БАН – ИМИ

СВЕТЛАНА ТОДОРОВА ТОПАЛОВА

ДИСЕРТАЦИЯ

СОФИЯ — 1997

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Светлана Тодорова Топалова

КОНСТРУИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА КОМБИНАТОРНИ ДИЗАЙНИ СЪС ЗАДАДЕНИ АВТОМОРФИЗМИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научната и образователна степен "доктор"

Научен консултант: доц. д-р Стоян Капралов

София, 1997

Съдържание

Увод

Теорията на дизайните е един от най-динамично развиващите се дялове на съвременната комбинаторика. Дизайните не само представляват самостоятелен интерес като комбинаторни конфигурации, но са и тясно свързани с конструирането, изследването и използването на някои видове кодове и графи и намират широко приложение в статистическото планиране на експеримента.

Основите на теорията на дизайните са поставени в средата на миналия век от Kirkman [48] и Steiner [77]. Нейното систематично развитие започва през 40-те години на нашия век и е отразено в монографиите на Hall [32], Beth, Jungnickel и Lenz [17], Hughes и Piper [35], Street A. и Street D. [78], Тончев [7], [8], Cameron и van Lint [25], Assmus и Key [14], [15].

Нека $V = \{P_i\}_{i=1}^{v}$ е крайно множество от *точки*, а $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{b}$ – крайна фамилия от от k-елементни подмножества на V, наречени *блокове*. Казваме, че $D = (V, \mathcal{B})$ е *дизайн* с параметри t-(v,k,λ), ако всяко t-подмножество на V се съдържа точно в λ блока на $\mathcal{B}$.

Матрица на инцидентност на дизайна наричаме $(0,1)$ матрица с v реда и b стълба, в която елементът от i-ия ред и j-ия стълб е равен на 1, ако $P_i \in B_j$ $(i = 1, 2, ..., v,\ j = 1, 2, ..., b)$ и на 0 в противен случай. Дизайнът се определя напълно от своята матрица на инцидентност.

Два дизайна са *изоморфни*, ако съществува взаимно-еднозначно съответствие между точките и блоковете на единия дизайн и, съответно, точките и блоковете на другия, запазващо инцидентността, т.е. ако матрицата на инцидентност на единия се получава от матрицата на инцидентност на другия чрез разместване на редове и стълбове.

Най-изследвани, най-пълно класифицирани и най-често използвани досега са 2-(v,k,λ) дизайните, наричани още *балансирани непълни блок-дизайни* ($BIBDs$). Те са обект на изследване и в настоящата работа. Параметрите на 2-(v,k,λ) дизайн са свързани по следния начин:

$$\begin{gathered} r(k-1) = \lambda(v-1), \qquad bk = vr \\ v \le b \quad (\textit{Неравенство на Fisher}), \end{gathered} \tag{1}$$

където с r означаваме броя на блоковете, съдържащи дадена точка.

Има, обаче, множества от параметри, удовлетворяващи (1), за които не съществуват дизайни. Теорията на дизайните се занимава с решаването на проблемите за съществуването, изброяването и класификацията на дизайните с дадени параметри, както и с изследването на техните свойства и на връзките им с други комбинаторни конфигурации.

Едно от най-важните свойства на дизайните е разрешимостта. Дизайнът е *разрешим*, ако има поне една резолюция.

Резолюция наричаме разбиване на блоковете на дизайна на подмножества (*паралелни класове*), такива, че всяка точка се съдържа точно в един блок на всеки паралелен клас.

Разрешимостта е свързана с най-различни приложения. Така например, всяка резолюция на един 2-дизайн може да бъде разглеждана като нелинеен $(r, v, r-\lambda)$ код над $Z_{\frac{v}{k}}$. Bose [20] извежда следните необходими условия за разрешимост на балансирани непълни блок-дизайни:

$$k|v, \qquad b \geq v+r-1, \qquad \text{ако } b = v+r-1, \text{ то } v|k^2. \tag{2}$$

Интерес представлява и двойната разрешимост. Един 2-(v,k,λ) дизайн е *двойно-разрешим*, ако притежава две резолюции, такива че всяка двойка паралелни класове, единия от едната, а другия от другата резолюция, имат най-много един общ блок.

Естествено е възникнала необходимостта от периодично събиране и публикуване на резултатите за дизайни, получени от различни автори и публикувани в различни списания. Ето защо голяма роля за по-нататъшното развитие на теорията на дизайните имат обзорите и таблиците на Fisher и Yates [30], Takeushi [80], Kageyama [40], Hall [32], Hanani [34], Beth, Jungnickel и Lenz [17]. Най-актуална и пълна информация за състоянието на тези изследвания може да се намери в поредното издание на таблиците на Mathon и Rosa [59], [60], които обхващат 2-дизайните с допустими от (1) параметри и с $r \leq 41$. Включена е обширна библиография и кратки сведения за използваните методи. Тук ще се спрем на най-важните от тях.

С използването едновременно на комбинаторни и геометрични съображения е решен напълно въпросът за съществуването на 2-(v,k,λ) дизайни с $k < 6$, конструирани са безкрайни серии от дизайни с параметри, отговарящи на дадени условия [11], [22], [24], [28], [63], [66], [70], [71], [94] и е доказано несъществуването на някои дизайни [50].

Несъществуването на много дизайни е доказано с помощта на теоремата на Bruck-Ryser-Chowla [23], [27], която дава необходимо условие за съществуване на симетрични (броят на точките е равен на броя на блоковете) дизайни. Формулировката и доказателството ѝ могат да бъдат намерени във всяка от споменатите по-горе монографии. Там са описани и различните аспекти на връзката между дизайните и крайните проективни и афинни геометрии, матриците на Адамар, разностните множества и силно регулярните графи.

Всеки 2-(v,k,λ) дизайн обуславя съществуването на 2-$(v,k,m\lambda)$ дизайни за всяко цяло $m > 1$. Дизайни с такива параметри се наричат *ква-*

зикратни на 2-(v,k,λ) дизайн. Един квазикратен дизайн е *разложим* до m 2-(v,k,λ) дизайни, ако съществува разбиване на блоковете му на m подмножества, всяко от които е 2-(v,k,λ) дизайн. Jungnickel [37], [38], [39] извежда формули за пресмятане на долна граница за броя неизоморфни кратни на някои типове дизайни.

За параметри, при които е доказано, че съществуват дизайни, в таблиците на Mathon и Rosa [60] са дадени броят на построените неизоморфни дизайни и броят на неизоморфните резолюции (при разрешими дизайни). С нарастването на параметрите задачата за пълната класификация на неизоморфните дизайни става необхватна. Затова често пъти се прави класификация само на някаква част от дизайните, примерно на тези, които притежават дадени групи от автоморфизми (т.е. допълнителна симетрия).

Автоморфизъм наричаме всеки изоморфизъм на дизайна със себе си, т.е. пермутация на точките, при която блоковете преминават в блокове. Множеството от всички автоморфизми на дизайна образува група по отношение на операцията композиция на изображения. Наричаме я *пълна група от автоморфизми*. Всяка нейна подгрупа наричаме група от автоморфизми на дизайна.

Теоретичните резултати относно връзката между дизайните и техните групи от автоморфизми са резюмирани в обзора на Camina [26].

Съществуват два принципно различни метода за конструиране на дизайни с предварително зададени автоморфизми. Първият се нарича *глобален подход*, а вторият - *локален подход* [8].

Същността на глобалния подход се състои в следното: отначало се намират орбитите, на които дадена група от пермутации разбива множеството от всички k-елементни подмножества на едно v-елементно множество, след това се проверява кои множества от няколко орбити образуват дизайн. По този начин могат да бъдат конструирани дизайни със зададени v и k и различни стойности на λ. Глобалният подход е в основата на повечето класически методи за построяване на дизайни с помощта на групи. Примери за използването му са разгледани в [5], [6], [12], [19], [31], [81].

Локалният подход се използва за построяване на всички дизайни с фиксирани параметри, които имат предварително зададени автоморфизми. Той е разработен за пръв път в [13]. Неразривно свързано с този метод е понятието *орбитна матрица*.

Нека D е дизайн с група от автоморфизми G. Да означим с O_1, O_2, ..., O_m точковите и с O'_1, O'_2, ..., O'_n блоковите орбити спрямо G. *Орбитна* *матрица* на дизайна спрямо тази група от автоморфизми наричаме матрица $\mathcal{M} = (m_{ij})_{m\times n}$, където m_{ij} е броя на точките от O_i, съдържащи се в кой да е блок от O'_j $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$.

При локалния подход намирането на дизайните с дадена група от автоморфизми се предхожда от построяване на съответните орбитни матрици. Някои работи, в които е използван този метод са: [1], [2], [3], [4], [36], [41], [42], [44], [47], [49], [51], [55], [56], [57], [61], [62], [72], [73], [75], [82], [83], [84], [85], [86], [93], [95]. Въпреки, че толкова много автори разработват алгоритми за реализиране на локалния подход, нерешените задачи са много. Конструирането на дизайните става с помощта на алгоритъм за изчерпващо търсене с връщане и времето, необходимо за това, бързо нараства с нарастването на параметрите. Понякога между получените решения има хиляди изоморфни. Те трябва да бъдат отделени, а пълният тест за изоморфизъм е твърде бавен. Ето защо решаването на такива задачи става с подход, специфичен за всеки конкретен случай и често пъти усилията да се намерят дизайните с дадени параметри и автоморфизми могат да останат безплодни.

В настоящата работа локалният подход е използван за класификация на дизайни със зададени параметри и автоморфизми и за изследване на групата от автоморфизми на дизайни, чието съществуване е под въпрос.

Локалният подход като метод е добре известен и широко прилаган, но в литературата рядко могат да бъдат намерени подробности относно конкретната му компютърна реализация. Обикновено думите *"с компютър беше установено, че ..."* скриват най-съществената част от извършената работа. Най-много информация в това отношение съдържат някои работи на Капралов [1], [4] и някои на Spense [74], [76]. С помощта на локалния подход са получени много значими резултати от българските математици В. Тончев, С. Капралов, И. Ланджев. Съвместната работа с тях позволи на автора да навлезе сравнително бързо в тематиката и да разгледа нови интересни случаи. Разбира се, тук са включени само успешно решените с разработената техника задачи. Има не малко параметри, за които, въпреки всичките усилия за увеличаване на бързината на пресмятанията с използване спецификата на конкретния дизайн, не беше възможно да се направи класификация за разумно време. Използван е персонален компютър $486DX2-66MHz$, а програмите са написани на $C++$.

При резултати, получени с компютър, винаги се поставя въпросът за достоверността на изчисленията, особено когато се прави класификация. Построените дизайни са факт, но дали няма пропуснати или пък неоткрити изоморфни между тях, дали може да се вярва на пресметнатия ред на пълната група от автоморфизми, на резултатите за разрешимост и разложимост и т.н.? За да бъдем по-сигурни в направените изчисления, всички разработени програми са тествани многократно на известни вече резултати. Много полезно в това отношение се оказа и сравнението с някои програми на Капралов, които той изцяло предостави на даден етап от работата. Те са написани на *Pascal* и в повечето случаи се различават не само в програмната реализация, но и в основната идея на алгоритъма. Ето защо при съвместните ни работи [45], [46], в които част от резултатите са получени едновременно по различни начини и с различни програми, вероятността за грешка в пресмятанията е доста по-малка.

Дисертацията съдържа увод и 7 глави.

В Глава 1 е разяснено на какво се основава локалният подход като метод за конструиране на дизайни с предварително зададени автоморфизми. Дефинирани са използваните в дисертацията понятия и означения.

В Глава 2 са описани разработените алгоритми за конструиране на дизайни, за отделяне на неизоморфните решения, за пресмятане реда на пълната група от автоморфизми, за намиране на неизоморфните резолюции (ако такива съществуват) и за определяне на евентуалната разложимост на един дизайн. Обърнато е внимание на особеностите при прилагането им в различните случаи.

В Глава 3 са разгледани 2-(21,5,2), 2-(25,5,2) и 2-(51,6,2) дизайни, които са квазикратни съответно на 2-(21,5,1), 2-(25,5,1) и 2-(51,6,1) дизайни. Съществуват точно един 2-(21,5,1) (проективната равнина от ред 4) и точно един 2-(25,5,1) (афинната равнина от ред 5) дизайни. Чрез конструкциите на Jungnickel [38] от тях могат да бъдат построени съответно най-малко десет 2-(21,5,2) и най-малко двадесет и осем 2-(25,5,2) дизайни. По други начини такива дизайни не бяха намирани.

Целта на изследването е да бъде направена класификация на някои квазикратни дизайни със зададени автоморфизми, да се определи каква част от тях са кратни на два дизайна и дали има неразложими дизайни, които представляват особен интерес със своите свойства (резолюции, групи от автоморфизми и др.).

В Раздел 3.1 е доказано, че един 2-(21,5,2) дизайн не може да притежава автоморфизъм от прост ред, различен от 2, 3, 5 или 7. Разгледани са всички възможни автоморфизми от нечетен прост ред, т.е.

- автоморфизъм от ред 7 без фиксирани точки и блокове,
- автоморфизъм от ред 5 с 1 фиксирана точка и 2 фиксирани блока,

o автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и блокове,

o автоморфизъм от ред 3 с 3 фиксирани точки и 6 фиксирани блока,

o автоморфизъм от ред 3 с 6 фиксирани точки и 12 фиксирани блока.

Оказа се, че всички 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизми от ред 7, 5 или 3 са 22998 на брой като 4170 от тях са разложими до два 2-(21,5,1) дизайна. Намерен е редът на пълната група от автоморфизми на всеки дизайн и, изобщо, на всички построени в дисертационния труд дизайни.

Раздел 3.2 е посветен на 2-(25,5,2) дизайни. Доказано е, че 5 е най-големият възможен прост делител на реда на групата от автоморфизми на 2-(25,5,2) дизайн и са разгледани всичките пет възможности за автоморфизъм от ред 5:

o без фиксирани точки и блокове,

o без фиксирани точки и с 5 фиксирани блока,

o без фиксирани точки и с 10 фиксирани блока,

o с 5 фиксирани точки и 5 фиксирани блока,

o с 5 фиксирани точки и 10 фиксирани блока.

Конструираните дизайни с параметри 2-(25,5,2) и автоморфизъм от ред 5 са 118884. Само 688 от тях са разложими до два 2-(25,5,1) дизайна. Всички разложими дизайни са разрешими, защото на афинната равнина винаги съответствува разрешим дизайн, но има и дизайни, които са разрешими, без да са разложими. Общият брой на разрешимите дизайни е 711 със 748 неизоморфни резолюции. Всяка от тях може да бъде разглеждана като нелинеен (12,25,10) код над $GF(5)$.

За параметрите, разгледани в раздели 3.1 и 3.2 се оказва, че по предложените от Jungnickel начини се получават само една съвсем малка част от разложимите дизайни. Може би тези конкретни резултати могат да бъдат използвани за евентуалното разширяване на списъка от конструкции, които той предлага. Освен това прави впечатление, че разложимите дизайни, от своя страна, са много по-малко от неразложимите.

В Раздел 3.3 са изследвани 2-(51,6,2) дизайни. Особеното при тях е, че са квазикратни на 2-(51,6,1) дизайн, чието съществуване е под въпрос.

Въпросът за съществуването на 2-(v,k,λ) дизайни с $k < 6$ е решен от Hanani [34]. Той доказва, че необходимите условия (1) за съществуване на 2-(v,k,λ) дизайн са и достатъчни при $k = 3$ и $k = 4$, при $k = 5$ с изключение на случая $(v,\lambda) = (15,2)$ и при $k = 6, \lambda > 1$.

Mills [64] показва, че необходимите условия (1) за съществуване на 2-$(v,6,1)$ дизайн са и достатъчни за $v > 11151$. Нови 2-$(v,6,1)$ дизайни са конструирани от Mullin, Hoffman и Linder [69], Zhu, Du и Yin [98], Abel [10], Mullin [68], Mills [65], Abel и Mills [11]. В резултат на тези изследвания остават 55 стойности на v, за които не е установено дали съществува 2-$(v,6,1)$ дизайн. Най-малките са 46, 51, 61, 81.

