\varkappa$ съответно за Гаусова кривина и кривина на нормалната свързаност. Ако $(\hat{\mathcal{D}}_0, \hat{\mathrm{x}})$ е друга повърхнина със същите свойства, то съществува подобласт $\tilde{\mathcal{D}}_0$ на $\mathcal{D}_0$ и $\hat{\mathcal{D}}_0$, съдържаща точка p_0, така че повърхнината $(\tilde{\mathcal{D}}_0, \hat{\mathrm{x}})$ се получава от $(\tilde{\mathcal{D}}_0, \mathrm{x})$ чрез собствено движение в $\mathbb{R}^4$ от вида (3.3.9).

В Секция 3.4 са дадени прости, чисто аналитични изводи на някои класически формули от тип „представяне на Вайерщрас“ за минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$, зададени относно произволни изотермични координати. Ако $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е такава повърхнина, то за съответната функция $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ имаме:

$$\Phi = \left(\mathrm{i} f \cosh \frac{w_1 + w_2}{2} \,,\, f \sinh \frac{w_1 + w_2}{2} \,,\, f \cosh \frac{w_1 - w_2}{2} \,,\, \mathrm{i} f \sinh \frac{w_1 - w_2}{2} \right). \tag{3.4.6}$$

където $(f \neq 0, w_1, w_2)$ са тройка холоморфни функции. Свойствата на представянето (3.4.6) се дават от следната:

Теорема 3.4.1 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$, p е точка от нея и $t = u + \mathrm{i}v$ задава изотермични координати за $\mathcal{M}$ в околност на p. Да предположим, че функцията Φ, дефинирана с* (1.2.1), *изпълнява условието $\phi_1^2 + \phi_2^2 \neq 0$. Тогава съществува околност на p, в която функцията Φ има представяне от тип на Вайерщрас* (3.4.6), *където f, w_1 и w_2 са холоморфни функции и е в сила $f \neq 0$.*

Обратно, нека $(f \neq 0, w_1, w_2)$ са тройка холоморфни функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$ от $\mathbb{C}$ и p е дадена точка от $\mathcal{D}$. Тогава съществуват подобласт $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$, съдържаща p и минимална повърхнина $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ в $\mathbb{R}^4$ такива, че съответната функция Φ има представяне (3.4.6) *в $\mathcal{D}_0$ и изпълнява условието $\phi_1^2 + \phi_2^2 \neq 0$.*

Ако в последните формули направим замяната:

$$f \to 2f\sqrt{g_1 g_2}\,; \qquad e^{w_1} \to g_1\,; \qquad e^{w_2} \to g_2\,, \tag{3.4.8}$$

то получаваме ново представяне на Φ с тройка холоморфни функции, което е аналог на класическото представяне на Вайерщрас от $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi = \big(\mathrm{i} f (g_1 g_2 + 1)\,,\, f (g_1 g_2 - 1)\,,\, f (g_1 + g_2)\,,\, \mathrm{i} f (g_1 - g_2) \big)\,. \tag{3.4.9}$$

Функциите f, g_1 и g_2 се изразяват експлицитно чрез Φ:

$$f = -\frac{1}{2}(\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2)\,; \qquad g_1 = -\frac{\phi_3 - \mathrm{i}\phi_4}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,; \qquad g_2 = -\frac{\phi_3 + \mathrm{i}\phi_4}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,. \tag{3.4.10}$$

Теорема 3.4.2 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$, p е точка от нея и $t = u + \mathrm{i}v$ задава изотермични координати за $\mathcal{M}$ в околност на p. Да предположим, че функцията Φ, дефинирана с* (1.2.1), *изпълнява условието $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$. Тогава съществува околност на p, в която функцията Φ*

има представяне от тип на Вайерщрас (3.4.9)*, където f, g_1 и g_2 са холоморфни функции и $f \neq 0$. Функциите f, g_1 и g_2 се определят еднозначно от Φ по формулите* (3.4.10).

Обратно, нека $(f \neq 0, g_1, g_2)$ са тройка холоморфни функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$ от $\mathbb{C}$ и p е дадена точка от $\mathcal{D}$. Тогава съществуват подобласт $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$, съдържаща p и минимална повърхнина $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ в $\mathbb{R}^4$ такива, че съответната функция Φ има представяне (3.4.9) *в $\mathcal{D}_0$ и изпълнява условието $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$.*

По-нататък са получени формулите, по които се преобразуват функциите, участващи в представянията от тип на Вайерщрас (3.4.6) и (3.4.9) при смяна на изотермичните координати и при основните геометрични преобразувания на дадената минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$. С помощта на теорията на спинорите в $\mathbb{R}^4$ са получени трансформационни формули за тройката функции в (3.4.9) при движение на повърхнината в $\mathbb{R}^4$. Основният резултат е, че функциите g_1 и g_2 се преобразуват с помощта на дробно-линейни трансформации, зададени със специални унитарни матрици:

$$\hat{f} = f(b_1 g_1 + \bar{a}_1)(b_2 g_2 + \bar{a}_2)\,;\ \hat{g}_1 = \frac{a_1 g_1 - \bar{b}_1}{b_1 g_1 + \bar{a}_1}\,;\ \hat{g}_2 = \frac{a_2 g_2 - \bar{b}_2}{b_2 g_2 + \bar{a}_2}\,;\ \begin{array}{l} a_j, b_j \in \mathbb{C}\,; \\ |a_j|^2 + |b_j|^2 = 1\,. \end{array} \tag{3.4.25}$$

За последните формули е в сила следната:

Теорема 3.4.3 *Нека $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ и $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ са две минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$, зададени с представяния на Вайерщрас от вида* (3.4.9)*, където $\mathcal{D}$ е свързана област в $\mathbb{C}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^4$ от вида:*
   $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$, където $A \in \mathbf{SO}(4, \mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$.

2. *Функциите от представянията на Вайерщрас на $\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани с равенствата* (3.4.25).

В Секция 3.5 са изразени основните инварианти на една минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ чрез тройката функции, участващи в представянето на Вайерщрас. Така при представянето (3.4.6) имаме следните формули за Гаусовата и нормалната кривини:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{2|f|^2 \cosh(\operatorname{Re} w_1)\cosh(\operatorname{Re} w_2)} \left(\frac{|w_1'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_1)} + \frac{|w_2'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_2)} \right); \\ \varkappa &= \frac{1}{2|f|^2 \cosh(\operatorname{Re} w_1)\cosh(\operatorname{Re} w_2)} \left(\frac{|w_1'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_1)} - \frac{|w_2'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_2)} \right). \end{aligned} \tag{3.5.23}$$

Съответно при представянето (3.4.9) имаме:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-2}{|f|^2(|g_1|^2+1)(|g_2|^2+1)}\left(\frac{|g_1'|^2}{(|g_1|^2+1)^2}+\frac{|g_2'|^2}{(|g_2|^2+1)^2}\right); \\ \varkappa &= \frac{2}{|f|^2(|g_1|^2+1)(|g_2|^2+1)}\left(\frac{|g_1'|^2}{(|g_1|^2+1)^2}-\frac{|g_2'|^2}{(|g_2|^2+1)^2}\right). \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

В Секция 3.6 се съдържат резултатите за каноничните представяния на Вайерщрас за несуперконформните минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$, които резултати са ключови в нашите разглеждания. Ако $\mathcal{M}$ е такава повърхнина в $\mathbb{R}^4$, зададена с канонични координати от първи вид, то е показано, че функциите f, w_1 и w_2 в представянето (3.4.6) са свързани с равенството:

$$f=\frac{1}{\sqrt{w_1'w_2'}}\,. \tag{3.6.3}$$

Като приложим последната формула към представянето (3.4.6) получаваме, че $\mathcal{M}$ поне локално има представяне на Вайерщрас от вида:

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{w_1'w_2'}}\left(\mathrm{i}\cosh\frac{w_1+w_2}{2}\,,\,\sinh\frac{w_1+w_2}{2}\,,\,\cosh\frac{w_1-w_2}{2}\,,\,\mathrm{i}\sinh\frac{w_1-w_2}{2}\right). \tag{3.6.4}$$

За така полученото представяне ще казваме накратко, че е *канонично представяне на Вайерщрас* за несуперконформната минимална повърхнина $\mathcal{M}$. Свойствата на това представяне се дават от следната:

Теорема 3.6.4 *Нека $\mathcal{M}$ е несуперконформна минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ и p е точка от нея. Нека $t=u+\mathrm{i}v$ задава канонични координати от първи вид за $\mathcal{M}$ в околност на p. Да предположим, че функцията Φ, дефинирана с* (1.2.1), *изпълнява условието $\phi_1^2+\phi_2^2\neq 0$. Тогава съществува околност на p, в която функцията Φ има представяне от тип на Вайерщрас* (3.6.4), *където w_1 и w_2 са холоморфни функции и е в сила $w_1'w_2'\neq 0$.*

Обратно, нека w_1 и w_2 са холоморфни функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$ от $\mathbb{C}$, удовлетворяващи условието $w_1'w_2'\neq 0$ и нека p е дадена точка от $\mathcal{D}$. Тогава съществуват подобласт $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$, съдържаща p и несуперконформна минимална повърхнина $(\mathcal{D}_0,\mathrm{x})$ в $\mathbb{R}^4$ такива, че съответната функция Φ има представяне (3.6.4) *в $\mathcal{D}_0$ и изпълнява условието $\phi_1^2+\phi_2^2\neq 0$.*

Съответно за функциите от представянето (3.4.9) имаме:

$$f=\frac{1}{2\sqrt{g_1'g_2'}}\,. \tag{3.6.5}$$

Като приложим последната формула към представянето (3.4.9) получаваме:

$$\Phi = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{g_1 g_2 + 1}{\sqrt{g_1' g_2'}}\,,\ \frac{1}{2}\,\frac{g_1 g_2 - 1}{\sqrt{g_1' g_2'}}\,,\ \frac{1}{2}\,\frac{g_1 + g_2}{\sqrt{g_1' g_2'}}\,,\ \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{g_1 - g_2}{\sqrt{g_1' g_2'}} \right). \tag{3.6.6}$$

За така полученото представяне също ще казваме, че е *канонично представяне на Вайерщрас* за несуперконформната минимална повърхнина $\mathcal{M}$. Функциите g_1 и g_2 се изразяват в явен вид чрез Φ:

$$g_1 = -\frac{\phi_3 - \mathrm{i}\phi_4}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,; \qquad g_2 = -\frac{\phi_3 + \mathrm{i}\phi_4}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,. \tag{3.6.7}$$

Свойствата на представянето (3.6.6) се дават от следната:

Теорема 3.6.5 *Нека $\mathcal{M}$ е несуперконформна минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ и p е дадена точка от нея. Нека $t = u + \mathrm{i}v$ задава канонични координати от първи вид за $\mathcal{M}$ в околност на p. Да предположим, че функцията Φ, дефинирана с* (1.2.1), *изпълнява условието $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$. Тогава съществува околност на p, в която функцията Φ има представяне от тип на Вайерщрас* (3.6.6), *където g_1 и g_2 са холоморфни функции и е в сила $g_1' g_2' \neq 0$. Функциииите g_1 и g_2 се определят еднозначно от Φ по формулите* (3.6.7).

Обратно, нека g_1 и g_2 са холоморфни функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$ от $\mathbb{C}$, удовлетворяващи условието $g_1' g_2' \neq 0$ и нека p е дадена точка от $\mathcal{D}$. Тогава съществуват подобласт $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$, съдържаща p и несуперконформна минимална повърхнина $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ в $\mathbb{R}^4$ такива, че съответната функция Φ има представяне (3.6.6) *в $\mathcal{D}_0$ и изпълнява условието $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$.*

От формулите (3.4.25) следва, че при собствено движение в $\mathbb{R}^4$, функциите $\hat{g}_j$ и g_j от каноничните представяния (3.6.6) са свързани посредством дробно-линейни преобразования със специални унитарни матрици:

$$\hat{g}_1 = \frac{a_1 g_1 - \bar{b}_1}{b_1 g_1 + \bar{a}_1}\,; \quad \hat{g}_2 = \frac{a_2 g_2 - \bar{b}_2}{b_2 g_2 + \bar{a}_2}\,; \qquad \begin{array}{l} a_j, b_j \in \mathbb{C}\,; \\ |a_j|^2 + |b_j|^2 = 1\,. \end{array} \tag{3.6.13}$$

В сила е следната:

Теорема 3.6.6 *Нека $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ и $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ са две несуперконформни минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$, зададени с представяния на Вайерщрас от вида* (3.6.6), *където $\mathcal{D}$ е свързана област в $\mathbb{C}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^4$ от вида: $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$, където $A \in \mathbf{SO}(4, \mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$.*

2. *Функциите $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$, g_1 и g_2 от каноничните представяния на Вайерщрас* (3.6.6) *на $\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани с равенствата* (3.6.13).

За каноничното представяне (3.6.4) съответните формули се получават от (3.6.13) и $g_j = e^{w_j}$ и имат вида:

$$\hat{w}_1 = \ln \frac{a_1 e^{w_1} - \bar{b}_1}{b_1 e^{w_1} + \bar{a}_1}\,; \quad \hat{w}_2 = \ln \frac{a_2 e^{w_2} - \bar{b}_2}{b_2 e^{w_2} + \bar{a}_2}\,; \qquad \begin{array}{l} a_j, b_j \in \mathbb{C}\,; \\ |a_j|^2 + |b_j|^2 = 1\,. \end{array} \tag{3.6.14}$$

Като приложение на каноничните представяния на Вайерщрас е разгледан следния въпрос: *Кои са минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$, имащи изотермична параметризация чрез полиноми от възможно най-ниска степен?* Показано е, че ако една минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ допуска изотермична параметризация чрез полиноми до втора степен, то тя се състои изцяло от изродени точки. За да се получи несуперконформна минимална повърхнина, е необходимо да разгледаме полиноми от трета степен. За тези повърхнини е получено следното:

Предложение 3.6.8 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\mathcal{M}$ е несуперконформна минимална повърхнина, притежаваща изотермична параметризация с полиноми от трета степен.*
2. *$\mathcal{M}$ притежава глобални канонични координати от първи вид, в които тя се представя с полиноми от трета степен и също притежава глобално канонично представяне на Вайерщрас от вида* (3.6.6)*, където пораждащите функци g_1 и g_2 са дробно-линейни и неконстантни.*
3. *$\mathcal{M}$ се получава чрез собствено движение, хомотетия и линейна смяна на изотермичните координати от някоя от трипараметричната фамилия повърхнини, породени по формулите* (3.6.6) *чрез двойките $(t, at + \rho e^{i\varphi})$, където $a > 0$, $\rho \geq 0$ и $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.*

Повърхнините от трипараметричната фамилия, описана в точка 3., не могат да се получават една от друга чрез собствено движение, хомотетия и смяна на каноничните координати.

В Секция 3.7 са изразени основните инварианти на една несуперконформна минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4$ чрез функциите, участващи в каноничните представяния на Вайерщрас. Ако минималната повърхнина $\mathcal{M}$ е зададена с (3.6.4), то за Гаусовата и нормалната ѝ кривини имаме:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-|w_1' w_2'|}{2\cosh(\operatorname{Re} w_1)\cosh(\operatorname{Re} w_2)} \left(\frac{|w_1'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_1)} + \frac{|w_2'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_2)} \right); \\ \varkappa &= \frac{|w_1' w_2'|}{2\cosh(\operatorname{Re} w_1)\cosh(\operatorname{Re} w_2)} \left(\frac{|w_1'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_1)} - \frac{|w_2'|^2}{\cosh^2(\operatorname{Re} w_2)} \right). \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

Ако минималната повърхнина $\mathcal{M}$ е зададена с (3.6.6), имаме:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-8|g_1'g_2'|}{(|g_1|^2+1)(|g_2|^2+1)}\left(\frac{|g_1'|^2}{(|g_1|^2+1)^2}+\frac{|g_2'|^2}{(|g_2|^2+1)^2}\right); \\ \varkappa &= \frac{8|g_1'g_2'|}{(|g_1|^2+1)(|g_2|^2+1)}\left(\frac{|g_1'|^2}{(|g_1|^2+1)^2}-\frac{|g_2'|^2}{(|g_2|^2+1)^2}\right). \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

Получените формули за K и $\varkappa$ могат да се интерпретират като локални формули за общото решение на системата естествени уравнения (3.3.10) на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. Именно, в сила е:

Теорема 3.7.4 *Нека* $(K < 0, \varkappa)$ *са двойка функции, дефинирани в дадена област* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ *и нека* $(K, \varkappa)$ *е решение на системата естествени уравнения* (3.3.10) *на минималните повърхнини в* $\mathbb{R}^4$*. За всяка точка* $p_0 \in \mathcal{D}$ *съществуват околност* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ *на* p_0 *и двойка холоморфни функции* (g_1, g_2)*, дефинирани в* $\mathcal{D}_0$ *и удовлетворяващи условието* $g_1'g_2' \neq 0$*, такива че решението* $(K, \varkappa)$ *се представя чрез формулите* (3.7.6) *в областта* $\mathcal{D}_0$*. Обратно, ако* (g_1, g_2) *е произволна двойка холоморфни функции, дефинирани в област* $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ *и удовлетворяващи условието* $g_1'g_2' \neq 0$*, то по формулите* (3.7.6) *се получава решение* $(K < 0, \varkappa)$ *на системата естествени уравнения* (3.3.10) *на минималните повърхнини в* $\mathbb{R}^4$*.*

Възможно е две различни двойки холоморфни функции да пораждат по формулите (3.7.6) едно и също решение на системата естествени уравнения (3.3.10). За да уточним това, доказваме:

Теорема 3.7.5 *Нека* (g_1, g_2) *и* $(\hat{g}_1, \hat{g}_2)$ *са две двойки холоморфни функции, дефинирани в свързана област* $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ *и изпълняващи условията* $g_1'g_2' \neq 0$ *и* $\hat{g}_1'\hat{g}_2' \neq 0$*. Двете двойки пораждат по формулите* (3.7.6) *едно и също решение на системата естествени уравнения* (3.3.10)*, тогава и само тогава, когато са свързани с дробно-линейни преобразувания със специални унитарни матрици от вида* (3.6.13)*.*

Формулите (3.7.5) също описват всички решения на (3.3.10). Те имат тази особеност в сравнение с (3.7.6), че от тях можем да изразим в явен вид решенията на системата само чрез реалните части на w_1 и w_2. По този начин можем да получим поне локално формула за общото решение на системата естествени уравнения чрез двойка реални хармонични функции. Ако означим с α_j реалната част на w_j, имаме $|w_j'| = \|\operatorname{grad}(\alpha_j)\|\,;\; j = 1; 2$. Така K и $\varkappa$ се изразяват с α_1 и α_2:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\|\operatorname{grad}(\alpha_1)\|\,\|\operatorname{grad}(\alpha_2)\|}{2\cosh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2)}\left(\frac{\operatorname{grad}^2(\alpha_1)}{\cosh^2(\alpha_1)}+\frac{\operatorname{grad}^2(\alpha_2)}{\cosh^2(\alpha_2)}\right); \\ \varkappa &= \frac{\|\operatorname{grad}(\alpha_1)\|\,\|\operatorname{grad}(\alpha_2)\|}{2\cosh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2)}\left(\frac{\operatorname{grad}^2(\alpha_1)}{\cosh^2(\alpha_1)}-\frac{\operatorname{grad}^2(\alpha_2)}{\cosh^2(\alpha_2)}\right). \end{aligned} \tag{3.7.12}$$

За системата естествени уравнения (3.3.10) имаме:

Теорема 3.7.7 *Нека $(K < 0, \varkappa)$ са двойка функции, дефинирани в дадена област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ и нека $(K, \varkappa)$ е решение на системата естествени уравнения* (3.3.10) *на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$. За всяка точка $p_0 \in \mathcal{D}$ съществуват околност $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ на p_0 и двойка реални хармонични функции (α_1, α_2), дефинирани в $\mathcal{D}_0$ и удовлетворяващи условията* $\operatorname{grad}(\alpha_j) \neq 0,\ j = 1; 2$ *такива, че решението $(K, \varkappa)$ се представя чрез формулите* (3.7.12) *в областта $\mathcal{D}_0$. Обратно, ако (α_1, α_2) е произволна двойка реални хармонични функции, дефинирани в област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяващи условията* $\operatorname{grad}(\alpha_j) \neq 0,\ j = 1; 2$, *то по формулите* (3.7.12) *се получава решение $(K < 0, \varkappa)$ на системата естествени уравнения* (3.3.10) *на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$.*

Възможно е две различни двойки функции (α_1, α_2) и $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ да дават по формулите (3.7.12) едно и също решение системата естествени уравнения. В този случай не можем да получим толкова проста връзка между (α_1, α_2) и $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$, подобна на (3.6.13) и (3.6.14), тъй като от формулите (3.6.14) не можем да изключим по чисто алгебричен път имагинерните части на w_1 и w_2.

Формулите (3.6.6) и (3.7.6) дават съответствия, подобни на тези в $\mathbb{R}^3$, между три вида класове от обекти, които дефинираме по-долу. Тези съответствия в общия случай могат да се дефинират само локално в околност на фиксирана точка.

Да разгледаме множеството от несуперконформни минимални повърхнини $\mathbb{R}^4$ от вида $(\mathcal{D}, \mathrm{x})$, където $\mathcal{D}$ е околност на нулата в $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, в която повърхнината е зададена с канонични координати от първи вид. За две повърхнини от този вид казваме, че са *еквивалентни*, ако съществува околност на нулата $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \cap \hat{\mathcal{D}}$, такава че двете повърхнини са свързани в $\mathcal{D}_0$ със собствено движение в $\mathbb{R}^4$ от вида (3.3.9). Множеството от класовете на еквивалентност на така дефинираната релация означаваме с $\mathbf{MS}_{\mathbb{R}^4}$.

Да разгледаме множеството от решения на системата естествени уравнения (3.3.10) на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$ от вида $(\mathcal{D}, K < 0, \varkappa)$, където $\mathcal{D}$ е околност на нулата в $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, в която са дефинирани функциите K и $\varkappa$. За две решения $(\mathcal{D}, K, \varkappa)$ и $(\hat{\mathcal{D}}, \hat{K}, \hat{\varkappa})$ от този вид казваме, че са *еквивалентни*, ако съществува околност на нулата $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \cap \hat{\mathcal{D}}$, такава че двете решения съвпадат в $\mathcal{D}_0$. Множеството от класовете на еквивалентност на така дефинираната релация означаваме с $\mathbf{SNE}_{\mathbb{R}^4}$.

Накрая да разгледаме и множеството от двойки холоморфни функции от вида $(\mathcal{D}, g_1, g_2)$, където $\mathcal{D}$ е околност на нулата в $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, в която функциите g_1 и g_2 са дефинирани и изпълняват условието $g_1' g_2' \neq 0$. За две двойки функции $(\mathcal{D}, g_1, g_2)$ и $(\hat{\mathcal{D}}, \hat{g}_1, \hat{g}_2)$ от този вид казваме, че са *еквивалентни*, ако съществува околност на нулата $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \cap \hat{\mathcal{D}}$, такава че двете двойки функции са свързани в $\mathcal{D}_0$ с дробно-линейни преобразования със специални унитарни матрици от вида (3.6.13). Множеството от класовете на еквивалентност на така дефинираната релация означаваме с $\mathbf{H}_{\mathbb{R}^4}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{MS}_{\mathbb{R}^4} \arrow[dr] & \\
\mathbf{H}_{\mathbb{R}^4} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{SNE}_{\mathbb{R}^4}
\end{tikzcd}
$$

Фигура 3.1: Комутативна диаграма от биекции

От резултатите в Глава 3 следва, че съществуват изображения между трите вида класове от обекти. Тези изображения схематично са представени на Фигура 3.1 . Получените за тях резултати можем да резюмираме в следната:

Теорема 3.7.8 *Диаграмата на Фигура 3.1 е комутативна и трите изображения са биекции.*

В Секция 3.8, като следствие от каноничните представяния на Вайерщрас за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$, отначало е получено съответствие между решенията на системата естествени уравнения на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$ и двойките решения на естественото уравнение на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^3$. Ако $(\mathcal{D}, K < 0, \varkappa)$ е решение на системата (3.3.10), то е в сила:

$$K = -\frac{1}{2}\sqrt{\nu_1\,\nu_2}\,(\nu_1 + \nu_2)\,; \qquad \varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{\nu_1\,\nu_2}\,(\nu_1 - \nu_2)\,, \tag{3.8.1}$$