Šiftar [79] показва, че евентуален 2-(51,6,1) дизайн не притежава автоморфизми от прост ред, различен от 2, 3 или 5. Но не е невъзможно 2-(51,6,2) дизайн, който притежава автоморфизъм от ред 51, да се окаже разложим до два 2-(51,6,1) дизайна, които не притежават такъв автоморфизъм. Целта на този раздел е не само да бъде направена класификация на 2-(51,6,2) дизайните със зададен автоморфизъм, но и да се провери дали с тяхна помощ не може да се построи 2-(51,6,1) дизайн.

Известен беше един 2-(51,6,2) дизайн, конструиран от Hanani [34]. Неговата пълна група от автоморфизми е от ред 50. В настоящата работа са построени 2-(51,6,2) дизайните, инвариантни относно цикличната група от ред 51. Разглежданията са направени при предположение, че дизайнът има автоморфизъм от ред 17 без фиксирани точки и блокове и автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 17 фиксирани блока. По този начин са конструирани 446 неизоморфни дизайни. За съжаление нито един от намерените 2-(51,6,2) дизайни не е разложим до два 2-(51,6,1) дизайна и въпросът за съществуването на 2-(51,6,1) дизайн засега остава без отговор.

Предмет на изследване в Глава 4 са симетричните 2-(61,16,4) дизайни и техните остатъчни 2-(45,12,4) дизайни. Резултатите в тази глава са получени съвместно с Ланджев.

Симетричните дизайни представляват особен интерес. Те напълно оправдават името си, притежавайки някои уникални свойства: при тях $v = b$ (т.е. неравенството на Fisher (1) се превръща в равенство), $k = r$ и транспонираната матрица на инцидентност е матрица на инцидентност на дизайн със същите параметри, наречен *дуален* на дадения. Ако един симетричен дизайн е изоморфен на дуалния си, той се нарича *самодуален*. Ако от симетричен 2-(v,k,λ) дизайн премахнем един блок и точките, които той съдържа, се получава 2-$(v-k,k-\lambda,\lambda)$ дизайн, наречен *остатъчен*.

Преди нашето изследване бяха известни два дуални един на друг 2-(61,16,4) дизайна, конструирани в рамките на безкрайна серия [66]. Знаеше се, че съществува поне един 2-(45,12,4) дизайн. Самодуален 2-(61,16,4) дизайн не беше известен.

Разглеждането започва с доказателство, че възможните прости делители на реда на групата от автоморфизми на 2-(61,16,4) дизайн са 2, 3 и 5. Освен това автоморфизъм от ред 5 фиксира точно една точка и един блок.

Спрямо този автоморфизъм бяха намерени 1514 нееквивалентни орбитни матрици, като всяка една от тях е нееквивалентна и с транспонираната на всяка от останалите. При заместване на елементите им със симетрични циркуланти се оказа, че само една от матриците води до дизайни. Така са построени всички неизоморфни симетрични 2-(61,16,4) дизайни, които са инвариантни относно диедралната група от ред 10. Те всички са нови, защото редът на пълната група от автоморфизми на построените в [66] дизайни е 9. Броят на конструираните от нас дизайни е само 5 (един самодуален и две двойки дуални дизайни) и това не е учудващо, понеже симетричните дизайни са обикновено сравнително малко на брой. Изследвани са и техните 25 остатъчни 2-(45,12,4) дизайни. От матрицата на инцидентност на 2-(45,12,4) се получава пораждаща матрица на линеен двоичен самоортогонален код с дължина 60 и размерност $k \leq 30$. За съжаление, на намерените от нас остатъчни дизайни съответстват кодове с размерност $k < 30$, а по-специален интерес представляват кодовете с $k = 30$ и минимално разстояние $d = 12$.

В Глава 5 са представени резултатите за 2-(21,6,3) дизайни с автоморфизми от ред 7 или 5. Те са получени съвместно с Капралов. Преди настоящата работа беше известен само един такъв дизайн, конструиран от Hall [32] с помощта на две циркуланти от ред 21. В Раздел 5.1 е доказано, че 2-(21,6,3) дизайн не може да има автоморфизми от прост ред по-голям от 7 и, че автоморфизъм от ред 7 е без фиксирани точки и блокове, а автоморфизъм от ред 5 фиксира една точка и два блока. Построени са 236 неизоморфни дизайни. Сред тях няма дизайни, които да притежават едновременно автоморфизми от ред 5 и от ред 7.

Едни от най-често изучаваните и използвани са t-$(v,k,1)$ дизайните, наричани още *Щайнерови системи*, а при $t = 2$ – *Щайнерови системи* от k-орки от ред v. Ако са разрешими, резолюциите им се наричат *Киркманови системи* от k-орки от ред v. Щайнерови системи от тройки от ред v ($STS(v)$)съществуват за всяко $v > 3$, такова, че $6 \mid v(v-1)$ [34], а от ред по-малък от 19 са напълно класифицирани.

В Глава 6 са разгледани Щайнерови системи от тройки от ред 21. Wilson [97] показва още през 1974 година, че неизоморфните 2-(21,3,1) дизайни са поне 2160980. В неговото доказателство е даден и начинът на конструиране, но поради големия брой на решенията, които се получават, все още не са правени опити за класификацията им. Изследвани са само няколко сравнително по-малки класа. Mathon, Phelps и Rosa [56] построяват всички (оказали се 95 на брой) Щайнерови системи от тройки от ред

21 с автоморфизъм от ред 7 без фиксирани точки, Тончев [85] – тези с автоморфизъм от ред 7 със 7 фиксирани точки (6 на брой) и Mathon и Rosa [57] – с автоморфизъм от ред 5 (1772 дизайна). В тези публикации, изчерпващи всички възможни автоморфизми от ред 7 или 5, са построени 84 Киркманови системи от тройки от ред 21. Не е намерен нито един двойно-разрешим 2-(21,3,1) дизайн.

В настоящата работа са конструирани всички Щайнерови системи от тройки от ред 21 с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока. Изследването е направено съвместно с Капралов. Построени са 183 неизоморфни дизайни, сред които 7 имат автоморфизми от ред 7 или 5. Сред останалите 176 има 59 разрешими дизайни. От тях се получават 131 неизоморфни Киркманови системи от тройки от ред 21. Нито един от изследваните дизайни не е двойно-разрешим.

Глава 7 е посветена на дизайни, чието съществуване е под въпрос. Според таблиците на Mathon и Rosa [60] все още не са известни дизайни с параметри 2-(40,10,3).

Квазиостатъчен дизайн наричаме 2-(v,k,λ) дизайн, за който $r = k + \lambda$. Дизайни с такива параметри могат да бъдат получени като остатъчни на симетричен 2-$(v + k, k + \lambda, \lambda)$ дизайн, но обратното не е задължително - не всеки квазиостатъчен дизайн е вложим в симетричен.

Дизайните с параметри 2-(40,10,3) са интересни с това, че са квазиостатъчни на несъществуващия според теоремата на Bruck-Ryser-Chowla 2-(53,13,3) дизайн. За квазиостатъчните дизайни е доказано, че винаги са вложими в симетрични дизайни ако $\lambda = 1, 2$ [33] и ако $\lambda > 2$ и $k > f(\lambda)$, където $f(\lambda)$ е дадена функция [21]. Но $f(3) = 76$ и съществуването на квазиостатъчен 2-(40,10,3) не е изключено.

Капралов [43] доказва, че 5, 3 и 2 са единствените възможни прости делители на реда на групата от автоморфизми на евентуален 2-(40,10,3) дизайн.

В Глава 7 е доказано, че автоморфизъм от ред 5 на 2-(40,10,3) дизайн е без фиксирани точки и с два фиксирани блока. Спрямо него са намерени 54 орбитни матрици, но след заместване на елементите им с циркуланти се оказа, че нито една от тях не води до дизайн. Следователно 2-(40,10,3) дизайни с автоморфизми от ред 5 не съществуват.

Включените в дисертацията резултати са публикувани или представени за публикуване в [9], [45], [46], [52], [87], [88], [89], [90], [91], [92] . Докладвани са на Националния симинар по теория на кодирането, 1995, 1996, на Международните семинари по Алгебрична и комбинаторна теория на кодирането, В.Вода 1992, Новгород 1994, Созопол 1996, на Пролетните конференции на СМБ 1995, 1996, 1997, пред Семинара по комбинаторика към Института по математика – Будапеща, 1996 и на семинари на секция Математически основи на информатиката при Института по математика и информатика – БАН.

Твърде много са тези, на които бих искала да благодаря. Изключително приятно е да се работи в силна група, каквато е групата от български специалисти, занимаващи се в областта на комбинаториката и алгебричната теория на кодирането. Благодаря на научния ми консултант доц. д-р Стоян Капралов за това, че ме въведе в тази тематика, за оказаната помощ и за вниманието и критичността, с които се отнася към работата ми. Благодаря на проф. д.м.н. Владимир Тончев и на ст.н.с. д-р Иван Ланджев за отзивчивостта, с която ми отговаряха и помагаха всеки път, когато съм се допитвала до някой от тях. Благодаря на проф. д.м.н. Стефан Додунеков и на ст.н.с. д-р Николай Манев за усилията им да бъде предоставена възможност за пълноценна творческа работа на специалистите от Лабораторията по приложение на математиката и информатиката във В.Търново. Благодаря на всички колеги, с които ме срещна Семинарът по теория на кодирането, за интереса към моята работа и за уместните забележки и съвети.

Глава 1

Предварителни резултати и означения

Целта на тази глава е от една страна да запознае читателя със същността на локалния подход и начина, по който той е приложен в настоящата работа, а от друга – с необходимите понятия и означения. За да не се утежнява изложението, те са използвани без допълнителни пояснения в останалите глави само в посочения по-долу смисъл. Така, например, векторите u и z са използвани десетки пъти със значението, с което са въведени в настоящата глава. Освен това само тук е обяснен и начинът, по който намерените дизайни са представени в таблиците.

1.1 Дефиниции

Нека $V = \{P_i\}_{i=1}^{v}$ е крайно множество от *точки*, а $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{b}$ – крайна фамилия от от k-елементни подмножества на V, наречени *блокове*. Казваме, че $D = (V,\mathcal{B})$ е *дизайн* с параметри t-(v,k,λ), ако всяко t-подмножество на V се съдържа точно в λ блока на $\mathcal{B}$.

Матрица на инцидентност на дизайна наричаме $(0,1)$ матрица с v реда и b стълба, в която елементът от i-ия ред и j-ия стълб е равен на 1, ако $P_i \in B_j$ $(i = 1,2,...,v,\ j = 1,2,...,b)$ и на 0 в противен случай. Дизайнът се определя напълно от своята матрица на инцидентност.

Един дизайн се нарича *симетричен*, ако за него неравенството на Fisher (1.3.2) се превръща в равенство, т.е. броят на точките е равен на броя на блоковете му $(v = b)$. При симетричен дизайн $k = r$ и всеки два блока имат точно λ общи точки. Транспонираната на неговата матрица на инцидентност е матрица на инцидентност на дизайн със същите параметри, наречен *дуален* на дадения. Ако един симетричен дизайн е изоморфен на дуалния си, той се нарича *самодуален*.

Ако от симетричен 2-(v,k,λ) дизайн премахнем един блок и точките, които той съдържа, се получава 2-$(v-k,k-\lambda,\lambda)$ дизайн, наречен *остатъчен*.

Квазиостатъчен дизайн наричаме 2-(v,k,λ) дизайн, за който $r = k + \lambda$.

Под *Щайнерова система* $S(t,k,v)$ разбираме t-$(v,k,1)$ дизайн, а *под Щайнерова система от k-орки от ред v* – 2-$(v,k,1)$ дизайн. Ако последният е разрешим, резолюциите се наричат *Киркманови системи от k-орки от ред v*. Щайнеровите системи от тройки от ред v се означават $STS(v)$, а Киркмановите – $KTS(v)$.

Два дизайна са *изоморфни*, ако съществува взаимно-еднозначно съответствие между точките и блоковете на единия дизайн и, съответно, точките и блоковете на другия, запазващо инцидентността, т.е. ако матрицата на инцидентност на единия се получава от матрицата на инцидентност на другия чрез разместване на редове и стълбове.

Автоморфизъм наричаме всеки изоморфизъм на дизайна със себе си, т.е. пермутация на точките, при която блоковете преминават в блокове. Множеството от всички автоморфизми на дизайна образува група по отношение на операцията композиция на изображения. Наричаме я *пълна група от автоморфизми*. Всяка нейна подгрупа наричаме група от автоморфизми на дизайна.

Паралелен клас се нарича множество от блокове на дизайна, такова че всяка точка се съдържа точно в един блок. *Резолюция* наричаме всяко разбиване на блоковете на дизайна на паралелни класове. Един дизайн е *разрешим*, ако има поне една резолюция.

Две резолюции на дизайна D са *изоморфни*, ако съществува автоморфизъм на D, който трансформира всеки паралелен клас на едната резолюция в паралелен клас на другата.

Един 2-(v,k,λ) дизайн е *двойно-разрешим*, ако притежава две резолюции, такива че всяка двойка паралелни класове, единия от едната, а другия от другата резолюция, имат най-много един общ блок.

Квазикратен на 2-(v,k,λ) дизайн наричаме дизайн с параметри 2-$(v,k,m\lambda)$, където m е цяло число, по-голямо от единица. Един квазикратен дизайн е *разложим* до m дизайни с параметри 2-(v,k,λ), ако съществува разбиване на блоковете му на m подмножества, всяко от които е 2-(v,k,λ) дизайн.

Квадратната матрица $C = (c_{ij})_{p\times p}$ наричаме *циркуланта (циркулантна матрица) от ред* p, ако $c_{i+1,j+1} = c_{ij}$, където $i,j = 0,1,\ldots,p-1$ и действията в индексите са по модул p.

Нека D е дизайн с група от автоморфизми G. Да означим с O_1, O_2,

..., O_m точковите и с $O'_1, O'_2, ..., O'_n$ блоковите орбити спрямо G. *Орбитна матрица* на дизайна спрямо тази група от автоморфизми наричаме матрица $\mathcal{M} = (m_{ij})_{m \times n}$, където m_{ij} е броя на точките от O_i, съдържащи се в кой да е блок от O'_j $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$.

Нетривиална точкова (блокова) орбита спрямо даден автоморфизъм на дизайна наричаме точкова (блокова) орбита, съдържаща повече от една точка (блок).

За удобство в настоящата работа ще използваме и две означения, които не са общоприети:

Нека D е дизайн с група от автоморфизми G. Да означим с O_1, O_2, ..., $O_{m'}$ нетривиалните точкови и с $O'_1, O'_2, ..., O'_{n'}$ – нетривиалните блокови орбити спрямо G. *Съкратена орбитна матрица* на дизайна спрямо тази група от автоморфизми наричаме матрица $M = (m_{ij})_{m' \times n'}$, където m_{ij} е броя на точките от O_i, съдържащи се в кой да е блок от O'_j $(i = 1, 2, ..., m',\ j = 1, 2, ..., n')$.

Съкратена матрица на инцидентност на дизайна спрямо дадена група от автоморфизми наричаме матрицата, която се получава като премахнем от матрицата на инцидентност редовете и стълбовете, съответствуващи на фиксираните точки и блокове.

1.2 Означения

Традиционно с буквите v, k, λ, b и r означаваме параметрите на разглеждания дизайн, т.е. v е броя на точките на дизайна, k – броя на точките, съдържащи се в произволен блок, λ – броя на блоковете, съдържащи дадена двойка точки, b – броя на блоковете и r – броя на блоковете, съдържащи дадена точка. Самия 2-(v,k,λ) дизайн обикновено ще означаваме с D.

На множеството от точките на дизайна съпоставяме множеството от естествените числа от 1 до v, а на множеството от блоковете – това на естествените числа от 1 до b, т.е. говорим за i-тата точка и j-я блок или за точка с номер i и блок с номер j, $i = 1, 2, ..., v$, $j = 1, 2, ..., b$. Ясно е, че i-та точка съответствува на i-я ред от матрицата на инцидентност на дизайна, а j-ят блок – на j-я ѝ стълб.

С α означаваме автоморфизъм от прост ред, спрямо който намираме орбитните матрици, а с p – реда на този автоморфизъм. С f бележим броя на фиксираните от α точки, а с h – броя на фиксираните блокове.

На точковите орбити съпоставяме номерата 1, 2, ..., $\frac{v-f}{p}+f$. Във всеки от разгледаните конкретни случаи за удобство и без ограничение на общността ще считаме, че са фиксирани точките и блоковете с най-големите номера.

За векторите с размерност p, състоящи се от p нули или от p единици, ще използваме следните означения: $u = \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{p}$ и $z = \underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{p}$.

Навсякъде в дисертацията, където разглеждаме дизайн с автоморфизъм от прост ред p, означаваме с A съкратената матрица на инцидентност, а с M – съкратената орбитна матрица спрямо този автоморфизъм.

1.3 Необходими условия за съществуване на 2-(v,k,λ) дизайн

Твърденията от този раздел и техните доказателства могат да бъдат намерени във всяка монография, посветена на комбинаторните дизайни, например [7], [8], [17], [32], [35], .

Теорема 1.3.1 *Параметрите на всеки 2-(v,k,λ) дизайн са свързани с равенствата:*

$$vr = bk,$$
$$bk(k-1) = v(v-1)\lambda.$$

Теорема 1.3.2 [29] *(Неравенство на Fisher) За всеки 2-(v,k,λ) дизайн с $k < v$ е в сила:*

$$v \leq b.$$

Теорема 1.3.3 [54] *(Неравенство на Mann) Ако съществува 2-(v,k,λ) дизайн с $k < v$, съдържащ s еднакви блока, то:*

$$s.v \leq b.$$

Теорема 1.3.4 [23], [27] *(Теорема на Bruck-Ryser-Chowla)* [23], [27] *За симетричен 2-(v,k,λ) дизайн е в сила:*

∘ *Ако v е четно, то $k-\lambda$ е точен квадрат.*

∘ *Ако v е нечетно, то съществуват цели числа x, y, z, не всичките равни на 0, които са решение на уравнението $x^2 = (k-\lambda)y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda z^2$.*

1.4 Същност на локалния подход

В този раздел ще се спрем на основните твърдения, използувани при построяването на дизайни с помощта на локалния подход и ще обясним самия метод.

1.4.1 Определяне на възможните автоморфизми на 2-(v,k,λ) дизайн

За да приложим локалния подход за конструиране на 2-(v,k,λ) дизайни, трябва първо да изясним какви автоморфизми могат да притежават дизайните с такива параметри. При тези разглеждания често се използват някои от следните три теореми.

Теорема 1.4.1.1 [8] *Ако p е прост делител на реда на групата от автоморфизми на 2-(v,k,λ) дизайн, то $p \leq r$ или $p|v$.*

Доказателство. Нека $p > r$ и p не дели v. Щом p не дели v, то автоморфизмът има фиксирани точки. Понеже $p > r \geq k$ всички фиксирани точки се съдържат само във фиксирани блокове и всички фиксирани блокове се състоят само от фиксирани точки, формирайки 2-(v,k,λ) дизайн, т.е. всички точки и блокове са фиксирани, а това е невъзможно. $\diamondsuit$

Теорема 1.4.1.2 [8] *Нека α е автоморфизъм от прост ред p на 2-(v,k,λ) дизайн D и $p > max(k,\lambda)$). Нека α фиксира f точки. Тогава $f = 0$ или $f = 1$ или $k \leq f \leq \dfrac{v-1}{k-1}$.*

Доказателство. Нека α фиксира f точки и h блока.

Нека $f > 1$. Тогава и $h > 0$. Фиксираният блок е обединение на орбити и тъй като $p > k$, фиксираните блокове съдържат само фиксирани точки, а всеки блок се състои от k точки. Следователно фиксираните точки са поне k.

От това, че $p > \lambda$ следва, че нефиксиран блок съдържа най-много една фиксирана точка. Понеже всяка двойка фиксирани точки се съдържа в λ блока, фиксираните блокове образуват 2-(f,k,λ) дизайн. Всяка точка на последния се съдържа в $\dfrac{(f-1)\lambda}{k-1}$ блока. Следователно всяка фиксирана точка на D е в $r - \dfrac{(f-1)\lambda}{k-1}$ нефиксирани блока. Така получаваме: $f\left(r - \dfrac{(f-1)\lambda}{k-1}\right) \leq b - h$. Това неравенство решаваме като използваме, че според Теорема 1.3.1 $h = \dfrac{f(f-1)\lambda}{k(k-1)}$ и $b = \dfrac{v(v-1)\lambda}{k(k-1)}$. В резултат се получава, че $f \le \dfrac{v-1}{k-1}$. $\Diamond$

Теорема 1.4.1.3 [17] *Всеки автоморфизъм на симетричен 2-(v,k,λ) дизайн фиксира равен брой точки и блокове.*

1.4.2 Матрица на инцидентност и орбитна матрица на дизайн спрямо автоморфизъм от прост ред

Локалният подход като метод се базира на факта, че за матрицата на инцидентност на дизайн с автоморфизъм от прост ред съществува специфично представяне с помощта на циркуланти. На него и на връзката му с орбитната матрица ще се спрем в този раздел.

Нека D е 2-(v,k,λ) дизайн, който притежава автоморфизъм α от прост ред p, фиксиращ f точки и h блока. Без ограничение на общността считаме, че α действа по следния начин:

върху точките:

$(1,2,...,p)(p+1,p+2,...,2p)...(v-f-p+1,v-f-p+2,...,v-f)(v-f+1)(v-f+2)...(v)$

върху блоковете:

$(1,2,...,p)(p+1,p+2,...,2p)...(b-h-p+1,b-h-p+2,...,b-h)(b-h+1)(b-h+2)...(b)$

Тогава матрицата на инцидентност на D можем да представим с помощта на четири подматрици:

$$\begin{pmatrix} A & H \\ F & C \end{pmatrix}$$

A е матрица от $\dfrac{v-f}{p}$ реда и $\dfrac{b-h}{p}$ стълба, чиито елементи $a_{i,j}$ ($i = 1, 2, \ldots, \dfrac{v-f}{p}$, $j = 1, 2, \ldots, \dfrac{b-h}{p}$) са циркулантни матрици от ред p, т.е. $A = (a_{ij})_{\frac{v-f}{p} \times \frac{b-h}{p}}$. Ясно е, че A съвпада със съкратената матрица на инцидентност на D.

H е матрица от $\dfrac{v-f}{p}$ реда и h стълба, чиито елементи са вектор-стълбове с размерност p, състоящи се или от p нули или от p единици, т.е. от z^t или u^t.

F е матрица от f реда и $\dfrac{b-h}{p}$ стълба с елементи z или u.

C е двоична матрица.

Ще означим съкратената орбитна матрица с $M = (m_{ij})_{\frac{v-f}{p} \times \frac{b-h}{p}}$, където m_{ij} е броя на единиците във всеки ред или стълб на a_{ij}.

Нека $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$ са целочислени матрици с размери като тези на H и F съответно. Всеки елемент на $\mathcal{H}$ е равен на p ако съответния елемент на H е равен на u^t и на нула ако е равен на z^t. Елемент на $\mathcal{F}$ е равен на 1 ако съответния елемент на F е равен на u и на нула ако е равен на z. Тогава за орбитната матрица на D спрямо α получаваме:

$$\begin{pmatrix} M & \mathcal{H} \\ \mathcal{F} & C \end{pmatrix}$$

Нека означим с h_{ij} и f_{ij} съответно елементите на i-я ред и j-я стълб на матриците $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$, където i и j варират съобразно размерите на матрицата.

Зависимостите, които са в сила за елементите на орбитната матрица, играят важна роля при локалния подход. Те са отразени в следващата теорема.

Теорема 1.4.2.1 *Нека един дизайн притежава автоморфизъм от прост ред p с f фиксирани точки и h фиксирани блока. Всяка орбитна матрица на дизайна спрямо този автоморфизъм може да представим чрез четири подматрици:*

$$\begin{pmatrix} M & \mathcal{H} \\ \mathcal{F} & C \end{pmatrix},$$

където $M = (m_{ij})_{\frac{v-f}{p} \times \frac{b-h}{p}}$ *е съкратената орбитна матрица,* $m_{ij} = 0, 1, ..., p$, $\mathcal{H} = (h_{ij})_{\frac{v-f}{p} \times h}$, $h_{ij} = 0, p$, $\quad \mathcal{F} = (f_{ij})_{f \times \frac{b-h}{p}}$, $f_{ij} = 0, 1$.

Тогава

$$\sum_{j=1}^{\frac{b-h}{p}} m_{ij} \quad + \quad \sum_{j=1}^{h} \frac{h_{ij}}{p} = r, \qquad i = 1, 2, ..., \frac{v-f}{p}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{v-f}{p}} m_{ij} \quad + \quad \sum_{i=1}^{f} f_{ij} = k, \qquad j = 1, 2, ..., \frac{b-h}{p}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{b-h}{p}} m_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{h} h_{ij} = r + (p-1)\lambda, \qquad i = 1, 2, ..., \frac{v-f}{p}, \tag{1.3}$$

$$p\sum_{j=1}^{\frac{b-h}{p}} m_{i_1 j} m_{i_2 j} + \sum_{j=1}^{h} h_{i_1 j} h_{i_2 j} = p^2\lambda, \qquad i_1, i_2 = 1, 2, ..., \frac{v-f}{p}, \ i_1 \neq i_2. \tag{1.4}$$

Доказателство. Уравненията (1.1) и (1.2) следват от факта, че броят на единиците във всеки ред на матрицата на инцидентност на D е r, а във всеки стълб – k.

Броят на срещанията на двойките точки от нетривиална точкова орбита в блоковете на дизайна е $\binom{p}{2}\lambda$. Оттук извеждаме:

$$p\sum_{j=1}^{\frac{b-h}{p}}\binom{m_{ij}}{2}+\binom{p}{2}\sum_{j=1}^{h}\frac{h_{ij}}{p}=\binom{p}{2}\lambda, \qquad i=1,2,...,\frac{v-f}{p}.$$

Като използуваме и (1.1) от горното уравнение получаваме (1.3).

Ако i_1 и i_2 са номерата на две нетривиални точкови орбити, то броят на срещанията в блоковете на дизайна на двойките точки (P,Q), такива, че P е от i_1-та, а Q – от i_2-та точкова орбита, е $p^2\lambda$. Следва (1.4). ◇

1.4.3 Конструиране на дизайните

При локалния подход построяването на дизайните става на два етапа. Първият включва намирането с помощта на Теорема 1.4.2.1 на всички нееквивалентни *условни орбитни матрици*. Наричат се така, защото е възможно някои от тях да не са разширими до дизайни. За да не се утежнява изложението, по-нататък ще изпускаме думата *условни*. На втория етап елементите на всяка съкратена орбитна матрицата се заместват с циркуланти така, че получената структура да е дизайн.

Изследванията в настоящата работа са извършени в следния ред:

- Намиране на всички нееквивалентни съкратени орбитни матрици
- Конструиране на всички нееквивалентни съкратени матрици на инцидентност
- Добавяне на фиксираните точки и блокове
- Отсяване на неизоморфните дизайни
- Изследване на получените дизайни.

В следващата глава ще се спрем подробно на всеки от разработените за целта алгоритми.

1.5 Представяне на резултатите в дисертацията

Понеже броят на намерените дизайни е твърде голям, тук са дадени само една част от тях. Ще ги наричаме *избраните* дизайни. Те отговарят на някакви допълнителни условия, отнасящи се до вида на групата от автоморфизми, евентуална разрешимост, разложимост, брой на резолюциите и др. Тези условия са специфични за всяка конкретна задача. *Избраните* дизайни са групирани в таблици според начина, по който са получени. За икономия на място, дизайните с конструктивен автоморфизъм от ред p са представени както следва:

• Точките са обозначени $P_1, P_2, \ldots, P_v$, а блоковете с числата 1, 2, ..., b.

• Блоковите орбити относно конструктивния автоморфизъм са последователно номерирани с числата $0, 1, 2, \ldots, h + \frac{b-h}{p} - 1$, като за записване на числата, които са по-големи от 9, са използвани латинските букви a, b, ..., x, y, z.

• За първата точка от всяка нетривиална точкова орбита са дадени блоковете, в които тя се съдържа, като вместо номера на блока е даден само номера му $(1, 2, \ldots, p)$ в съответната блокова орбита. Номерът на тази орбита е записан в същата графа на най-близкия, означен чрез orb (или or) или чрез името на съответната орбитна матрица, по-горен ред на таблицата.

• За всяка фиксирана точка са дадени номерата на блоковите орбити, в които тя се съдържа.

• Номера на нефиксиран блок получаваме като към номера му в орбитата добавим умножения по p номер на тази орбита. Номера на фиксиран блок получаваме като към номера на орбитата му добавим единица и умножения по $(p-1)$ брой на нетривиалните блокови орбити .

• Графата Aut или A съдържа реда на пълната група от автоморфизми на дизайна. С буквата t непосредствено след реда са обозначени транзитивните групи, а с tt – двойно-транзитивните.

• При дизайни, които могат да бъдат разрешими, в графата Res или Rs е даден броя на неизоморфните резолюции.

• При квазикратни дизайни в графата red или rd е поставен знака $\diamond$ ако дизайнът е разложим.

Дизайни, притежаващи повече от един от разглежданите конструктивни автоморфизми, са дадени само в първата възможна таблица.

Като пример да разгледаме Таблица 3.1.2: Броят на нетривиалните блокови орбити е 8, шестата точка (P_6) на дизайн No1 се съдържа в блоковете: $1, 6, 11, 23, 24, 27, 30, 34, 37, 42$, *а 21-та точка ($P_{21}$) – в блоковете:* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. *Матрицата на инцидентност на този дизайн е:*

P_1	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 1 0 0 0	1 0 1 0 0	1 0
P_2	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 1 0 0	0 1 0 1 0	1 0
P_3	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 1 0	0 0 1 0 1	1 0
P_4	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 1	1 0 0 1 0	1 0
P_5	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	1 0 0 0 1	0 1 0 0 1	1 0
P_6	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 1 0 0 1	0 0 0 1 0	0 1 0 0 0	0 1
P_7	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 1	1 0 1 0 0	0 0 0 0 1	0 0 1 0 0	0 1
P_8	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 1	0 1 0 1 0	1 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 1
P_9	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 1 0 1	0 1 0 0 0	0 0 0 0 1	0 1
P_{10}	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 1 1 0 0	1 0 0 1 0	0 0 1 0 0	1 0 0 0 0	0 1
P_{11}	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 1 0 0 1	0 1 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 1	0 0
P_{12}	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	1 0 1 0 0	1 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 1	0 0 0 0 0	1 0 0 0 1	0 0
P_{13}	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 1 0 1 0	0 1 0 1 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 1	0 0 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0
P_{14}	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 1 0 1	0 0 1 0 1	0 0 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 1 0 0	0 0
P_{15}	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	1 0 0 1 0	1 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 1 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 0
P_{16}	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 0 1 1 0	0 1 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 1 0 1	0 0 0 0 0	0 0
P_{17}	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 0 1 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0
P_{18}	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	1 0 0 0 1	1 0 0 0 1	0 1 0 1 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0
P_{19}	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	1 1 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 1 0 1	0 0 0 0 0	1 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0
P_{20}	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 1 1 0 0	0 1 1 0 0	1 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 1 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0
P_{21}	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0.

Глава 2

Алгоритми за конструиране и анализ на 2-(v,k,λ) дизайни

Класификацията на дизайните с дадени параметри и автоморфизми изисква да бъдат решени поредица от задачи. Отначало се определя какви автоморфизми може да има дизайн с конкретните параметри. Когато целта е да бъдат построени дизайните с всички автоморфизми от даден прост ред, трябва да се докаже, че наистина са разгледани всички възможности. В някои изследвания се предполага наличието едновременно на два автоморфизма от взаимно-прости редове и трябва да се уточни как точно взаимодействат те по между си. Тези разглеждания и доказателства са твърде различни в различните случаи и общи указания за подхода към тях едва ли могат да бъдат дадени. Останалите изследвания се правят с компютър. В тази глава ще се спрем на тънкостите, обуславящи коректната работа и бързодействието на реализираните алгоритми за намиране на орбитните матрици, за тяхното разширяване до дизайни и за изследване на получените решения.