където ν_1 и ν_2 са две решения на естественото уравнение (2.3.8). Обратно, ако ν_1 и ν_2 са две произволни решения на естественото уравнение (2.3.8), то те пораждат по формулите (3.8.1) решение на (3.3.10). Функциите ν_1 и ν_2 се изразяват чрез K и $\varkappa$ по следния начин:

$$\nu_1 = \frac{-K + \varkappa}{\sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2}}\,; \qquad \nu_2 = \frac{-K - \varkappa}{\sqrt[4]{K^2 - \varkappa^2}}\,. \tag{3.8.2}$$

По-нататък е получено съответствие (поне локално) между несуперконформните минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$ и двойките минимални повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$. Тъй като каноничните координати в общия случай съществуват само в околност на дадена точка, то се разглеждат двойките $(\mathcal{M}, p)$, където $\mathcal{M}$ е минимална повърхнина от общ тип, а p е фиксирана точка от нея. Нека $(\mathcal{M}, p)$ е несуперконформна минимална повърхнини в $\mathbb{R}^4$ и нека $t = u + \mathrm{i}v$ задава канонични координати от първи вид в околност на p, като t_0 задава координатите на точката p. Повърхнината $\mathcal{M}$ има канонично представяне на Вайерщрас от вида (3.6.6) чрез двойка холоморфни функции g_1 и g_2. Всяка една от функциите g_1 и g_2 поражда чрез каноничното представяне на Вайерщрас (2.6.4) в $\mathbb{R}^3$ по една минимална повърхнина от общ тип. Означаваме получените повърхнини в $\mathbb{R}^3$ с $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, а с p_1 и p_2 съответните точки от тях, имащи за координати $t = t_0$. По този начин съпоставяме на $(\mathcal{M}, p)$ двете повърхнини $(\mathcal{M}_1, p_1)$ и $(\mathcal{M}_2, p_2)$. Лесно се вижда, че последната конструкция е обратима. Така полученото съответствие между несуперконформните минимални повърхнини в $\mathbb{R}^4$ и двойките минимални повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$ означаваме накратко по следния начин:

$$\big(\mathcal{M}, p\big) \leftrightarrow \big((\mathcal{M}_1, p_1), (\mathcal{M}_2, p_2)\big)\,. \tag{3.8.3}$$

От Теореми 2.6.5 и 3.6.6 следва, че това съответствие е инвариантно при произволни собствени движения в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$. Нека $(k\mathcal{M}, kp)$ означава повърхнината, получена чрез хомотетия от $(\mathcal{M}, p)$ в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^4$, където kp е съответната на p точка при тази хомотетия. Изпълнено е:

$$\big(k\mathcal{M}, kp\big) \leftrightarrow \big((k\mathcal{M}_1, kp_1), (k\mathcal{M}_2, kp_2)\big)\,, \tag{3.8.6}$$

което означава, че (3.8.3) е инвариантно при хомотетия. Нека $\mathcal{M}_\theta$ е еднопараметричната фамилия от асоциирани минимални повърхнини на $\mathcal{M}$ и $p_\theta = \mathcal{F}_\theta(p)$ е точката от $\mathcal{M}_\theta$, съответна на p при стандартната изометрия $\mathcal{F}_\theta$ между $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_\theta$, дефинирана в Предложение 1.3.4. В сила е:

$$\big(\mathcal{M}_\theta, p_\theta\big) \leftrightarrow \big((\mathcal{M}_{1|\theta}, p_{1|\theta}), (\mathcal{M}_{2|\theta}, p_{2|\theta})\big)\,, \tag{3.8.7}$$

което означава, че съответствието (3.8.3) запазва еднопараметричните фамилии от асоциирани минимални повърхнини.

Като приложение на полученото съответствие е разгледан следния въпрос: *Кои са несуперконформните минимални повърхнини в* $\mathbb{R}^4$*, за които едното семейство канонични линии от първи вид са едновременно и геодезични?* Отговорът на аналогичния въпрос в $\mathbb{R}^3$ е даден с Предложение 2.3.5 . За изследваното свойство е доказано, че се запазва при съответствието (3.8.3) и по този начин е получено следното:

Предложение 3.8.2 *Нека* $\mathcal{M}$ *е несуперконформна минимална повърхнина в* $\mathbb{R}^4$ *и* $p_0 \in \mathcal{M}$ *е фиксирана точка от нея. Нека* $t = u + \mathrm{i}v$ *задава канонични координати от първи вид за* $\mathcal{M}$ *в околност на* p_0*. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *Съществува околност на* p_0 *в* $\mathcal{M}$*, в която каноничните* u*-линии от първи вид са геодезични.*

2. *Съществува околност на* p_0 *в* $\mathcal{M}$*, която се получава чрез собствено движение, хомотетия и смяна на каноничните координати от вида* $t \to \pm t + c$ *от дадена част на някоя от двупараметричната фамилия повърхнини, породени по формулите* (3.6.6) *чрез двойките* (e^t, e^{at+b})*, където* $a > 0$ *и* $b \geq 0$*.*

Повърхнините от двупараметричната фамилия, описана в точка 2., не могат да се получават дори локално една от друга чрез собствено движение, хомотетия и смяна на каноничните координати.

Глава 4. Минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$

В Глава 4 се разглеждат минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$ по метод, аналогичен на този от $\mathbb{R}^3$, като са получени вече известни свойства на тези повърхнини по нов начин, който лесно се пренася в $\mathbb{R}^4_1$. В Секция 4.1 са дадени някои означения, дефиниции и свойства на минималните пространствено-подобни повърхнини, специфични за $\mathbb{R}^3_1$. В Секция 4.2 са разгледани свойствата на каноничните координати за минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$.

В Секция 4.3, с помощта на функцията Φ, са изведени по нов начин, аналогичен на този от $\mathbb{R}^3$, формули от тип на Френе и естественото уравнение на минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$. Като основен скаларен инвариант за тези повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$ отново ползваме величината ν, която е положителната собствена стойност на оператора на Вайнгартен за $\mathcal{M}$ и я наричаме *нормална кривина* на $\mathcal{M}$. При главни канонични координати коефициентът E на първата основна форма и нормалната кривина ν са свързани с равенството: $E\nu = 1$. Гаусовата кривина K и нормалната кривина ν удовлетворяват равенството $K = \nu^2$, което не зависи от избора на координати.

За минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$ са изведени формули от тип на Френе (формули 4.3.6 от дисертацията), аналогични на (2.3.6) за $\mathbb{R}^3$. Условията за интегруемост на тази система ЧДУ, записани чрез нормалната кривина ν, се свеждат до уравнението:

$$\Delta \ln \nu - 2\nu = 0 \,, \tag{4.3.8}$$

получено в [10] и наречено *естествено уравнение* на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$.

Ако две минимални пространствено-подобни повърхнини $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ и $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$ са свързани чрез собствено движение от вида:

$$\hat{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + \mathrm{b}\,; \qquad A \in \mathbf{SO}(2,1,\mathbb{R}), \quad \mathrm{b} \in \mathbb{R}^3_1\,, \tag{4.3.9}$$

то те имат общи главни канонични координати и пораждат едно и също решение на (4.3.8).

Уравнението (4.3.8) е не само необходимо, но и достатъчно условие за съществуване поне локално на решение на съответната система на Френе. Приложено към минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$, това означава, че всяко решение на (4.3.8) може локално да се представи като нормална кривина на минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$. За този вид повърхнини е получена теорема от тип на Боне, аналогична на Теорема 2.3.2 от пространството $\mathbb{R}^3$.