Българските математици Тончев, Капралов и Ланджев са използвали локалния подход с помощта на алгоритми, сходни на описаните тук. Най-съществени различия има при разширяване на съкратената орбитна матрица до всички нееквивалентни съкратени матрици на инцидентност на дизайна (Раздел 2.2). Основното достойнство на разработения в настоящата дисертация алгоритъм е, че отсява значителна част от еквивалентните решения още в процеса на получаването им. Благодарение на това стана възможно да се направи класификация и в случаи, когато броят на дизайните е твърде голям.

2.1 Намиране на съкратените орбитни матрици

Входните данни, необходими за работата на програмата, включват условията (по Теорема 1.4.2.1), на които трябва да отговарят елементите на съкратената орбитна матрица M и информация за това кои от редовете ѝ са взаимно-заменими.

Два реда на M наричаме ***взаимно-заменими***, ако при размяна на местата на съответните редове от условната орбитна матрица, условията на Теорема 1.4.2.1 остават непроменени.

Като пример нека разгледаме съкратената орбитна матрица M на 2-(40,10,3) дизайн с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и с два фиксирани блока. (Раздел 7.2, Случай 2.) От Теорема 1.4.2.1 следва, че за елементите на M са в сила равенствата (7.4). Първият и вторият ред на M са взаимно-заменими, но вторият и третият не са, защото ако ги разменим няма да са в сила условията:

$$\sum_{j=1}^{10} m_{1j}m_{2j} = 10, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{3j}m_{4j} = 10.$$

Решенията за съкратената орбитна матрица получаваме по следния начин:

• Първоначално според (1.1) и (1.3) намираме всички нееквивалентни възможности за всеки един от редовете на матрицата M.

В горния пример първите 4 реда на M трябва да са пермутации на (2222111100) *или* (3211111110), *а вторите четири - на* (4111111111), (3311111110), (3222111100) *или* (2222221000).

• Първия ред на M подреждаме в лексикографски нарастващ ред.

• Ако сме намерили i реда от матрицата, трябва да проверим кои от пермутациите на всяка от възможностите за $i+1$-вия ред отговарят на условието (1.4). Пермутациите генерираме в лексикографски нарастващ ред като започваме или от лексикографски най-малкия $i+1$-ви ред, или, в случай,че i-тия и $i+1$-вия ред са взаимно заменими, от ред, равен на i-тия.

Нека в горния пример сме построили първите два реда на матрицата и нека те са:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad .$$

Третият ред не е взаимно-заменим с някой от предходните, затова търсим решение за него като започваме заместването с лексикографски най-

малката възможност — (0011112222). *Оказва се, че първата пермутация, която удовлетворява* (7.4) *е* (0112220211). *С нея имаме решение за първите 3 реда на матрицата.*

Четвъртият ред е взаимно-заменим с третия, затова търсим решение за него като започваме заместването с ред същия като третия (0112220211) *и разглеждаме всички лексикографски по-големи възможности. Оказва се, че първата пермутация, която удовлетворява (7.4) е* (2110112022). *Така за първите 4 реда на матрицата получаваме:*

$$\begin{matrix} 0&0&1&1&1&1&2&2&2&2\\ 2&2&1&1&2&2&0&0&1&1\\ 0&1&1&2&2&2&0&2&1&1\\ 2&1&1&0&1&1&2&0&2&2 \end{matrix} \quad .$$

Над матрици може да бъде зададена следната лексикографска наредба: Нека са дадени две матрици $P = (p_{ij})_{r\times c}$ и $Q = (q_{ij})_{r\times c}$. Казваме, че $P \leq Q$ ако $(p_{11}, p_{12}, ..., p_{1c}, p_{21}..., p_{2c}, ..., p_{r1}...p_{rc}) \leq (q_{11}, q_{12}, ..., q_{1c}, q_{21}...q_{2c}, ..., q_{r1}...q_{rc})$

• След генериране на поредната възможност за матрицата от първите i реда на M (Нека я означим M^i), проверяваме дали тя не е еквивалентна на някоя от вече разглежданите комбинации от i реда. Вече сме конструирали всички i-редови матрици, лексикографски по-малки от дадената, затова ако M^i се окаже еквивалентна на някоя по-малка матрица, то тя няма нужда да бъде разглеждана и можем да преминем към следващата пермутация на i-тия ред. За целта за всяка пермутация на взаимно-заменимите измежду първите i реда проверяваме дали след подреждане на стълбовете в лексикографски нарастващ ред не се получава матрица, по-малка от M^i.

Нека в нашия пример сме намерили решение за първите 3 реда на M *и нека то е:*

$$\begin{matrix} 0&0&1&1&1&1&2&2&2&2\\ 2&2&1&1&2&2&0&0&1&1\\ 1&1&1&2&0&2&0&1&2&2 \end{matrix} \quad .$$

Като разменим първите два реда (имаме право, защото са взаимно-заменими) и подредим стълбовете в лексикографски нарастващ ред, получаваме:

$$\begin{matrix} 0&0&1&1&1&1&2&2&2&2\\ 2&2&1&1&2&2&0&0&1&1\\ 0&1&1&2&2&2&1&1&0&2 \end{matrix} \quad .$$

Тази матрица е еквивалентна на текущо построената и е лексикографски по-малка от нея, т.е. тя вече е разглеждана. Затова вместо да строим четвърти ред на M, *генерираме следваща пермутация на третия.*

2.2 Намиране на съкратените матрици на инцидентност

Замяната на елементите на съкратената орбитна матрица M с циркуланти от ред p (или *разширяването* на M) до получаване на всички нееквивалентни решения за съкратената матрица на инцидентност A представлява най-съществената част от пресмятанията. Обикновено тя е и най-бавната, въпреки че има и изключения. *Така, например, генерирането на всички нееквивалентни орбитни матрици спрямо автоморфизъм от ред 5 на симетричен 2-(61,16,4) дизайн (Раздел 4.2) се оказа много по-бавно от разширяването им спрямо предположения автоморфизъм от ред 10.*

Ще наричаме *i-ти хоризонтален слой* на съкратената матрица на инцидентност тези p реда от нея, които съответстват на точките от i-тата точкова орбита, а *j-ти вертикален слой* – стълбовете, съответствуващи на блоковете от j-тата блокова орбита.

Очевидно *i-тия хоризонтален слой на матрицата* A получаваме при замяната с циркуланти на i-тия ред на M, а *j-тия вертикален слой* – при замяната с циркуланти на j-тия стълб на M.

В настоящата работа е разработен следният алгоритъм:

1. Входните данни включват матрицата M и таблица със скаларните произведения на всеки два реда на съкратената матрица на инцидентност.

Като пример нека да разгледаме 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 7 без фиксирани точки и блокове (Раздел 3.1.2). Ще разширяваме матрицата

$$M = \begin{pmatrix} 3\,3\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,3\,3\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,3\,3 \end{pmatrix} .$$

В случая съкратената матрица на инцидентност съвпада с матрицата на инцидентност на дизайна. Скаларното произведение на всеки два реда от нея трябва да бъде 2.

2. Всички циркуланти от ред p, с които ще заместваме (нека са s на брой), са номерирани така, че циркулантата с номер $lp + a$ се получава от тази с номер $lp + 1$ чрез цикличното ѝ завъртане на дясно или нагоре $a - 1$ пъти, $l = 0, 1, ..., \frac{s}{p} - 1$, $a = 1, 2, ..., p$.

В горния пример се замества със следните циркуланти:

1	2	3	4	5	6	7
1000000	0100000	0010000	0001000	0000100	0000010	0000001
0100000	0010000	0001000	0000100	0000010	0000001	1000000
0010000	0001000	0000100	0000010	0000001	1000000	0100000
0001000	0000100	0000010	0000001	1000000	0100000	0010000
0000100	0000010	0000001	1000000	0100000	0010000	0001000
0000010	0000001	1000000	0100000	0010000	0001000	0000100
0000001	1000000	0100000	0010000	0001000	0000100	0000010
8	9	10	11	12	13	14
1110000	0111000	0011100	0001110	0000111	1000011	1100001
0111000	0011100	0001110	0000111	1000011	1100001	1110000
0011100	0001110	0000111	1000011	1100001	1110000	0111000
0001110	0000111	1000011	1100001	1110000	0111000	0011100
0000111	1000011	1100001	1110000	0111000	0011100	0001110
1000011	1100001	1110000	0111000	0011100	0001110	0000111
1100001	1110000	0111000	0011100	0001110	0000111	1000011
15	16	17	18	19	20	21
1101000	0110100	0011010	0001101	1000110	0100011	1010001
0110100	0011010	0001101	1000110	0100011	1010001	1101000
0011010	0001101	1000110	0100011	1010001	1101000	0110100
0001101	1000110	0100011	1010001	1101000	0110100	0011010
1000110	0100011	1010001	1101000	0110100	0011010	0001101
0100011	1010001	1101000	0110100	0011010	0001101	1000110
1010001	1101000	0110100	0011010	0001101	1000110	0100011
22	23	24	25	26	27	28
1011000	0101100	0010110	0001011	1000101	1100010	0110001
0101100	0010110	0001011	1000101	1100010	0110001	1011000
0010110	0001011	1000101	1100010	0110001	1011000	0101100
0001011	1000101	1100010	0110001	1011000	0101100	0010110
1000101	1100010	0110001	1011000	0101100	0010110	0001011
1100010	0110001	1011000	0101100	0010110	0001011	1000101
0110001	1011000	0101100	0010110	0001011	1000101	1100010
29	30	31	32	33	34	35
1100100	0110010	0011001	1001100	0100110	0010011	1001001
0110010	0011001	1001100	0100110	0010011	1001001	1100100
0011001	1001100	0100110	0010011	1001001	1100100	0110010
1001100	0100110	0010011	1001001	1100100	0110010	0011001
0100110	0010011	1001001	1100100	0110010	0011001	1001100
0010011	1001001	1100100	0110010	0011001	1001100	0100110
1001001	1100100	0110010	0011001	1001100	0100110	0010011
36	37	38	39	40	41	42
1010100	0101010	0010101	1001010	0100101	1010010	0101001
0101010	0010101	1001010	0100101	1010010	0101001	1010100
0010101	1001010	0100101	1010010	0101001	1010100	0101010
1001010	0100101	1010010	0101001	1010100	0101010	0010101
0100101	1010010	0101001	1010100	0101010	0010101	1001010
1010010	0101001	1010100	0101010	0010101	1001010	0100101
0101001	1010100	0101010	0010101	1001010	0100101	1010010

Особено важно за бързодействието на програмата е, че вместо със самите циркуланти работим с техните номера, т.е. строим целочислена матрица (нека я означим $Q = (q_{ij})_{\frac{v-f}{p} \times \frac{b-h}{p}}$) с размерите на M, а не на A, което много облекчава изчисленията.

3. Елементите на Q намираме последователно. За поредния елемент q_{ij} опитваме поред всички възможни номера на циркуланти с m_{ij} единици в ред или стълб, като с всяка от тях правим опит за доизграждане на матрицата. Кои от циркулантите с m_{ij} единици в ред или стълб можем да изберем преценяваме с помощта на поддържания масив от текущите стойности на скаларните произведения на всеки два реда на съкратената матрица на инцидентност, съответстваща на Q.

4. За намаляване броя на изоморфните решения фиксираме спрямо циклично завъртане първия ненулев елемент от всеки ред и стълб на M, т.е. този елемент се замества само с едната (тази с най-малък номер) измежду p циркуланти, които се получават една от друга чрез циклично завъртане на редовете или стълбовете им.

В примера, който разглеждаме, трябва да изберем q_{11} между 8, 15, 22, 29 и 36, защото този елемент е фиксиран спрямо циклично завъртане и $m_{11} = 3$. Започваме с най-малката възможна стойност – 8. С избирането на циркуланта 8 за първи елемент на A, скаларното произведение на първия и втория ред на матрицата на инцидентност е вече 2, а на първия и третия ред – 1. При това положение се оказва, че не можем да изберем q_{12} (респективно a_{12}), защото всяка циркуланта с 3 единици в ред води до по-голямо от 2 скаларно произведение на първия и втория или първия и третия ред. Връщаме се назад и избираме $q_{11} = 15$.

5. След построяване на цял ред от Q проверяваме дали намерената част от матрицата не е еквивалентна на друга, която вече сме разглеждали. Това може да се направи, защото елементите се попълват последователно и между няколко възможни на дадено място циркуланти, се строи първо с тези с по-малки номера. Ако тази част от матрицата се окаже еквивалентна на лексикографски по-малка от нея, тя няма нужда да бъде разглеждана отново. Разбира се, за да направим необходимата проверка, генерираме всички пермутации на редовете на Q, при които i-тият ред отива в j-тия само ако i-тият ред на орбитната матрица е еквивалентен на j-тия с точност до пермутация.

Особеностите тук са свързани с фиксираните спрямо циклично завъртане елементи. Възможно е при дадена пермутация на тяхно място да се окажат номера на циркуланти, от които чрез циклично завъртане могат да се получат други с по-малък номер. Тогава ги фиксираме като използваме, че на n-кратното циклично завъртане на хоризонтален или вертикален слой на съкратената матрица на инцидентност отговаря промяна на елементите от съответния ред или стълб на Q по правилото:

$$q'_{ij} = p\left\lfloor \frac{q_{ij}}{p} \right\rfloor + (n + q_{ij}\ mod\ p)\ mod\ p, \tag{2.1}$$

където q'_{ij} е новата стойност на q_{ij}.

В горния пример нека сме намерили поредното решение за първите два реда на матрицата Q. Преобразуваме го по следния начин:

$$\begin{array}{cccccc} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 17 & 21 & 2 & 6 \end{array} \xrightarrow{\text{а}} \begin{array}{cccccc} 17 & 21 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 15 & 15 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{б}} \begin{array}{cccccc} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 15 & 18 & 7 & 3 \end{array} \xrightarrow{\text{в}} \begin{array}{cccccc} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 17 & 20 & 2 & 5 \end{array}$$

а) Върху редовете прилагаме пермутацията $(1,2)$, а върху стълбовете – $(1,3)(2,4)(5)(6)$.

б) Фиксираме спрямо циклично завъртане елементите от първия ред, като използвайки (2.1) променяме елементите от първия стълб при $n = 5$, от втория – при $n = 1$, от четвъртия – при $n = 3$, от петия – при $n = 6$ и от шестия – при $n = 2$.

в) Фиксираме спрямо циклично завъртане първия елемент от втория ред, като използвайки (2.1) променяме елементите от втория ред при $n = 2$.

Получената матрица е еквивалентна на текущата и лексикографски по-малка от нея. Затова, вместо да пристъпим към построяването на трети ред, се връщаме назад и опитваме следващата възможност за q_{26}.

6. В резултат на 5. решенията за Q са нееквивалентни едно на друго, но сред решенията за A, които се получават непосредствено от тях, в общия случай има и немалко еквивалентни. Затова за всяко следващо решение за A проверяваме дали не съществуват такива пермутации на редовете в рамките на хоризонталните слоеве и на стълбовете в рамките на вертикалните слоеве, които довеждат всички циркуланти в циркуланти. Тогава проверяваме както в 5. дали матрицата от новополучените циркуланти не е еквивалентна на някое предишно, лексикографски по-малко решение за Q.

Нека сме намерили поредното решение за матрицата Q (от примера за 2-(21,5,2) дизайн с автоморфизми от ред 7):

$$\begin{array}{cccccc} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 20 & 24 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 17 & 28 \end{array}.$$

Тестовете по точка 5. показват, че то не е еквивалентно на нито едно от получените по-рано решения. Остава да проверим дали не съществуват пермутации на редовете (стълбовете) в рамките на хоризонталните (вертикални) слоеве на матрицата A, които довеждат циркулантите *в други циркуланти. Оказва се, че това е така ако разместим редовете на всички хоризонтални и стълбовете на всички вертикални слоеве според пермутацията* $(1)(2,3,5)(4,6,7)$ *както е показано на фигура 2.1.*

В така получената матрица:

а) Фиксираме спрямо циклично завъртане елементите от първия ред като използувайки (2.1) променяме елементите от първия и втория стълб при $n=3$,

б) Фиксираме спрямо циклично завъртане елементите от първия стълб като използувайки (2.1) променяме елементите от първия и втория ред при $n=4$,

в) Прилагаме върху стълбовете пермутацията $(1)(2)(3,5)(4,6)$ *, а върху редовете –* $(1)(2,3)$.

$$\begin{matrix} 19 & 19 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 18 & 28 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 20 & 23 \end{matrix} \xrightarrow{\text{а}} \begin{matrix} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 18 & 28 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 20 & 23 \end{matrix} \xrightarrow{\text{б}} \begin{matrix} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 24 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 17 & 27 \end{matrix} \xrightarrow{\text{в}} \begin{matrix} 15 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 17 & 27 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 15 & 24 \end{matrix}$$

В резултат се оказва, че изследваната матрица е еквивалентна на матрица, която вече сме построили.

Във всички случаи, разгледани в дисертацията, с този алгоритъм се получават само нееквивалентните решения за съкратената матрица на инцидентност. Не е изключено, обаче, да съществуват примери, при които алгоритъмът не отделя всички еквевалентни решения. Това би могло да се случи (но не е задължително), ако сред намерените съкратени матрици на инцидентност има инвариантни относно група от ред, кратен на p^2.

Бързодействието на тази програма може да се окаже значително по-голямо, ако заместваме с циркуланти не в M, а в някоя еквивалентна на нея матрица. Това е съвсем логично, защото елементите на Q намираме последователно, а възможностите за замяна с циркуланти на някои части от матрицата могат да бъдат много по-малко отколкото при други, т.е. ако за първите редове и първите стълбове на M има сравнително малко решения, програмата работи много по-бързо. Авторът е разработвал и алгоритъм, при който елементите на Q намираме не последователно, а като всеки път първо проверяваме за кой елемент има най-малко възможности, но при такъв подход е трудно отделянето на изоморфните решения и броя на проверките преди всяко заместване става огромен. Много по-удачно се оказа предварително да се изследва приблизително бързодействие на програмата при различни пермутации на редовете и стълбовете на M и да се избере сравнително приемлив вариант.

Фигура 2.1:

	15	15	1	1	1	1
1	1 1 0 1 0 0 0	1 1 0 1 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0
2	0 1 1 0 1 0 0	0 1 1 0 1 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0
3	0 0 1 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0
4	0 0 0 1 1 0 1	0 0 0 1 1 0 1	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0
5	1 0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 1 1 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0
6	0 1 0 0 0 1 1	0 1 0 0 0 1 1	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0
7	1 0 1 0 0 0 1	1 0 1 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1
	1	4	20	24	2	4
1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 1 0 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 0	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0
2	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	1 0 1 0 0 0 1	0 0 0 1 0 1 1	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0
3	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	1 1 0 1 0 0 0	1 0 0 0 1 0 1	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0
4	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1	0 1 1 0 1 0 0	1 1 0 0 0 1 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 1
5	0 0 0 0 1 0 0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 0 1 0	0 1 1 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0
6	0 0 0 0 0 1 0	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 0 1	1 0 1 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0
7	0 0 0 0 0 0 1	0 0 1 0 0 0 0	1 0 0 0 1 1 0	0 1 0 1 1 0 0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0
	1	5	6	1	17	28
1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 0 1 0	0 1 1 0 0 0 1
2	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 0 1	1 0 1 1 0 0 0
3	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	1 0 0 0 1 1 0	0 1 0 1 1 0 0
4	0 0 0 1 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 1 0 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 0
5	0 0 0 0 1 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	1 0 1 0 0 0 1	0 0 0 1 0 1 1
6	0 0 0 0 0 1 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	1 1 0 1 0 0 0	1 0 0 0 1 0 1
7	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 1	0 1 1 0 1 0 0	1 1 0 0 0 1 0
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7

	19	19	1	1	1	1
1	1 0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0
3	0 1 0 0 0 1 1	0 1 0 0 0 1 1	0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0
5	1 0 1 0 0 0 1	1 0 1 0 0 0 1	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0
7	1 1 0 1 0 0 0	1 1 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0
2	0 1 1 0 1 0 0	0 1 1 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 0 0
4	0 0 1 1 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 1 0
6	0 0 0 1 1 0 1	0 0 0 1 1 0 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1
	1	6	18	28	5	6
1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 1 1 0 1	0 1 1 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 1 0
3	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 1 1 0	1 0 1 1 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 1
5	0 0 1 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 1 1	0 1 0 1 1 0 0	0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0 0
7	0 0 0 1 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	1 0 1 0 0 0 1	0 0 1 0 1 1 0	1 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0
2	0 0 0 0 1 0 0	0 0 1 0 0 0 0	1 1 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 1 1	0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0
4	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 1 0 0 0	0 1 1 0 1 0 0	1 0 0 0 1 0 1	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0
6	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0 0	0 0 1 1 0 1 0	1 1 0 0 0 1 0	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0
	1	3	7	1	20	23
1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 1 1	0 1 0 1 1 0 0
3	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0	1 0 1 0 0 0 1	0 0 1 0 1 1 0
5	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0	1 1 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 1 1
7	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0	0 1 1 0 1 0 0	1 0 0 0 1 0 1
2	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 1 1 0 1 0	1 1 0 0 0 1 0
4	0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 1 1 0 1	0 1 1 0 0 0 1
6	0 0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 1 1 0	1 0 1 1 0 0 0
	1 3 5 7 2 4 6	1 3 5 7 2 4 6	1 3 5 7 2 4 6	1 3 5 7 2 4 6	1 3 5 7 2 4 6	1 3 5 7 2 4 6

2.3 Добавяне на фиксираните точки и блокове

При локалния подход използваме, че за матрицата на инцидентност на дизайн с даден автоморфизъм съществува следното представяне (Раздел 1.4.2):

$$\begin{pmatrix} A & H \\ F & C \end{pmatrix}$$

Нека вече сме намерили с точност до еквивалентност всички решения за матриците A, H, F и C. От тях искаме да сглобим всички нееквивалентни матрици на инцидентност. Често пъти от едни и същи A, H, F и C с помощта на пермутации на хоризонталните и вертикални слоеве на съкратената матрица на инцидентност A можем да получим няколко неизоморфни дизайна.

Вместо пермутации на хоризонталните и вертикални слоеве на A, в настоящата работа генерираме възможните пермутации на редовете и стълбовете на частта от матрицата на инцидентност, която съответствува на фиксираните точки и блокове, т.е. на матриците H, C и F.

Като пример за значението на пермутациите във фиксираната част ще разгледаме 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 3 фиксирани точки и 6 фиксирани блока, случай 3 (Раздел 3.1.5).

Неизоморфните дизайни номер 4 и 5 от таблица 3.1.7 са получени от една и съща съкратена матрица на инцидентност по показания начин:

$$\overset{No\ 4}{\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&u^t&u^t&z^t&z^t&z^t&z^t\\
4&1&2&3&0&0&3&0&1&1&1&0&z^t&z^t&u^t&z^t&z^t&z^t\\
0&1&3&2&6&0&2&0&1&2&0&1&z^t&z^t&z^t&u^t&z^t&z^t\\
1&4&0&0&2&3&0&3&3&0&2&1&z^t&z^t&z^t&z^t&u^t&z^t\\
1&0&6&0&3&2&0&2&0&1&2&2&z^t&z^t&z^t&z^t&z^t&u^t\\
0&0&0&4&0&4&3&3&3&2&1&2&z^t&z^t&z^t&z^t&z^t&z^t\\
z&z&z&z&z&z&u&u&z&z&z&z&0&0&1&1&1&1\\
z&z&z&z&z&z&z&z&u&u&z&z&1&1&0&0&1&1\\
z&z&z&z&z&z&z&z&z&z&u&u&1&1&1&1&0&0
\end{pmatrix}}
\quad
\overset{No\ 5}{\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&u^t&u^t&z^t&z^t&z^t&z^t\\
4&1&2&3&0&0&3&0&1&1&1&0&z^t&z^t&u^t&z^t&z^t&z^t\\
0&1&3&2&6&0&2&0&1&2&0&1&z^t&z^t&z^t&u^t&z^t&z^t\\
1&4&0&0&2&3&0&3&3&0&2&1&z^t&z^t&z^t&z^t&u^t&z^t\\
1&0&6&0&3&2&0&2&0&1&2&2&z^t&z^i&z^t&z^t&z^t&u^t\\
0&0&0&4&0&4&3&3&3&2&1&2&z^t&z^t&z^t&z^t&z^t&z^t\\
z&z&z&z&z&z&u&u&z&z&z&z&0&0&1&1&1&1\\
z&z&z&z&z&z&z&z&u&z&u&z&1&1&0&1&0&1\\
z&z&z&z&z&z&z&z&z&u&z&u&1&1&1&0&1&0
\end{pmatrix}}$$

където с 1, 2, ..., 6 са означени циркулантите от ред 3:

1	2	3	4	5	6
1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 1 0	0 1 1	1 0 1
0 1 0	0 0 1	1 0 0	0 1 1	1 0 1	1 1 0
0 0 1	1 0 0	0 1 0	1 0 1	1 1 0	0 1 1

Допълването на съкратените матрици на инцидентност до матрици на инцидентност е реализирано по следния алгоритъм: Входните данни включват нееквивалентните решения за A, матриците H, C и F, подредени в лексикографски нарастващ ред, параметрите на дизайна и информация за това кои пермутации на C могат да бъдат пропуснати. За всяка следваща пермутация на стълбовете на C, подреждаме редовете ѝ в лексикографски ред, генерираме всички разглеждани пермутации на F, т.е. всички възможни разпределения на фиксираните точки в нефиксираните блокове и проверяваме кои от тях запазват λ.

Впоследствие част от получените по този начин дизайни се оказват изоморфни помежду си.

2.4 Отделяне на неизоморфните дизайни

Една от основните трудности при конструирането на комбинаторни дизайни по каквито и да е методи, е да бъдат премахнати изоморфните решения.

Работата по отделянето на неизоморфните дизайни значително се облекчава, ако се използват подходящи инварианти на точките и блоковете (или съответно на редовете и стълбовете на матрицата на инцидентност). Инварианти на точките (блоковете) наричаме такива техни характеристики, които не се променят при изоморфизъм, т.е. всеки изоморфизъм между два дизайна изобразява точките(блоковете) в точки(блокове) с еднакви инварианти. Очевидно точките (блоковете) от една и съща орбита спрямо даден автоморфизъм на дизайна, имат еднакви инварианти.

Ако сортираме по някакъв начин инвариантите на точките и блоковете, получаваме инварианта на дизайна, т.е. ако броят на точките и блоковете с дадени инварианти не е един и същ за два дизайна, то те са неизоморфни и по-нататъшен тест за изоморфизъм не е необходим.

В настоящата работа се използват най-често следните инварианти, взаимствани от [8]:

- За всяка точка P намираме вектора $(m_0, m_1, \ldots, m_\lambda)$, където m_j $(j = 0, 1, \ldots, \lambda)$ е броя на двойките точки (Q, R), различни от P и такива, че P, Q и R се съдържат едновременно точно в j блока.
- За всеки блок B пресмятаме вектора $(n_0^{(a)}, n_1^{(a)}, \ldots, n_{v-3}^{(a)})$, където $n_i^{(a)}$ $(i = 0, 1, \ldots, v-3,\ a = 1, 2, \ldots, \lambda)$ е броят на двойките блокове (V, W), различни от B и такива, че съществуват точно i други блока, съдържащи поне a общи точки с всеки от блоковете B, V, W.

Нека два дизайна D_1 и D_2 имат едни и същи инварианти. Според дефиницията за изоморфизъм, за да докажем, че са неизоморфни, трябва да генерираме всевъзможните пермутации на редовете на матрицата на инцидентност на D_1 и за всяка от тях да проверим дали не съществува пермутация на стълбовете ѝ , която да води до матрицата на инцидентност на D_2. Добре е известно, че генерирането на всички пермутации на повече от 12 елемента е вече толкова бавно, че изчисленията стават безсмислени. Затова е изключително важно да бъдат пропуснати част от пермутациите, които очевидно не водят до изоморфен дизайн. От начина, по който се прави това, зависи ефективността на програмата.

Броят на разглежданите пермутации на точките на D_1 може да намалее значително, ако генерираме само тези от тях, за които е в сила следното *условие за инвариантите*:

Ако точката P_i отива в точката P_j, то точките P_i от D_1 и P_j от D_2 имат едни и същи инварианти.

Нека D_1 и D_2 имат матрици на инцидентност съответно L_1 и L_2. Генерираме пермутации на редовете на L_1 в лексикографски ред. Нека φ_n е текущата пермутация, която трансформира L_1 в $(L_1)^{\varphi_n}$. Ако множеството от стълбовете на $(L_1)^{\varphi_n}$ съвпада с това на L_2, то двата дизайна са изоморфни. Ако това не е така, трябва да генерираме следващата пермутация φ_{n+1}. Дали тя да бъде първата, следваща φ_n в лексикографски ред и отговаряща на условието за инвариантите, или можем да прескочим известен брой пермутации? За да отговорим на този въпрос, разглеждаме матриците L_2^i и $(L_1^i)^{\varphi_n}$, състоящи се от първите $i(i = 1, 2, ..., v)$ реда на L_2 и $(L_1)^{\varphi_n}$ съответно и определяме най-голямото i, за което множеството от стълбовете на L_2^i съвпада с това на $(L_1^i)^{\varphi_n}$. Тогава φ_{n+1} е първата в лексикографски ред пермутация след φ_n, за която $(L_1^{i+1})^{\varphi_n}$ се различава от $(L_1^{i+1})^{\varphi_{n+1}}$. Така прескачаме $(v - i - 1)!$ (i е между 1 и v) пермутации при генерирането на всяка нова и това прави изчисленията възможни.

Инвариантите на блоковете са от полза, когато определяме дали един стълб на $(L_1)^{\varphi_n}$ е стълб и на L_2, защото можем да пропуснем сравненията между стълбове, съответстващи на блокове с различни инварианти.

Като пример нека разгледаме 2-(7,3,3) дизайните M_1 и M_6, дадени в Раздел 6.1. Матриците от първите им два реда са еквивалентни помежду си, но от първите три реда не са. Затова първата пермутацията, която разглеждаме, не е $(1)(2)(3)(4)(5)(6,7)$, *а* $(1)(2)(3,4)(5)(6)(7)$. *Проверяваме дали точки 3 и 4 на първия дизайн имат същите инварианти като съответно точки 4 и 3 на втория. Ако това не е така, преминаваме към пермутацията* $(1)(2)(3,5)(4)(6)(7)$. *В противен случай проверяваме дали множеството* *от стълбовете на* $(M_1)^\varphi$ *не е същото като множеството от стълбовете на* M_6.

Дотук изяснихме как определяме дали два дизайна са изоморфни или не. На практика, обаче, се налага да бъдат открити изоморфните сред хиляди дизайни и това поражда други проблеми. За да бъдат сравнявани един с друг, матриците на инцидентност и инвариантите им трябва да бъдат съхранявани в паметта или във файл, от който да се чете на големи порции. Трябва да се намери начин за съкратено записване и едновременно с това за бързо четене на тази информация. В настоящата работа е използвано съкратено записване на дизайните, базиращо се на автоморфизма, с който са построени. Последният е указан непосредствено преди записа на самия дизайн и това позволява да бъдат сравнявани и дизайни, построени с различни конструктивни автоморфизми. Характеристиките на точките(блоковете) са номерирани и подредени лексикографски. Съхраняваме в паметта само номерата и част от инвариантите.

2.5 Намиране реда на пълната група от автоморфизми

Една от основните характеристики, по които се прави класификация на намерените неизоморфни дизайни, е редът на пълната им група от автоморфизми. В настоящата работа за намирането му е използван алгоритъм, който се базира на основната теорема в теорията на крайните групи.