В Секция 4.4 са дадени прости, чисто аналитични изводи на някои класически формули от тип „представяне на Вайерщрас“ за минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$, зададени относно произволни изотермични координати. Ако $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е такава повърхнина, то за съответната функция $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ имаме аналог на представянето (2.4.8) от $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi = (\mathrm{i}f(g^2 - 1)\,,\, f(g^2 + 1)\,,\, 2fg)\,, \tag{4.4.6}$$

където (f, g) е двойка холоморфни функции, изпълняващи условията $f \neq 0$ и $|g| \neq 1$. Обратно, всяка такава двойка функции поражда по формулите (4.4.6) функция Φ, която е съответна на минимална пространствено-подобна повърхнина в $\mathbb{R}^3_1$. Функциите f и g се изразяват експлицитно чрез Φ по следния начин:

$$f = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2); \qquad g = \frac{\phi_3}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,. \tag{4.4.7}$$

По-нататък са получени формулите, по които се преобразуват функциите, участващи в представянията от тип на Вайерщрас при смяна на изотермичните координати и при основните геометрични преобразувания на дадената минимална пространствено-подобна повърхнина в $\mathbb{R}^3_1$. С помощта на теорията на спинорите в $\mathbb{R}^3_1$ са получени трансформационни формули за двойката функции в (4.4.6) при движение на повърхнината в $\mathbb{R}^3_1$. Основният резултат е, че функцията g се преобразува с помощта на дробно-линейна трансформация, зададена със специална унитарна (относно индефинитното Ермитово произведение в $\mathbb{C}^2_1$) матрица:

$$\hat{f} = f(bg + \bar{a})^2\,; \quad \hat{g} = \frac{ag + \bar{b}}{bg + \bar{a}}\,; \qquad a, b \in \mathbb{C}\,;\ |a|^2 - |b|^2 = 1\,. \tag{4.4.21}$$

За последните формули е в сила следната:

Теорема 4.4.3 *Нека $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ и $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ са две минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$, зададени с представяния на Вайерщрас от вида* (4.4.6)*, където $\mathcal{D}$ е свързана област в $\mathbb{C}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани със собствено ортохронно движение в $\mathbb{R}^3_1$: $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$, където $A \in \mathbf{SO}^+(2, 1, \mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^3_1$.*

2. *Функциите от представянията на Вайерщрас на $\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани с равенствата* (4.4.21).

В Секция 4.5 са изразени основните инварианти на една минимална пространствено-подобна повърхнина в $\mathbb{R}^3_1$ чрез двойката функции, участващи в представянето на Вайерщрас. При представянето (4.4.6) имаме следните формули за Гаусовата и нормалната кривини:

$$K = \frac{4|g'|^2}{|f|^2(|g|^2 - 1)^4}\,; \qquad \nu = \frac{2|g'|}{|f|(|g|^2 - 1)^2}\,. \tag{4.5.18}$$

В Секция 4.6 е даден нов извод на каноничното представяне на Вайерщрас за минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$, като новата схема на изложението е подбрана така, че да допуска пренасяне в случая на $\mathbb{R}^4_1$. Ако $\mathcal{M}$ е минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$, зададена с главни канонични координати, то е показано, че функциите f и g в (4.4.6) са свързани с равенството:

$$f = \frac{1}{2g'} \,. \tag{4.6.3}$$

Оттук и (4.4.6) получаваме представяне, еквивалентно на това от [10]:

$$\Phi = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{g^2-1}{g'} \,,\, \frac{1}{2}\frac{g^2+1}{g'} \,,\, \frac{g}{g'} \right), \tag{4.6.4}$$

където g е холоморфна функция, изпълняваща условията $|g| \neq 1$ и $g' \neq 0$. Обратно, всяка такава функция поражда по формулите (4.6.4) минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$, зададена с главни канонични координати. За така полученото представяне казваме, че е *канонично представяне на Вайерщрас* за минималната пространствено-подобна повърхнина от общ тип $\mathcal{M}$. Функцията g се изразява в явен вид чрез Φ по следния начин:

$$g = \frac{\phi_3}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2} \,. \tag{4.6.5}$$

От формулите, получени в Секция 4.4 следва, че при собствено движение в $\mathbb{R}^3_1$ функциите $\hat{g}$ и g от каноничните представяния (4.6.4) са свързани или с дробно-линейно преобразование със специална унитарна матрица, или с дробно-линейно преобразование с антиунитарна матрица с детерминанта -1:

$$\hat{g} = \frac{ag + \bar{b}}{bg + \bar{a}} \,; \qquad a, b \in \mathbb{C} \,;\ |a|^2 - |b|^2 = \pm 1 \,. \tag{4.6.9}$$

Доказана е следната:

Теорема 4.6.5 *Нека $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ и $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ са две минимални пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$, зададени с канонични представяния на Вайерщрас от вида (4.6.4), където $\mathcal{D}$ е свързана област в $\mathbb{C}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^3_1$ от вида: $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$, където $A \in \mathbf{SO}(2,1,\mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^3_1$.*

2. *Функциите $\hat{g}$ и g от представянията на Вайерщрас на $\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани с равенствата (4.6.9), като $|a|^2 - |b|^2 = +1$ при ортохронно движение и $|a|^2 - |b|^2 = -1$ при неортохронно движение в $\mathbb{R}^3_1$.*

В Секция 4.7 са изразени основните инварианти на една минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$ чрез функцията, участваща в каноничното представяне на Вайерщрас. Ако минималната повърхнина $\mathcal{M}$ е зададена с (4.6.4), то за нормалната ѝ кривина имаме:

$$\nu = \frac{4|g'|^2}{(|g|^2-1)^2} \, . \tag{4.7.4}$$

Прилагайки подхода от [10] показваме, че последният израз за ν може да се интерпретира като локална формула за общото решение на естественото уравнение (4.3.8) на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^3_1$. Възможно е две различни функции g да дават по (4.7.4) едно и също решение на уравнението (4.3.8). Това е така точно когато двете функции са свързани с равенството (4.6.9).

Ако дефинираме класове на еквивалентност от минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$, решенията на естественото уравнение (4.3.8) и холоморфните функции на една променлива, аналогично на случаите в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$, то формулите (4.6.4) и (4.7.4) дават съответствия (биекции) между трите вида класове на еквивалентност.

Глава 5. Минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$

В Глава 5 се разглеждат минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ по метод, аналогичен на този за $\mathbb{R}^4$. В Секция 5.1 са дадени някои означения, дефиниции и свойства на минималните пространствено-подобни повърхнини, специфични за $\mathbb{R}^4_1$. Както и в $\mathbb{R}^4$, наред със средната и Гаусовата кривина, трети основен инвариант е *кривината на нормалната свързаност* $\varkappa$, която се дефинира, аналогично на (3.1.3) и наричаме накратко *нормална кривина*. За $\varkappa$ е получен израз чрез Φ, което заедно с формулите (1.4.2) и (1.4.7), които вече имаме за K, ни дава:

$$K = \frac{-4\|\Phi'^{\perp}\|^2}{\|\Phi\|^4} = \frac{-4\|\Phi\wedge\Phi'\|^2}{\|\Phi\|^6} \, ; \qquad \varkappa = \frac{4}{\|\Phi\|^6}\det(\Phi, \bar{\Phi}, \Phi', \overline{\Phi'}) \, . \tag{5.1.10}$$

В началото на Секция 5.2 първо е изразено условието за изроденост на една точка $p \in \mathcal{M}$ чрез свойствата на образа на втората основна форма σ в нормалното пространство $N_p(\mathcal{M})$.

Предложение 5.2.1 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална пространствено-подобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ и p е точка от $\mathcal{M}$, то p е изродена точка по смисъла на Дефиниция 1.5.3, точно когато образът на втората основна форма $\{\sigma(\mathrm{X},\mathrm{Y});\ \mathrm{X}\in T_p(\mathcal{M}), \mathrm{Y}\in T_p(\mathcal{M})\}$ в $N_p(\mathcal{M})$ изцяло се съдържа в едно от двете изотропни едномерни подпространства на $N_p(\mathcal{M})$.*

Ако $\mathcal{M}$ е зададена с канонични координати от първи вид, то за коефициента E на първата основна форма и кривините K и $\varkappa$ е в сила:

$$E = \frac{1}{\sqrt[4]{K^2 + \varkappa^2}}\,. \tag{5.2.8}$$

Изродените точки на една минимална пространствено-подобна повърхнина $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^4_1$ са характеризирани чрез двойката $(K, \varkappa)$ по следния начин:

Теорема 5.2.2 *Ако $\mathcal{M}$ е минимална пространствено-подобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, а K и $\varkappa$ са Гаусовата кривина и кривината на нормалната свързаност за $\mathcal{M}$, то една точка $p \in \mathcal{M}$ е изродена, точно когато в p е изпълнено $K = 0$ и $\varkappa = 0$.*

В Секция 5.3 с помощта на функцията Φ са изведени по нов начин формули от тип на Френе и системата естествени уравнения на минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$. Условията за интегруемост на системата на Френе се наричат *система естествени ЧДУ* на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. Както и в $\mathbb{R}^4$, ако две такива повърхнини $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ и $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ в $\mathbb{R}^4_1$ са свързани чрез собствено движение от вида:

$$\hat{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + \mathrm{b}; \qquad A \in \mathbf{SO}(3,1,\mathbb{R}), \quad \mathrm{b} \in \mathbb{R}^4_1\,, \tag{5.3.9}$$