Теорема 2.5.1 ([7],[18],[96]): *Ако* G *е крайна група от пермутации,* G_x *– стабилизаторът на точката* x, *а* $|x^G|$ *– дължината на орбитата ѝ , то*

$$|G| = |x^G||G_x|.$$

Алгоритъмът, който обсъждаме, се основава на неколкократното прилагане на тази теорема. Отначало намираме дължината на орбитата на първата точка на дизайна, т.е. колко са точките, в които тя отива под действието на групата. След това определяме дължината на орбитата на втората точка спрямо стабилизатора на първата, на третата точка спрямо стабилизатора на първите две, ..., на последната точка спрямо стабилизатора на всички останали. Редът на пълната група от автоморфизми на дизайна е произведението на дължините на всички тези орбити. Дали съществува автоморфизъм на дизайна, който довежда точката x в точката y и фиксира всички точки с номера по-малки от x, определяме с алгоритъм, подобен на този при теста за изоморфизъм на два дизайна, с тази разлика, че търсим пермутация, отговаряща на горните условия и трансформираща дизайна не в друг дизайн, а в самия себе си. Начинът, по който използваме подходящи инварианти и пропускаме част от пермутациите, е същият като в 2.4.

2.6 Намиране на неизоморфните резолюции

За да определим дали един дизайн е разрешим, подреждаме блоковете му в лексикографски ред и започваме да изграждаме паралелните класове. Нека вече сме избрали част от блоковете в даден паралелен клас. Да означим с x точката с най-малък номер, която участващите до момента в този паралелния клас блокове не съдържат. Следващия блок трябва да изберем измежду тези, които съдържат точката x и още $k-1$ точки с по-големи номера и все още не са избрани в някой паралелен клас. Тези блокове са съседни в лексикографската наредба и проверката дали някой от тях може да бъде включен в съответния паралелен клас става много бързо. Ако се окаже, че няма подходящ блок, се връщаме назад и избираме следващата възможност за предходния блок от паралелния клас.

При получаване на поредната резолюция на дизайна, проверяваме дали някой от автоморфизмите му не преобразува паралелните ѝ класове в тези на друга, вече построена резолюция. Ето защо, след конструирането на първата резолюция, генерираме всички автоморфизми на дизайна, като намираме пораждащо множество на тази група с алгоритъма от 2.5.

2.7 Тест за разложимост на квазикратен дизайн

Алгоритъмът за определяне дали един 2-(v,k,λ) дизайн е разложим на два 2-$(v,k,\frac{\lambda}{2})$ дизайна е подобен на този за търсене на резолюции. Подреждаме блоковете в лексикографски ред и започваме да изграждаме първия поддизайн. Ако вече сме избрали част от блоковете, определяме лексикографски най-малката двойка точки (x,y), която се среща в тях по-малко от $\frac{\lambda}{2}$ пъти. Следващия блок трябва да изберем измежду още неизползваните блокове, които съдържат тази двойка точки и още $k-2$ точки с по-големи номера от x. Тези блокове са съседни в лексикографската наредба. В случай, че няма подходящ блок, се връщаме назад и избираме следващата възможност за предходния.

Глава 3

Квазикратни дизайни

Обикновено квазикратните дизайни се разглеждат като допълнителен резултат от конструирането на други дизайни. Долна граница за техния брой се изчислява по формулите на Jungnickel [37], [38], [39]. Подходът към тях, използван в настоящата работа, е различен. Първо се построяват квазикратните дизайни, а после, наред с останалите им свойства, се определя дали са разложими или не. Целта на изследването е да бъде направена класификация на някои квазикратни дизайни със зададени автоморфизми, да се определи каква част от тях са разложими и дали има неразложими дизайни, които представляват особен интерес със своите свойства (резолюции, групи от автоморфизми и др.). По специфичен начин атакуваме и задачата за съществуването на дизайни с дадени параметри чрез построяване и класификация на техни квазикратни.

3.1 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизми от нечетен прост ред

Съществуването на 2-(21,5,2) дизайни следва от съществуването на 2-(21,5,1) дизайн (проективната равнина от ред 4). Поне 10 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни могат да бъдат построени [38], [58] чрез конкатенация на два 2-(21,5,1) дизайна. С други методи такива дизайни досега не са получавани [60]. Сред дизайните, конструирани в [58] има седем с автоморфизми от нечетен прост ред и три с автоморфизми от ред 2.

Целта на разглежданията в настоящата глава е да бъдат конструирани и изследвани всички неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизми от нечетен прост ред.

В таблиците са представени само тези дизайни (*избраните*), чиято пълна група от автоморфизми е транзитивна или от ред поне 28.

3.1.1 Възможни автоморфизми на 2-(21,5,2) дизайн

Теорема 3.1.1.1 *Най-големият възможен прост делител на реда на групата от автоморфизми на 2-(21,5,2) дизайн е равен на 7.*

Доказателство. От Теорема 1.4.1.1 следва, че ако 2-(21,5,2) дизайн притежава автоморфизъм от прост ред p, то $p \leq 10$ или $p|21$. $\diamondsuit$

Теорема 3.1.1.2 *Автоморфизъм от ред 7 на 2-(21,5,2) дизайн няма фиксирани точки и блокове.*

Доказателство. От Теорема 1.4.1.2 следва, че автоморфизъм от прост ред p ($p > 5$) на 2-(21,5,2) дизайн фиксира 0, 1 или 5 точки, а $21 - 1 = 20$ ($21 - 5 = 16$) и не се дели на 7. Следователно $f = 0$. $\diamondsuit$

Теорема 3.1.1.3 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(21,5,2) дизайн, то α фиксира една точка и два блока.*

Доказателство.

1. Нека α фиксира повече от една точка. Да означим с f броя на фиксираните точки ($f = 6, 11, 16$). Понеже $k = 5$, всеки фиксиран блок съдържа или 5 фиксирани или 5 нефиксирани точки. Фиксираните блокове, съдържащи само фиксирани точки, образуват $2-(f, 5, 2)$ дизайн. Такъв дизайн съществува само за $f = 11$, но тогава всяка фиксирана точка трябва да се съдържа в 5 фиксирани и 5 нефиксирани блока, а това е невъзможно (нетривиалните блокови орбити са не повече от 6). Следователно α фиксира не повече от една точка.

2. Нека α фиксира 1 точка и h блока ($h = 2, 7, 12, 17, ..., 37$). В този случай всеки фиксиран блок съдържа 5 нефиксирани точки от една и съща точкова орбита. Понеже не може да има повече от два еднакви блока ($\lambda = 2$), а броят на точковите орбити е четири, то броят на фиксираните блокове е не повече от 8, т.е. получаваме $h = 2$ или $h = 7$.

Да допуснем, че $h = 7$. Да приемем, че α действа по следния начин:
върху точките: α =(1,2,3,4,5) ... (16,17,18,19,20)(21)
върху блоковете: α =(1,2,3,4,5) ... (31,32,33,34,35)(36)(37) ... (42)
Матрицата на инцидентност на дизайна представяме във вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{17} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{27} & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{37} & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{47} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ u & u & z & \dots & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{4\times 7}$ получаваме:

$$\sum_{j=1}^{7} m_{ij} = 8, \quad \sum_{j=1}^{7} m_{ij}^2 = 8, \quad i = 1,2,3.$$

Тази система няма решения в цели числа. Единствената възможност е $h = 2$. ◇

Теорема 3.1.1.4 *Ако α е автоморфизъм от ред 3 на 2-(21,5,2) дизайн, то са възможни 3 случая:*

- *α не фиксира никакви точки и блокове,*
- *α фиксира 3 точки и 6 блока,*
- *α фиксира 6 точки и 12 блока.*

Доказателство. Нека α фиксира f точки и h блока. Всеки фиксиран блок съдържа или 2, или 5 фиксирани точки. Да означим с h_1 броя на фиксираните блокове, състоящи се от 5 фиксирани точки, а с h_2 – на тези, съдържащи само 2 фиксирани точки.

Понеже $p > \lambda$ всяка двойка фиксирани точки се съдържа в λ фиксирани блока, като в блок, съдържащ 5 фиксирани точки има $\binom{5}{2}$ различни двойки, а в блок с 2 фиксирани точки – една двойка. Тогава $\binom{5}{2}h_1 + h_2 = 2\binom{f}{2}$, от където получаваме:

$$10h_1 + h_2 = f(f-1). \tag{3.1}$$

Точките от една нетривиална точкова орбита се съдържат в не повече от два фиксирани блока ($\lambda = 2$), а броят на нетривиалните точкови орбити е $\dfrac{(21-f)}{3}$. Следователно:

$$h_2 \leq \frac{2(21-f)}{3}. \tag{3.2}$$

Фиксираните точки се срещат в блоковете на дизайна $10f$ пъти, сред които $5h_1 + 2h_2$ пъти във фиксираните блокове. Понеже нефиксиран блок съдържа най-много една фиксирана точка, броят на нефиксираните блокове, съдържащи фиксирани точки е $10f - 5h_1 - 2h_2$. Тогава $10f - 5h_1 - 2h_2 \leq 42 - h_1 - h_2$ и получаваме:

$$h_2 \geq 10f - 42 - 4h_1. \tag{3.3}$$

От условията (3.1),(3.2) и (3.3) следва, че за f, h_1 и h_2 има 3 възможности:

1) $f = 0$, $h = 0$; 2) $f = 3$, $h_1 = 0$, $h_2 = 6$; 3) $f = 6$, $h_1 = 2$, $h_2 = 10$. ◇

3.1.2 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 7

Нека D е 2-(21,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 7. Според Теорема 3.1.1.2 α е без фиксирани точки и блокове. Ще считаме, че действа по следния начин:
върху точките: α =(1,2,3,4,5,6,7)(8,9,10,11,12,13,14)(15,16,17,18,19,20,21)
върху блоковете: α =(1,2,3,4,5,6,7)(8,9, ...,14) ... (36,37,38,39,40,41,42)

Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{36} \end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{3\times 6}$ получаваме:

$$\left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{6} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{6} m_{ij}^2 = 22, & i = 1,2,3 \\ \sum_{j=1}^{6} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 14, & i_1, i_2 = 1,2,3, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Съществуват три нееквивалентни матрици, за които е изпълнено (3.4).

$$M_1 = \begin{pmatrix} 331111 \\ 113311 \\ 111133 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 232210 \\ 102322 \\ 221023 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 111133 \\ 122302 \\ 322120 \end{pmatrix}$$

Замяната на елементите им с циркуланти води до 27 неизоморфни дизайни (13 от M_1, 11 от M_2 и 3 от M_3) *Избраните* са представени в Таблица 3.1.1.

3.1.3 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5

Нека D е 2-(21,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 5. Според Теорема 3.1.1.3 този автоморфизъм фиксира 1 точка и 2 блока. Без ограничение на общността можем да считаме, че α действа така:
върху точките: α =(1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10) ... (16,17,18,19,20)(21)
върху блоковете: α =(1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10) ... (36,37,38,39,40)(41)(42)

Има две възможности за матрицата на инцидентност на дизайна D :

Случай 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{18} & u^t & z^t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{28} & z^t & u^t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{38} & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{48} & z^t & z^t \\ u & u & z & \dots & z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Случай 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{18} & u^t & u^t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{28} & z^t & z^t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{38} & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{48} & z^t & z^t \\ u & u & z & \dots & z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица 3.1.1: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 7

No	P_1	P_8	P_{15}	Aut	red
M_1	0001112345	0122233345	0123444555		
1	1241241111	1134634622	1122346346	120960t	◇
2	1241241111	1234645723	1425346267	21t	◇
3	1241341111	1134623724	1124346237	28	◇
4	1241341111	1134623724	1225346134	42t	◇
5	1241341111	1134623724	1521346467	42t	◇
6	1241341111	1134623724	1622346157	28	◇
7	1241341111	1212435634	1631267245	336t	
8	1241341111	1634615722	1622346157	252t	◇
M_2	0011122334	0223334455	0011244555		
9	1212513131	1451254613	1346145256	21t	
10	1212513131	1452561613	1327645147	21t	
11	1213512141	1255673613	1317624367	21t	
12	1213514121	1453573612	1423245135	21t	
13	1213514121	1562464712	1445256136	21t	

Условията, на които трябва да отговаря съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{4\times 8}$ получаваме от Теорема 1.4.2.1. Те са различни в двата случая.

$$\textbf{Случай 1.} \quad \left| \begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 9, & \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 13, & i = 1,2 \\ \sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 10, & \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 18, & i = 3,4 \\ \sum_{j=1}^{8} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & & i_1, i_2 = 1,2,3,4, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \qquad (3.5)$$

Условията (3.5) са изпълнени за 9 нееквивалентни матрици. Чрез замяна с циркуланти и добавяне на фиксираните точка и блокове са получени 262 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. *Избраните* са в Таблица 3.1.2.

Таблица 3.1.2: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 - случай 1.

No	P_1	P_6	P_{11}	P_{16}	P_{21}	Aut	red
orb	0134566778	0124455679	0122335577	0122334466			
1	1111112131	1113425421	1125253445	1134342535	01	40	$\diamond$
2	1111112131	1112534421	1125342545	1134253435	01	3840	$\diamond$
orb	0134566778	0124455679	0123334557	0122234667			
3	1111112131	1112423551	1142353454	1123545342	01	160	

Случай 2.

$$\left|\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{8} m_{1j} = 8, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{1j}^2 = 8 & & \\ \sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 18, & i = 2,3,4 & \\ \sum_{j=1}^{8} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & i_1, i_2 = 1,2,3,4, \; i_1 \neq i_2. & \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Условията (3.6) са в сила за 7 нееквивалентни матрици, от които са получени 181 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. *Избраните* са представени в Таблица 3.1.3.

Таблица 3.1.3: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 - случай 2.

No	P_1	P_6	P_{11}	P_{16}	P_{21}	Aut	red
orb	0123456789	1134556677	0122334477	0022345566			
1	1111111111	1244353512	1125342534	1313224545	01	120	
orb	0123456789	0144556677	0122336677	0122334455			
2	1111111111	1134253425	1134252534	1125342534	01	120	$\diamond$
3	1111111111	1234451325	1213254534	1245342513	01	480	$\diamond$
4	1111111111	1234134525	1245251334	1213342545	01	30	$\diamond$
orb	0123456789	0144556677	1123334567	0022234567			
5	1111111111	1123452435	1241245335	1312325454	01	320	
6	1111111111	1223453514	1241354235	1323425415	01	80	

3.1.4 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки

Нека D е 2-(21,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 3, действащ както следва:

върху точките: $\alpha =(1,2,3)(4,5,6)\ \dots\ (19,20,21)$, върху блоковете: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)\ \dots\ (40,41,42)$.

Тогава матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,14} \\ \dots & & & \\ a_{71} & a_{72} & \dots & a_{7,14} \end{pmatrix}$$

Според Теорема 1.4.2.1 съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{7\times 14}$ удовлетворява:

$$\left| \begin{array}{lll} \sum\limits_{j=1}^{14} m_{ij} = 10, & \sum\limits_{j=1}^{14} m_{ij}^2 = 14, & i = 1,2,...,7 \\ \sum\limits_{j=1}^{14} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, & & i_1, i_2 = 1,2,...,7,\ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Условията (3.7) са изпълнени за 718 нееквивалентни матрици. От тях се получават 9538 неизоморфни дизайни. *Избраните* са дадени в Таблица 3.1.4.

3.1.5 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 3 фиксирани точки

Нека D е 2-(21,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 3, фиксиращ 3 точки и (според Теорема 3.1.1.4) 6 блока и действащ както следва:

върху точките: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)\ \dots\ (16,17,18)(19)(20)(21)$,

върху блоковете: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)\ \dots\ (34,35,36)(37)(38)\dots(42)$.

Матрицата на инцидентност на дизайна D можем да представим като:

$$\begin{pmatrix} A & H \\ F & C \end{pmatrix}$$

където C е матрица на инцидентност на 2-(3,2,2) дизайн, а F е еквивалентна на матрицата:

$$\begin{pmatrix} zzzzzzuuzzzz \\ zzzzzzzzuuzz \\ zzzzzzzzzzuu \end{pmatrix}$$

Съществуват четири възможности за матрицата H:

Случай 1

$$\begin{pmatrix} u^t u^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t u^t u^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t u^t u^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t \end{pmatrix}$$

Случай 2

$$\begin{pmatrix} u^t u^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t u^t u^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t u^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t u^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t \end{pmatrix}$$

Случай 3

$$\begin{pmatrix} u^t u^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t u^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t u^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t u^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t u^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t \end{pmatrix}$$

Случай 4

$$\begin{pmatrix} u^t z^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t u^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t u^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t u^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t u^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t u^t \end{pmatrix}$$

Таблица 3.1.4: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки

P_1 се съдържа в блоковете 1,2,4,5,7,10,13,16,19,22.

No	P_4	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	Aut	red
orb	2345678899	234567aabb	012389aacc	014588bbcd	016799abdd	234567ccdd		
1	1123231212	1212331212	1122111312	1122231331	1122232223	1233122313	36	
orb	22334589ab	01678899ab	44556789cd	236677abcd	0145aabbcd	012389ccdd		
2	1212331111	1122121233	1212331111	1123232222	1122121233	1223131223	108	◇
orb	22334589ab	01678899ab	2446678acd	3556779bcd	01358aaccd	01249bbcdd		
3	1212331111	1122121233	1232312211	1231232211	1122312132	1122312213	36	◇
4	1223131111	1122131232	1132322211	1123231133	1122212232	1122313113	36	◇
orb	22334589ab	01678899ab	2446678acd	03577aabcd	145569bbcd	012389ccdd		
5	1212331111	1122121233	1232312211	1221312322	1213231222	1122331313	108	◇
6	1212331111	1122121233	1232312211	1221312322	1213231222	1223131213	54	◇
orb	22334589ab	04467889ac	15567899bd	236677abcd	01259aaccd	01348bbcdd		
7	1223311111	1132213321	1132221231	1123231233	1312213121	1321213323	36	◇
orb	22334589ab	04467889ac	0256699bcd	134779bbcd	125578accd	01368aabdd		
8	1212331111	1132212331	1221312311	1221331211	1213233231	1122312323	36	◇
orb	22334589ab	02667889ac	0147899bbd	135779aacd	03446abccd	125568bcdd		
9	1212331111	1212323311	1122312121	1231232312	1223123233	1212313113	36	
10	1212331111	1213212331	1122312121	1221331211	1213233231	1213233123	36	
orb	22334589ab	02667889ac	0147899bbd	12577aabcd	134469accd	035568bcdd		
11	1212331111	1212323311	1122312121	1231223312	1223132233	1212313113	36	
orb	22334589ab	02667889ac	136779abbd	14457899cd	0124aabccd	035568bcdd		
12	1212331111	1213212331	1221333121	1132231211	1122123231	1213233123	36	◇
orb	22334589ab	02667889ac	014699abbd	135779aacd	124478bccd	035568bcdd		
13	1212331111	1213212331	1122123121	1221331211	1212313232	1213233123	36	◇

За всеки от четирите случая поотделно ще разгледаме условията, на които според Теорема 1.4.2.1 трябва да отговаря съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{6\times 12}$.

Случай 1.
$$\left|\begin{array}{lll} \sum\limits_{j=1}^{12} m_{ij} = 8, & \sum\limits_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 8, & i = 1,2,3 \\ \sum\limits_{j=1}^{12} m_{ij} = 10, & \sum\limits_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 14, & i = 4,5,6 \\ \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, & & i_1, i_2 = 1,2,...,6,\ i_1 \neq i_2. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Пет нееквивалентни матрици удовлетворяват (3.8). Посредством замяна с циркуланти и добавяне на фиксираните точки и блокове по всички възможни начини са получени 363 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. *Избраните* са представени в Таблица 3.1.5.

Таблица 3.1.5: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 3 фиксирани точки - случай 1

P_1 се съдържа в блоковете $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 37, 38$.

No	P_4	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	Aut	red
orb	01234589ef	012345abgh	01236788aa	44556789ab	01236799bb					
1	1122331111	1133221111	1212332313	1212331122	1313221223	67efgh	89cdgh	abcdef	96	
orb	01234589ef	012345abgh	00116789ab	22336789ab	44556789ab					
2	1122331111	1133221111	1212333333	1212332211	1212331122	67efgh	8acdfh	9bcdeg	1152	◇
3	1122331111	1133221111	1212333333	1212332211	1223131223	68dfgh	7bcefh	9acdeg	36	◇
4	1122331111	1133221111	1212333333	1223132312	1223131223	68dfgh	7bcefh	9acdeg	36	◇
5	1122331111	1133221111	1223131313	1223133221	1223132132	67efgh	8acdfh	9bcdeg	36	
6	1122331111	1133221111	1223131313	1223133221	1223132132	67efgh	8bcdfh	9acdeg	36	◇
7	1122331111	1213231111	1212333323	1212332231	1212331112	67efgh	89cdgh	abcdef	576	◇
8	1122331111	1213231111	1212333323	1212332231	1212331112	68dfgh	79cegh	abcdef	1152	◇
9	1122331111	1213231111	1223131333	1213322133	1223132122	67efgh	89cdgh	abcdef	36	◇
10	1122331111	1213231111	1223131333	1213322133	1223132122	68dfgh	79cegh	abcdef	36	
11	1122331111	1213231111	1223131333	1213322133	1223132122	69dfgh	78cegh	abcdef	36	◇
12	1122331111	1213231111	1213232313	1223312332	1213233132	67efgh	89cdgh	abcdef	36	◇
13	1122331111	1213231111	1213232313	1223312332	1213233132	68dfgh	79cegh	abcdef	36	
14	1122331111	1213231111	1213232313	1223312332	1213233132	69dfgh	78cegh	abcdef	36	◇
15	1123231111	1132321111	1212333333	1212331212	1212332121	67efgh	89cdgh	abcdef	96	◇
16	1213231111	1312321111	1212332313	1212333132	1212331221	67efgh	89cdgh	abcdef	36	◇
17	1213231111	1312321111	1212332313	1212333132	1212331221	67efgh	8acdfh	9bcdeg	36	
18	1213231111	1312321111	1212332313	1212333132	1212331221	67efgh	8bcdfh	9acdeg	36	◇

Случай 2.

$$\left| \begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 8, & \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 8, & i = 1,2 \\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 9, & \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 11, & i = 3,4 \\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 10, & \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 14, & i = 5,6 \\ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, & & i_1, i_2 = 1,2,...,6, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Двадесет нееквивалентни матрици удовлетворяват (3.9). От тях се получават 1876 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. *Избраните* са в Таблица 3.1.6.

Таблица 3.1.6: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 3 фиксирани точки - случай 2

P_1 се съдържа в блоковете $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 37, 38$.

No	P_4	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	Aut	red
orb	01234589ef	0012368abg	0114579abh	24456788ab	23356799ab					
1	1123321111	1231322111	1231233221	1132322333	1233121222	67efgh	89cdgh	abcdef	96	
orb	01234589ef	0012368abg	0114579abh	23457788ab	23456699ab					
2	1123231111	1232133111	1233211221	1233121211	1123232322	67efgh	89cdgh	abcdef	384	
orb	01234589ef	0012368abg	0114579abh	22446789ab	33556789ab					
3	1122331111	1231321111	1233123221	1213323213	1213232313	67efgh	89cdgh	abcdef	48	
4	1123231111	1231322111	1232133221	1212332233	1212331111	67efgh	89cdgh	abcdef	48	
5	1123231111	1232133111	1233211221	1212332222	1212331133	67efgh	89cdgh	abcdef	96	$\diamond$
6	1123321111	1232133111	1232311221	1213233222	1223133133	67efgh	8acdfh	9bcdeg	192	$\diamond$
7	1213231111	1212333111	1133221221	1212332322	1223132111	67efgh	89cdgh	abcdef	96	$\diamond$
8	1213231111	1212333111	1133221221	1212332322	1223132111	67efgh	8acdfh	9bcdeg	96	$\diamond$
9	1213321111	1223133111	1122332221	1223132311	1223133133	67efgh	89cdgh	abcdef	48	$\diamond$

Случай 3.

$$\left|\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{12} m_{1j} = 8, & \sum_{j=1}^{12} m_{1j}^2 = 8 & \\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 9, & \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 11, & i = 2,3,4,5 \\ \sum_{j=1}^{12} m_{6j} = 10, & \sum_{j=1}^{12} m_{6j}^2 = 14 & \\ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, & & i_1, i_2 = 1,2,...,6, \;\; i_1 \neq i_2. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Условията (3.10) са изпълнени за 29 нееквивалентни матрици. Получени са 3584 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. *Избраните* дизайни са представени в Таблица 3.1.7.

Случай 4.

$$\left|\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 9, & \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 11 & i = 1,2,...,6 \\ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, & & i_1, i_2 = 1,2,...,6, \;\; i_1 \neq i_2. \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Дванадесет нееквивалентни матрици отговарят на условията (3.11), водейки до 1263 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. Всички *избрани* сред тях имат и автоморфизъм от ред 3 и вече са представени в Таблица 3.1.4.

Таблица 3.1.7: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 3 фиксирани точки - случай 3

P_1 се съдържа в блоковете $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 37, 38$.

No	P_4	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	Aut	red
orb	00123689ae	12344689bf	0114578abg	0224579abh	33556789ab					
1	1212331111	1321321211	1122333211	1133221221	1212331323	67efgh	89cdgh	abcdef	48	
2	1212331111	1321321211	1122333211	1133221221	1212331323	67efgh	8acdfh	9bcdeg	48	
3	1212331111	1321321211	1122333211	1133221221	1212331323	67efgh	9acdfg	8bcdeh	48	
4	1212331111	1321321211	1122333211	1133221221	1212333212	67efgh	89cdgh	abcdef	96	
5	1212331111	1321321211	1122333211	1133221221	1212333212	67efgh	8acdfh	9bcdeg	48	
6	1212331111	1321322111	1122332331	1133222131	1212331231	67efgh	89cdgh	abcdef	48	
7	1212331111	1321322111	1122332331	1133222131	1212331231	67efgh	8acdfh	9bcdeg	48	
8	1212331111	1321322111	1122332331	1133222131	1212331231	67efgh	9acdfg	8bcdeh	48	
9	1212331111	1321322111	1122332331	1133222131	1212332312	67efgh	89cdgh	abcdef	384	
10	1212331111	1321322111	1122332331	1133222131	1212332312	67efgh	8acdfh	9bcdeg	192	◇
11	1213231111	1232313111	1233212111	1132322311	1223131321	67efgh	89cdgh	abcdef	192	
12	1213231111	1232313111	1233212111	1132322311	1223131321	67efgh	8acdfh	9bcdeg	96	◇
13	1213321111	1212333111	1233122111	1132232311	1213233213	67efgh	89cdgh	abcdef	48	

3.1.6 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 6 фиксирани точки

Нека D е 2-(21,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 3, фиксиращ 6 точки и 12 блока (според Теорема 3.1.1.4) и действащ по следния начин:

върху точките: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)\ \dots\ (13,14,15)(16)(17)\dots(21)$,

върху блоковете: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)\ \dots\ (28,29,30)(31)(32)\ \dots\ (42)$.

Матрицата на инцидентност на D можем да представим във вида:

$$\begin{pmatrix} A & H \\ F & C \end{pmatrix}$$

Матрицата C е еквивалентна на едната от матриците C_1 и C_2, матрицата F – на F_1 или F_2, а за матрицата H съществува единствена възможност с точност до еквивалентност.

$$H = \begin{pmatrix} z^t z^t u^t u^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t u^t u^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t u^t u^t z^t z^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t u^t u^t z^t z^t \\ z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t z^t u^t u^t \end{pmatrix} F_1 = \begin{pmatrix} uzzzzzzzzz \\ zuzzzzzzzz \\ zzuuzzzzzz \\ zzzzuuzzzz \\ zzzzzzuuzz \\ zzzzzzzzuu \end{pmatrix} F_2 = \begin{pmatrix} zzzzzzzzzz \\ uuzzzzzzzz \\ zzuuzzzzzz \\ zzzzuuzzzz \\ zzzzzzuuzz \\ zzzzzzzzuu \end{pmatrix}$$

$$C_1=\begin{pmatrix}010000111111\\101111000011\\110001000100\\110010001000\\110100010000\\111000100000\end{pmatrix}\quad C_2=\begin{pmatrix}001111111111\\110000000011\\110000001100\\110000110000\\110011000000\\111100000000\end{pmatrix}$$

Да разгледаме съкратената орбитна матрица $M=(m_{ij})_{5\times 10}$. От Теорема 1.4.2.1 следва:

$$\left|\begin{array}{ll}\sum_{j=1}^{10} m_{ij}=8, \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2=8, & i=1,2,...,5\\ \sum_{j=1}^{10} m_{i_1 j}m_{i_2 j}=6, & i_1,i_2=1,2,...,5,\ i_1\neq i_2.\end{array}\right. \qquad (3.12)$$

С точност до еквивалентност съществува една матрица, която удовлетворява (3.12) - матрицата на инцидентност на 2-(5,4,6) дизайн. След замяна на елементите ѝ с циркуланти и добавяне на фиксираната част по всевъзможните начини, са конструирани 6013 неизоморфни 2-(21,5,2) дизайни. *Избраните* са в Таблица 3.1.8.

Таблица 3.1.8: 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 3 с 6 фиксирани точки

P_1 се съдържа в блоковете $1,4,7,10,13,16,19,22,33,34$. P_4 на дизайните с номера 1, 2 и 3 се съдържа в блоковете $1,4,8,11,15,18,25,28,35,36$, а на останалите – в блоковете $1,4,8,12,14,18,25,28,35,36$.

No	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	Aut	red
or	01236789gh	01456789ij	23456789kl								
1	1133223311	1122332211	1133222211	0bdfhjkl	1acegikl	24abhi	35abgj	68abde	79abcf	48	◇
2	1133223311	1122332211	1133222211	cdefghijkl	02abjl	13abik	46abfh	57abeg	89abcd	1536	◇
3	1133223311	1122332211	1133222211	cdefghijkl	02abjl	14abhk	36abfi	57abeg	89abcd	384	◇
4	1132232311	1132323211	1123233211	0bdfhjkl	1acegikl	23abij	45abgh	67abef	89abcd	384	◇
5	1132232311	1132323211	1123233211	0bdfhjkl	1acegikl	46abfg	57abeh	28abdi	39abcj	48	
6	1132232311	1132323211	1123233211	0bdfhjkl	1acegikl	46abfg	57abeh	39abdi	28abcj	48	◇
7	1132232311	1132323211	1123322311	0bdfhjkl	1acegikl	23abij	45abgh	67abef	89abcd	48	
8	1132232311	1132323211	1123233211	cdefghijkl	01abkl	23abij	45abgh	67abef	89abcd	192	◇
9	1132232311	1132323211	1123233211	cdefghijkl	01abkl	46abfh	57abeg	28abdj	39abci	192	◇
10	1132232311	1132323211	1123233211	cdefghijkl	01abkl	47abfh	56abeg	29abdj	38abci	48	

3.1.7 Изследване на получените дизайни

За всеки дизайн е изчислен редът на пълната група от автоморфизми. За броя на неизоморфните дизайни с автоморфизми от нечетен прост ред получаваме:

$$
\begin{array}{rl}
 27 & \text{(с автоморфизми от ред 7)} \\
+ \quad 443 & \text{(с автоморфизми от ред 5)} \\
+ \ 22545 & \text{(с автоморфизми от ред 3)} \\
- \quad\ \ 1 & \text{(с автоморфизми от ред 5 и от ред 7)} \\
- \quad\ \ 6 & \text{(с автоморфизми от ред 3 и от ред 5)} \\
- \quad 11 & \text{(с автоморфизми от ред 3 и от ред 7)} \\
+ \quad\ \ 1 & \text{(с автоморфизми от ред 3, от ред 5 и от ред 7)} \\
\hline
22998 & \text{(с произволен автоморфизъм от нечетен прост ред)}
\end{array}
$$

Класификация на дизайните според реда на тяхната пълна група от автоморфизми е представена в Таблица 3.1.9, където в началото на всеки ред е записан редът на пълната група от автоморфизми (Aut), а в началото на всяка графа – конструктивният автоморфизъм. Чрез съкращението ${p_{f,h}}^N$ в заглавния ред е означен N-ия случай на конструктивен автоморфизъм от ред p, фиксиращ f точки и h блока. Минуси стоят пред броя на дизайните, които са получени с повече от един конструктивен автоморфизъм и вече са влезли в броя на дизайните от някоя по-лява графа на таблицата.