то те дават едно и също решение на системата естествени ЧДУ. Ако тази система естествени ЧДУ се запише чрез двойката $(K, \varkappa)$, то при $K \neq 0$ се получава система, еквивалентна на системата получена в [1]:

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{K^2 + \varkappa^2}\,\Delta \ln \sqrt[4]{K^2 + \varkappa^2} = 2K\,; \\ &\sqrt[4]{K^2 + \varkappa^2}\,\Delta \arctan \frac{\varkappa}{K} = 2\varkappa\,; \end{aligned} \qquad K \neq 0\,. \tag{5.3.10}$$

Ако в някоя точка имаме $K = 0$, то в околност на тази точка ще е в сила $\varkappa \neq 0$ и ще имаме система, подобна на (5.3.10), като заменим $\dfrac{\varkappa}{K}$ с $\dfrac{K}{\varkappa}$. Така описаните резултати са обединени в следната:

Теорема 5.3.3 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$ и в околност на дадена точка от $\mathcal{M}$ са въведени канонични координати от първи вид. Нека в разглежданата околност е в сила $K \neq 0$. Тогава Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$ на $\mathcal{M}$, разглеждани като функции на тези координати, са решение на системата естествени уравнения* (5.3.10) *на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. Ако $\hat{\mathcal{M}}$ се получава от $\mathcal{M}$ чрез собствено движение от вида* (5.3.9), *то тя поражда същото решение на* (5.3.10).

Както и в $\mathbb{R}^4$ имаме теорема от тип на Боне за минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ (вж. също [1]):

Теорема 5.3.5 *Нека* $K \neq 0$ *и* $\varkappa$ *са реални функции, дефинирани в дадена област* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *и нека двойката* $(K, \varkappa)$ *е решение на системата естествени уравнения* (5.3.10) *на минималните пространствено-подобни повърхнини в* $\mathbb{R}^4_1$*. За всяка точка* $p_0 \in \mathcal{D}$ *съществува околност* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ *на* p_0 *и изображение* $\mathrm{x} : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}^4_1$*, такива че* $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ *е минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в* $\mathbb{R}^4_1$*, зададена с канонични координати от първи вид и имаща дадените функции* K *и* $\varkappa$ *съответно за Гаусова кривина и кривина на нормалната свързаност. Ако* $(\hat{\mathcal{D}}_0, \hat{\mathrm{x}})$ *е друга повърхнина със същите свойства, то съществува подобласт* $\tilde{\mathcal{D}}_0$ *на* $\mathcal{D}_0$ *и* $\hat{\mathcal{D}}_0$*, съдържаща точка* p_0*, така че повърхнината* $(\tilde{\mathcal{D}}_0, \hat{\mathrm{x}})$ *се получава от* $(\tilde{\mathcal{D}}_0, \mathrm{x})$ *чрез собствено движение в* $\mathbb{R}^4_1$ *от вида* (5.3.9)*.*

В Секция 5.4 са дадени прости, чисто аналитични изводи на някои класически формули от тип „представяне на Вайерщрас“ за минимални пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$, зададени относно произволни изотермични координати. Ако $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е такава повърхнина, то аналогично на (3.4.9), за съответната функция $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ имаме:

$$\Phi = \big(\mathrm{i}f(g_1g_2+1)\,,\ f(g_1g_2-1)\,,\ f(g_1+g_2)\,,\ f(g_1-g_2)\big)\,, \tag{5.4.12}$$

където за f, g_1 и g_2 имаме следните условия:

$$f \neq 0\,; \qquad g_1\bar{g}_2 \neq -1\,. \tag{5.4.13}$$

Функциите f, g_1 и g_2 се изразяват експлицитно чрез Φ:

$$f = -\frac{1}{2}(\mathrm{i}\phi_1+\phi_2)\,; \qquad g_1 = -\frac{\phi_3+\phi_4}{\mathrm{i}\phi_1+\phi_2}\,; \qquad g_2 = -\frac{\phi_3-\phi_4}{\mathrm{i}\phi_1+\phi_2}\,. \tag{5.4.14}$$

Доказваме следната:

Теорема 5.4.2 *Нека* $\mathcal{M}$ *е минимална пространствено-подобна повърхнина в* $\mathbb{R}^4_1$*,* p *е точка от нея и* $t = u + \mathrm{i}v$ *задава изотермични координати за* $\mathcal{M}$ *в околност на* p*. Да предположим, че функцията* Φ*, дефинирана с* (1.2.1)*, изпълнява условието* $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$*. Тогава съществува околност на* p*, в която функцията* Φ *има представяне от тип на Вайерщрас* (5.4.12)*, където* f*,* g_1 *и* g_2 *са холоморфни функции, изпълняващи условията* (5.4.13)*. Функциите* f*,* g_1 *и* g_2 *се определят еднозначно от* Φ *по формулите* (5.4.14)*.*

Обратно, нека (f, g_1, g_2) *са тройка холоморфни функции, дефинирани в област* $\mathcal{D}$ *от* $\mathbb{C}$*, изпълняващи условията* (5.4.13) *и нека* p *е дадена точка от* $\mathcal{D}$*. Тогава съществуват подобласт* $\mathcal{D}_0$ *на* $\mathcal{D}$*, съдържаща* p *и минимална пространствено-подобна повърхнина* $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ *в* $\mathbb{R}^4_1$ *такива, че съответната функция* Φ *има представяне* (5.4.12) *в* $\mathcal{D}_0$ *и изпълнява условието* $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$*.*

По-нататък са получени формулите, по които се преобразуват функциите, участващи в представянията от тип на Вайерщрас при смяна на изотермичните координати и при основните геометрични преобразувания на дадената минимална повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$. С помощта на теорията на спинорите в $\mathbb{R}^4_1$ са получени трансформационни формули за тройката функции в (5.4.12) при движение на повърхнината в $\mathbb{R}^4_1$. Основният резултат е, че функциите g_1 и g_2 се преобразуват с помощта на дробно-линейни трансформации, зададени със специални линейни матрици:

$$\begin{array}{l} \hat{f} = f(cg_1+d)(-\bar{b}g_2+\bar{a})\,; \quad \hat{g}_1 = \dfrac{ag_1+b}{cg_1+d}\,; \quad \hat{g}_2 = \dfrac{\bar{d}g_2-\bar{c}}{-\bar{b}g_2+\bar{a}}\,; \\ a,b,c,d \in \mathbb{C}\,; \quad ad-bc=1\,. \end{array} \tag{5.4.29}$$

Във връзка с последните формули доказваме следната:

Теорема 5.4.3 *Нека* $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ *и* $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ *са две минимални пространствено-подобни повърхнини в* $\mathbb{R}^4_1$*, зададени с представяния на Вайерщрас от вида* (5.4.12)*, където* $\mathcal{D}$ *е свързана област в* $\mathbb{C}$*. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. $\hat{\mathcal{M}}$ *и* $\mathcal{M}$ *са свързани със собствено ортохронно движение в* $\mathbb{R}^4_1$ *от вида:*
   $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$*, където* $A \in \mathbf{SO}^+(3,1,\mathbb{R})$ *и* $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4_1$*.*

2. *Функциите от представянията на Вайерщрас на* $\hat{\mathcal{M}}$ *и* $\mathcal{M}$ *са свързани с равенствата* (5.4.29)*.*

Да отбележим, че за разлика от $\mathbb{R}^4$, тук двете дробно-линейни функции в (5.4.29) не са независими една от друга. Ако B означава матрицата в трансформацията за g_1, то с директни изчисления се вижда, че матрицата за g_2 е B^{*-1}.

В Секция 5.5 са изразени основните инварианти на една минимална пространствено-подобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ чрез тройката функции, участващи в представянето на Вайерщрас. Така при представянето (5.4.12) имаме:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-2}{|f|^2\,|1+g_1\bar{g}_2|^2}\left(\frac{g'_1\bar{g}'_2}{(1+g_1\bar{g}_2)^2}+\frac{\bar{g}'_1g'_2}{(1+\bar{g}_1g_2)^2}\right); \\ \varkappa &= \frac{2\mathrm{i}}{|f|^2\,|1+g_1\bar{g}_2|^2}\left(\frac{g'_1\bar{g}'_2}{(1+g_1\bar{g}_2)^2}-\frac{\bar{g}'_1g'_2}{(1+\bar{g}_1g_2)^2}\right). \end{aligned} \tag{5.5.41}$$

В Секция 5.6 са получени каноничните представяния на Вайерщрас за минималните повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$. Ако $\mathcal{M}$ е такава повърхнина, зададена с канонични координати от първи вид, то за функциите от представянето (5.4.12) имаме:

$$f = \frac{1}{2\sqrt{g'_1g'_2}}\,. \tag{5.6.7}$$

Като приложим последната формула към представянето (5.4.12) получаваме:

$$\Phi = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\, \frac{g_1 g_2 + 1}{\sqrt{g_1' g_2'}} \,, \frac{1}{2}\, \frac{g_1 g_2 - 1}{\sqrt{g_1' g_2'}} \,, \frac{1}{2}\, \frac{g_1 + g_2}{\sqrt{g_1' g_2'}} \,, \frac{1}{2}\, \frac{g_1 - g_2}{\sqrt{g_1' g_2'}} \right), \tag{5.6.8}$$

където функциите g_1 и g_2 удовлетворяват условията:

$$g_1' g_2' \neq 0\,; \qquad g_1 \bar{g}_2 \neq -1\,. \tag{5.6.9}$$

За така полученото представяне казваме, че е *канонично представяне на Вайерщрас* за минималната повърхнина от общ тип $\mathcal{M}$. Функциите g_1 и g_2 се изразяват в явен вид чрез Φ:

$$g_1 = -\frac{\phi_3 + \phi_4}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,; \qquad g_2 = -\frac{\phi_3 - \phi_4}{\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2}\,. \tag{5.6.10}$$

Свойствата на представянето (5.6.8) даваме със следната:

Теорема 5.6.5 *Нека $\mathcal{M}$ е минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$ и p е дадена точка от нея. Нека $t = u + \mathrm{i}v$ задава канонични координати от първи вид за $\mathcal{M}$ в околност на p. Да предположим, че функцията Φ, дефинирана с* (1.2.1)*, изпълнява условието $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$. Тогава съществува околност на p, в която функцията Φ има представяне от тип на Вайерщрас* (5.6.8)*, където g_1 и g_2 са холоморфни функции, изпълняващи* (5.6.9)*. Функциите g_1 и g_2 се определят еднозначно от Φ по формулите* (5.6.10).

Обратно, нека g_1 и g_2 са холоморфни функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$ от $\mathbb{C}$, удовлетворяващи условията (5.6.9) *и нека p е дадена точка от $\mathcal{D}$. Тогава съществуват подобласт $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$, съдържаща p и минимална пространствено-подобна повърхнина $(\mathcal{D}_0, \mathrm{x})$ от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$ такива, че съответната функция Φ има представяне* (5.6.8) *в $\mathcal{D}_0$ и изпълнява условието $\mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \neq 0$.*

По-нататък е показано, че при собствено движение в $\mathbb{R}^4_1$, функциите $\hat{g}_j$ и g_j от каноничните представяния (5.6.8) са свързани посредством дробно-линейни преобразования със специални линейни матрици:

$$\hat{g}_1 = \frac{a g_1 + b}{c g_1 + d}\,; \quad \hat{g}_2 = \frac{\bar{d} g_2 - \bar{c}}{-\bar{b} g_2 + \bar{a}}\,; \qquad \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{C}\,; \\ ad - bc = 1\,, \end{array} \tag{5.6.16}$$

като тези формули се прилагат както при ортохронно, така и при неортохронно движение. В сила е:

Теорема 5.6.6 *Нека $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{D}, \hat{\mathrm{x}})$ и $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ са две минимални пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$, зададени с представяния на Вайерщрас от вида* (5.6.8)*, където $\mathcal{D}$ е свързана област в $\mathbb{C}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. *$\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^4_1$ от вида:* $\hat{\mathrm{x}}(t) = A\mathrm{x}(t) + \mathrm{b}$, *където* $A \in \mathbf{SO}(3,1,\mathbb{R})$ *и* $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4_1$.

2. *Функциите $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$, g_1 и g_2 от каноничните представяния на Вайерщрас* (5.6.8) *на $\hat{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ са свързани с равенствата* (5.6.16).

В Секция 5.7 са изразени основните инварианти на една минимална пространствено-подобна повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$ чрез функциите, участващи в каноничните представяния на Вайерщрас. Ако повърхнината $\mathcal{M}$ е зададена с (5.6.8), то за Гаусовата и нормалната ѝ кривини имаме:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-8\,|g_1'\bar{g}_2'|}{|1+g_1\bar{g}_2|^2}\left(\frac{g_1'\bar{g}_2'}{(1+g_1\bar{g}_2)^2} + \frac{\bar{g}_1'g_2'}{(1+\bar{g}_1g_2)^2}\right); \\ \varkappa &= \frac{8\mathrm{i}\,|g_1'\bar{g}_2'|}{|1+g_1\bar{g}_2|^2}\left(\frac{g_1'\bar{g}_2'}{(1+g_1\bar{g}_2)^2} - \frac{\bar{g}_1'g_2'}{(1+\bar{g}_1g_2)^2}\right). \end{aligned} \tag{5.7.11}$$

Както и в $\mathbb{R}^4$, получените формули за K и $\varkappa$ могат да се интерпретират като локални формули за общото решение на системата естествени уравнения (5.3.10) на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. Именно, в сила е:

Теорема 5.7.1 *Нека $(K,\varkappa)$ са двойка функции, дефинирани в дадена област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ и нека $(K,\varkappa)$ е решение на системата естествени уравнения* (5.3.10) *на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. За всяка точка $p_0 \in \mathcal{D}$ съществува околност $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ на p_0 и двойка холоморфни функции (g_1, g_2), дефинирани в $\mathcal{D}_0$ и удовлетворяващи условията $g_1'g_2' \neq 0$ и $g_1\bar{g}_2 \neq -1$, такива че решението $(K,\varkappa)$ се представя чрез формулите* (5.7.11) *в областта $\mathcal{D}_0$. Обратно, ако (g_1, g_2) е произволна двойка холоморфни функции, дефинирани в област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяващи условията $g_1'g_2' \neq 0$ и $g_1\bar{g}_2 \neq -1$, то по формулите* (5.7.11) *се получава решение $(K,\varkappa)$ на системата естествени уравнения* (5.3.10) *на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$.*

Както и в предишните случаи е възможно две различни двойки холоморфни функции да пораждат по формулите (5.7.11) едно и също решение на системата естествени уравнения (5.3.10). Доказваме следната:

Теорема 5.7.2 *Нека (g_1, g_2) и $(\hat{g}_1, \hat{g}_2)$ са две двойки холоморфни функции, дефинирани в свързана област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ и изпълняващи условията $g_1'g_2' \neq 0$, $g_1\bar{g}_2 \neq -1$, $\hat{g}_1'\hat{g}_2' \neq 0$ и $\hat{g}_1\bar{\hat{g}}_2 \neq -1$. Двете двойки пораждат по формулите* (5.7.11) *едно и също решение на системата естествени уравнения* (5.3.10), *тогава и само тогава, когато са свързани с дробно-линейни преобразования със специални линейни матрици от вида* (5.6.16).

Аналогично на случая в $\mathbb{R}^4$, в $\mathbb{R}^4_1$ дефинираме класовете на еквивалентност: $\mathbf{MS}_{\mathbb{R}^4_1}$ от минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$, $\mathbf{SNE}_{\mathbb{R}^4_1}$ от решенията на системата естествени уравнения (5.3.10) на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ и $\mathbf{H}_{\mathbb{R}^4_1}$ от двойките холоморфни функции на една променлива. Тогава формулите (5.6.8) и (5.7.11) дават съответствия (биекции) между трите вида класове на еквивалентност. От

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{MS}_{\mathbb{R}^4_1} \arrow[dr] & \\
\mathbf{H}_{\mathbb{R}^4_1} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{SNE}_{\mathbb{R}^4_1}
\end{tikzcd}$$

Фигура 5.1: Комутативна диаграма от биекции

резултатите в Глава 5 следва, че съществуват изображения между трите вида класове от обекти. Тези изображения схематично са представени на Фигура 5.1 . Получените за тях резултати можем да резюмираме в следната:

Теорема 5.7.4 *Диаграмата на Фигура 5.1 е комутативна и трите изображения са биекции.*

Списък на Публикациите по Дисертацията

1. G. Ganchev, K. Kanchev "Explicit Solving of the System of Natural PDE's of Minimal Surfaces in the Four-Dimensional Euclidean Space", *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, Tome 67, No 5, 623–628, 2014.

2. G. Ganchev, K. Kanchev, O. Kassabov "Transition to Canonical Principal Parameters on Maximal Spacelike Surfaces in Minkowski Space", *Serdica Math. J.*, 42, 301–310, 2016.

3. G. Ganchev, K. Kanchev "Explicit Solving of the System of Natural PDE's of Minimal Space-like Surfaces in Minkowski Space-time", *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, Tome 70, No 6, 761–768, 2017.

4. G. Ganchev, K. Kanchev "Canonical Weierstrass representations for minimal surfaces in Euclidean 4-space", *arXiv:1609.01606.*

5. G. Ganchev, K. Kanchev "Canonical Weierstrass representations for minimal space-like surfaces in $\mathbb{R}^4_1$", *arXiv:1612.05504.*

Апробация на Резултатите в Дисертацията

1. K. Kanchev, "Explicit Solving of the System of Natural PDE's of Minimal Surfaces in the Four-Dimensional Euclidean Space", "4th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields", Veliko Tarnovo, Bulgaria, September 08-11, 2014.

2. Г. Ганчев, К. Кънчев, „Съответствие между минимални повърхнини, решения на естествените уравнения и холоморфни функции", Годишна

отчетна научна сесия на секция „Анализ, Геометрия и Топология” ИМИ-БАН, София, 9 Декември 2014 г.

3. G. Ganchev, K. Kanchev, “Surfaces of constant mean curvature isometric to a given one”, “International Workshop on Geometry of Riemannian and Hermitian Manifolds”, Sofia, December 7-10, 2015.

4. К. Кънчев, „Канонични Вайерщрасови представяния за минимални пространствено-подобни повърхнини в пространство на Минковски”, Годишна отчетна научна сесия на секция „Анализ, Геометрия и Топология” ИМИ-БАН, София, 6 Декември 2016 г.

5. G. Ganchev, K. Kanchev, “Canonical Weierstrass Representations for Minimal Surfaces in Four-dimensional Euclidean or Minkowski Space”, Second International Conference “Mathematics Days in Sofia”, Sofia, July 10-14, 2017.

Справка за Приносите в Дисертацията

1. Съществуване и единственост на канонични координати за минимална повърхнина в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_1$ при произволна размерност n.

2. Канонично представяне на Вайерщрас за минималните повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4$.

3. Формула за общото решение на системата естествени ЧДУ на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$.

4. Съответствие между минималните повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4$ и двойките минимални повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^3$.

5. Канонично представяне на Вайерщрас за минималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип в $\mathbb{R}^4_1$.

6. Формула за общото решение на системата естествени ЧДУ на минималните пространствено-подобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$.

Благодарности

Изказвам най-искрена благодарност към научния си консултант доц. д-р Георги Ганчев за това, че ме въведе в проблематиката на минималните повърхнини в Евклидовите и пространствата на Минковски, както и за ценните съвети и идеи по време на работата ми по настоящата дисертация.

Благодаря и на научния си консултант проф. д-р Огнян Касабов за ценните съвети, напътствия и всестранната помощ и подкрепа при разработката и оформянето на дисертационния труд.

Благодаря на ВТУ „Тодор Каблешков“ за финансовата подкрепа по време на работата ми по дисертацията.

Литература

[1] L. Alías and B. Palmer. Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorenzian space forms. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 124:315–327, 1998.

[2] A. Asperti and J. Vilhena. Spacelike surfaces in $\mathbb{L}^4$ with degenerate gauss map. *Results in Mathematics*, 60:185–211, 2011.

[3] B-Y. Chen. *Riemannian Geometry, δ - Invariants and Applications.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.

[4] C. Cosín and J. Monterde. Bézier surfaces of minimal area. *Proceedings of the Int. Conf. of Computational Science, ICCS'2002. In: Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2330:72–81, 2002.

[5] R. de Azevedo Tribuzy and I. Guadalupe. Minimal immersions of surfaces into 4-dimensional space forms. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova*, 73:1–13, 1985.

[6] M. de Montcheuil. Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. *Bulletin de la S. M. F.*, 33:170–171, 1905.

[7] M. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[8] L. Eisenhart. A fundamental parametric representation of space curves. *Annals of Mathematics, Second Series*, 13(1/4):17–35, 1911–1912.

[9] L. Eisenhart. Minimal surfaces in Euclidean four-space. *Amer. J. Math.*, 34:215–236, 1912.

[10] G. Ganchev. Canonical Weierstrass representation of minimal and maximal surfaces in the three-dimensional Minkowski space. *arxiv.org/abs/0802.2632*, 2008.

[11] G. Ganchev. Canonical Weierstrass representation of minimal surfaces in Euclidean space. *arXiv.org/abs/0802.2374*, 2008.

[12] G. Ganchev and K. Kanchev. Explicit solving of the system of natural PDE's of minimal surfaces in the four-dimensional Euclidean space. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 67(5):623–628, 2014.

[13] G. Ganchev and K. Kanchev. Explicit solving of the system of natural PDE's of minimal space-like surfaces in Minkowski space-time. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 70(6):761–768, 2017.

[14] G. Ganchev, K. Kanchev, and O. Kassabov. Transition to canonical principal parameters on maximal spacelike surfaces in Minkowski space. *Serdica Mathematical Journal*, 42:301–310, 2016.

[15] G. Ganchev and V. Mihova. On the invariant theory of Weingarten surfaces in Euclidean space. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43:405210–405236, 2010.

[16] G. Ganchev and V. Mihova. Space-like Weingarten surfaces in the three-dimensional Minkowski space and their natural partial differential equations. *Cent. Eur. J. Math.*, 11(1):133–148, 2013.

[17] G. Ganchev and V. Milousheva. Minimal surfaces in the four-dimensional Euclidean space. *arxiv.org/abs/0806.3334*, 2008.

[18] G. Ganchev and V. Milousheva. On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space. *Kodai Mathematical Journal*, 31:183–198, 2008.

[19] G. Ganchev and V. Milousheva. Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Central European Journal of Mathematics*, 8(6):993–1008, 2010.

[20] G. Ganchev and V. Milousheva. Invariants of lines on surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, 63(6):835–842, 2010.

[21] G. Ganchev and V. Milousheva. Timelike surfaces with zero mean curvature in Minkowski 4-space. *Israel Journal of Mathematics*, 196(1):413–433, 2013.

[22] A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica®*. Chapman & Hall/CRC, third edition, 2006.

[23] D. Hoffman and R. Osserman. The geometry of the generalized Gauss map. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 28(236), 1980.

[24] H. Hopf. Über flächen mit einer relation zwischen den hauptkrümmungen. *Math. Nachr.*, 4:232–249, 1951.

[25] T. Itoh. Minimal surfaces in 4-dimensional Riemannian manifolds of constant curvature. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 23:451–458, 1971.

[26] O. Kassabov. Transition to canonical principal parameters on minimal surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 31(7):441–450, 2014.

[27] T. Klotz and R. Osserman. Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature. *Comment. Math. Helv.*, 41:313–318, 1966-67.

[28] K. Kommerell. Riemannsche flächen im ebenen raum von vier dimensionen. *Math. Ann.*, 60:546–596, 1905.

[29] J. Little. On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 83(1):261–335, 1969.

[30] J. Nitsche. *Lectures on Minimal Surfaces*, volume 1. Cambridge University Press, 1989.

[31] A. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag London Limited, second edition, 2010.

[32] J. Schouten and D. Struik. *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, volume II. Groningen : P. Noordhoff, 1938.

[33] B. Smyth and G. Tinaglia. The number of constant mean curvature isometric immersions of a surface. *arXiv:0811.1231*, 2008.

[34] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume I–V. Publish or Perish, Inc., 1999.

[35] P. Wintgen. Sür l'inegalité de Chen-Willmore. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, 288:993–995, 1979.

[36] J. Wolf. Surfaces of constant mean curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(5):1103–1111, 1966.

[37] Y.-C. Wong. A new curvature theory for surfaces in a Euclidean 4-space. *Comm. Math. Helv.*, 26:152–170, 1952.