Инвариантите, описани в Раздел 2.4, разбиват множеството от всички неизоморфни дизайни на 22857 подмножества с еднакви инварианти. Само 95 от тези подмножества се състоят от повече от един дизайн.

За броя на разложимите дизайни се получиха следните резултати:

Констр.автом.	$7_{0,0}$	${5_{1,2}}^1$	${5_{1,2}}^2$	$3_{0,0}$	${3_{3,6}}^1$	${3_{3,6}}^2$	${3_{3,6}}^3$	${3_{3,6}}^4$	$3_{6,12}$	Общо
Разложими	10	40	22-1	2338-5	124-13	480-1	414	70-10	727-25	4170

В работите [38] и [58] е доказано, че броят на дизайните, които могат да бъдат построени като кратни на два 2-(21,5,1), е поне 10, а в настоящата работа са конструирани 4170 такива дизайни. Вероятно могат да бъдат намерени още общи конструкции, подобни на тези от [38] и [58], водещи до неизоморфни кратни дизайни.

Прави впечатление, че неразложимите 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизми от нечетен прост ред са много повече от разложимите.

Сред намерените дизайни има 4752, които притежават и автоморфизъм от ред 2. Броят на всички 2-(21,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 2 е вероятно много по-голям, а задачата за тяхната класификация – по-трудна.

Таблица 3.1.9: Ред на пълната група от автоморфизми на 2-(21,5,2) дизайни

Aut	Конструктивен автоморфизъм									
	$7_{0,0}$	$5_{1,2}{}^{1}$	$5_{1,2}{}^{2}$	$3_{0,0}$	$3_{3,6}{}^{1}$	$3_{3,6}{}^{2}$	$3_{3,6}{}^{3}$	$3_{3,6}{}^{4}$	$3_{6,12}$	Общо
3				8315	48	1291	3103	782	4307	17846
5		224	146							370
$6=2.3$				1140	165	492	403	369	1417	3986
7	7									7
$9=3^2$				16	3-2			14-14	1-1	17
$10=2.5$		35	28							63
$12=2^2.3$				14	94	68	61	71	196	504
$14=2.7$	7									7
$18=2.3^2$				29	22-9			20-20	13-13	42
$21=3.7$	6			6-6						6
$24=2^3.3$					4	15	4		48	71
$28=2^2.7$	2									2
$30=2.3.5$			1						1-1	1
$36=2^2.3^2$				10	17-4			6-6	11-11	23
$40=2^3.5$		1								1
$42=2.3.7$	2			2-2						2
$48=2^4.3$						3	8		5	16
$54=2.3^3$				1	1-1				1-1	1
$80=2^4.5$			1							1
$96=2^5.3$					2	4	2			8
$108=2^2.3^3$				2	2-2				2-2	2
$120=2^3.3.5$			2		1-1				1-1	2
$160=2^5.5$		1								1
$192=2^6.3$						1	2		2	5
$252=2^2.3^2.7$	1			1-1				1-1		1
$320=2^6.5$			1							1
$336=2^4.3.7$	1			1-1						1
$384=2^7.3$						1	1		2	4
$480=2^5.3.5$			1						1-1	1
$576=2^6.3^2$					1				1-1	1
$1152=2^7.3^2$					2				2-2	2
$1536=2^9.3$									1	1
$3840=2^8.3.5$		1				1-1				1
$120960=2^7.3^3.5.7$	1		1-1	1-1	1-1				1-1	1
Общо	27	262	181-1	9538-11	363-20	1876-1	3584	1263-41	6013-35	22998

3.2 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизми от ред 5

Съществуването на 2-(25,5,2) дизайни следва от съществуването на 2-(25,5,1) дизайн. Най-малко 28 неизоморфни 2-(25,5,2) дизайни могат да бъдат построени [38] като кратни на два 2-(25,5,1) дизайна. Дизайни, получени по този начин, са винаги разрешими, защото съществува точно един 2-(25,5,1) дизайн (афинната равнина от ред 5), който е разрешим. До настоящата работа дизайни с тези параметри не са конструирани по други начини [60]. Интересно беше да се установи дали съществуват 2-(25,5,2) дизайни, които не са разложими до два 2-(25,5,1) дизайна, и по-специално, дали има разрешими, но неразложими дизайни.

Целта на настоящето изследване е да бъдат построени и класифицирани според реда на групата от автоморфизми неизоморфните 2-(25,5,2) дизайни, притежаващи автоморфизъм от ред 5 и да бъде установено каква част от тях са разрешими и каква – разложими до два 2-(25,5,1) дизайна.

В таблиците са дадени само *избраните* дизайни, които в този случай отговарят на поне едно от следните условия:

- групата от автоморфизмите им е транзитивна или с ред поне 50
- те са разрешими и неразложими
- имат поне две неизоморфни резолюции

3.2.1 Относно автоморфизмите на 2-(25,5,2) дизайн

Теорема 3.2.1.1 *Най-големият прост делител на реда на групата от автоморфизми на 2-(25,5,2) дизайн е 5.*

Доказателство. От Теорема 1.4.1.1 следва, че 2-(25,5,2) дизайн може да има автоморфизми от прост ред 2, 3, 5, 7 и 11. Според Теорема 1.4.1.2 автоморфизми от ред 7 или 11 на такъв дизайн фиксират или 5, или 6 точки, а това е невъзможно, защото p трябва да дели $v - f$. Следователно 2-(25,5,2) дизайн не може да притежава автоморфизъм от прост ред по-голям от 5. ◇

Лема 3.2.1.2 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(25,5,2) дизайн, то α е с нула или с пет фиксирани точки.*

Доказателство. Нека $f > 0$. Понеже k е равно на реда на α, фиксиран блок съдържа или само фиксирани, или само нефиксирани точки. Винаги трябва да има поне два фиксирани блока, състоящи се само от фиксирани точки, защото всяка двойка фиксирани точки трябва да бъде в точно два блока ($\lambda = 2$). Фиксираните блокове, които имат само фиксирани точки, образуват 2-(f,5,2) дизайн, а такъв съществува само за $f = 5$. $\diamondsuit$

Лема 3.2.1.3 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(25,5,2) дизайн и α е без фиксирани точки, то α фиксира не повече от 10 блока.*

Доказателство. Ако нефиксирана точка се съдържа в някой фиксиран блок, то всички точки от нейната точкова орбита спрямо α също се съдържат в този фиксиран блок. Но точковите орбити са 5 и точки от една и съща точкова орбита не могат да се съдържат в повече от два фиксирани блока ($\lambda = 2$). $\diamondsuit$

Лема 3.2.1.4 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(25,5,2) дизайн и α фиксира 5 точки, то α фиксира или 5 или 10 блока.*

Доказателство. Фиксираните точки са в два фиксирани блока (образуващи 2-(5,5,2) дизайн), а нефиксираните са в не повече от 8 фиксирани блока, защото има 4 нетривиални точкови орбити, а точките от една и съща нетривиална точкова орбита не могат да се съдържат в повече от два фиксирани блока ($\lambda = 2$)). $\diamondsuit$

Теорема 3.2.1.5 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(25,5,2) дизайн D, то за него е в сила една от следните пет възможности:*

- *без фиксирани точки и блокове,*
- *без фиксирани точки и с 5 фиксирани блока,*
- *без фиксирани точки и с 10 фиксирани блока,*
- *с 5 фиксирани точки и с 5 фиксирани блока,*
- *с 5 фиксирани точки и с 10 фиксирани блока.*

Доказателство. Следва от Леми 3.2.1.2, 3.2.1.3 и 3.2.1.4. $\diamondsuit$

3.2.2 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и блокове

Нека D е 2-(25,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 5 без фиксирани точки и блокове. Без ограничение на общността можем да считаме, че α действа както следва:
върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(21,22,23,24,25)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(56,57,58,59,60)$.

Тогава матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,12} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{5,12} \end{pmatrix}$$

Следните уравнения (по Теорема 1.4.2.1) са в сила за съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{5\times 12}$.

$$\left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 12, \quad \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 20, & i = 1,2,...,5 \\ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & i_1, i_2 = 1,2,...,5,\ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \qquad (3.13)$$

Има 192 нееквивалентни матрици, за които тези уравнения са в сила. Първите им два реда са едни и същи за голям брой матрици, т.е.

първи ред	матрици	първи ред	матрици
222211110000	1-190	321111111000	191,192

втори ред	матрици	втори ред	матрици	втори ред	матрици
110022112200	1-42	100022221110	43-49	110022202110	50-105
200022112110	106-134	210021102210	135-158	200022201111	159
210022002111	160-164	220011002211	165	110031112110	166-174
111021103110	175-181	210011113110	182-187	111111003210	188
111031002111	189	300011112111	190	003211111110	191
013111110210	192				

Останалите три реда на тези матрици са представени по-долу като в скоби е даден броят на неизоморфните дизайни, получени при замяната на елементите на всяка от тях с циркуланти.

M_1(316)	M_2(153)	M_3(732)	M_4(342)	M_5(110)	M_6(197)	M_7(326)
002100222111	002100222111	002100222111	002100222111	002200112211	002200112211	002200112211
100221101022	200120110122	101121100131	110120110131	001122110022	111020201022	201020111022
121001010222	021102001122	120101011113	111102001113	220000111122	110102020122	020102110122
M_8(157)	M_9(338)	M_{10}(306)	M_{11}(119)	M_{12}(148)	M_{13}(376)	M_{14}(228)
002200112211	002200112211	001120221021	001120221021	001120221021	002011221021	002011221021
111011201031	111020111031	112100002221	111102002022	111102001131	200200111221	200200112112
110111020113	110102110113	110102110113	111100110312	111100111203	021111001113	021111000222
M_{15}(103)	M_{16}(118)	M_{17}(1096)	M_{18}(487)	M_{19}(575)	M_{20}(277)	M_{21}(1049)
002011221021	002011221021	002111202021	002111202021	002111202021	002111202021	002111202021
110211002022	110211001131	100210120221	201100021221	200200111212	110211000222	210110100222
111100110312	111100111203	121001011113	020111110113	021011020122	111000131112	011101031112
M_{22}(290)	M_{23}(246)	M_{24}(286)	M_{25}(1302)	M_{26}(398)	M_{27}(427)	M_{28}(337)
002111202021	002111202021	002111202021	002120112021	002120112021	002120112021	002120112021
110100131121	111100110321	110111020131	100201210221	200200111212	111100110321	110102110131
111111000213	110111021013	111100111203	121001011113	021002110122	110102111013	111100111203
M_{29}(490)	M_{30}(813)	M_{31}(117)	M_{32}(844)	M_{33}(273)	M_{34}(247)	M_{35}(661)
102010212021	102010212021	102010212021	102010212021	002120201121	002120201121	002120201121
010210120221	001202021112	100210120212	010212011022	201100022112	110202001122	101101031121
111102001113	120110100222	021102001122	111100110312	020102110122	111000131112	120101101113

$M_{36}(284)$	$M_{37}(526)$	$M_{38}(459)$	$M_{39}(68)$	$M_{40}(101)$	$M_{41}(91)$	$M_{42}(245)$
002120201121	002120201121	002211002121	001122110022	201120001122	201120001122	101110301121
110100131121	210101011131	111000311121	111100112130	011101211130	011101301121	011110031121
111102001113	011101121103	110111020113	111100111203	011101121103	011101031112	111102001113
$M_{43}(69)$	$M_{44}(101)$	$M_{45}(331)$	$M_{46}(146)$	$M_{47}(420)$	$M_{48}(167)$	$M_{49}(237)$
021111002220	021111002220	121020002211	111111003201	111111003201	111111003201	121011003111
201100112202	201100202112	101201101131	111100201131	121000111131	111110100231	101200111311
011111110023	011111020113	011101121103	011111020113	001211110113	011101121013	011111110023
$M_{50}(281)$	$M_{51}(203)$	$M_{52}(341)$	$M_{53}(995)$	$M_{54}(401)$	$M_{55}(727)$	$M_{56}(632)$
002111021220	002111021220	002111022201	002111022201	002111022201	002111022201	002111022201
110100221202	110200112202	110100220221	200110121022	110111020131	111010120131	110210011131
111111001023	111011110023	111111001023	021101100222	111100201113	110201101113	111001210113
$M_{57}(691)$	$M_{58}(318)$	$M_{59}(307)$	$M_{60}(379)$	$M_{61}(485)$	$M_{62}(1242)$	$M_{63}(481)$
002111022201	002120022111	002120022111	002120022111	102020021211	102020021211	102020021211
201100111131	110102020221	200101120221	110101120311	010202021121	020201011221	010201122102
020111110113	111100201113	021101101113	111101101023	111100201113	101101211013	111101100132
$M_{64}(407)$	$M_{65}(879)$	$M_{66}(836)$	$M_{67}(1212)$	$M_{68}(1060)$	$M_{69}(162)$	$M_{70}(427)$
102020021211	102020021211	102020021211	102020021211	211000022211	211000022211	002121010221
100201122012	100202110212	011202001212	110201011131	001221010221	002111110131	200101121202
021101100222	021100112022	110100221022	011101211103	011101211013	010211111103	021100112022
$M_{71}(441)$	$M_{72}(384)$	$M_{73}(350)$	$M_{74}(278)$	$M_{75}(246)$	$M_{76}(248)$	$M_{77}(317)$
002121010221	002121010221	002121010221	002121010221	002211001221	002211001221	202010011221
111000221202	110101032111	111000132111	111100023111	201010121202	111010032111	011102022102
110201012022	111100201113	110201101113	110101210113	020101121022	110101210113	010210210122
$M_{78}(433)$	$M_{79}(169)$	$M_{80}(348)$	$M_{81}(278)$	$M_{82}(1074)$	$M_{83}(510)$	$M_{84}(566)$
202010011221	112100002221	112100002221	112100002221	102011022102	102011022102	102011022102
000211131111	001111131201	001121031111	101011130211	100210210212	011200201212	110200111311
021101101113	110111110023	110101210113	010211111013	021101011131	110111020131	011111110032
$M_{85}(1017)$	$M_{86}(634)$	$M_{87}(650)$	$M_{88}(284)$	$M_{89}(1266)$	$M_{90}(385)$	$M_{91}(266)$
002121011202	002121011202	201011021202	112010012202	112010012202	112010012202	112010012202
200100221112	110100132111	020200112112	001102220112	100202110212	000211131111	111001120131
021101011131	111101100132	002111110131	110210011131	011110121031	111101100132	000311111112
$M_{92}(423)$	$M_{93}(1133)$	$M_{94}(145)$	$M_{95}(252)$	$M_{96}(421)$	$M_{97}(419)$	$M_{98}(230)$
102021010212	102021010212	211100002212	211100002212	001111131201	001111131201	101111021301
010201210122	011200201122	001111131201	002111110131	112010011131	201110011131	011111021031
111100023111	110101032111	011111110032	010111131102	110201101113	021101101113	111100201113
$M_{99}(398)$	$M_{100}(797)$	$M_{101}(810)$	$M_{102}(515)$	$M_{103}(482)$	$M_{104}(119)$	$M_{105}(52)$
101111021301	101111021301	101111021301	002011131111	111010032111	111100023111	111100023111
101110121031	021110011131	112000111131	110210011311	001211110311	002111110311	101111110302
021101101113	101101211013	010211111013	111101101023	111101101023	110111110023	011111110032
$M_{106}(324)$	$M_{107}(320)$	$M_{108}(286)$	$M_{109}(1320)$	$M_{110}(1562)$	$M_{111}(115)$	$M_{112}(179)$
021100112220	021000222111	021000222111	022010102211	022010102211	021020110221	021020110221
002121100212	001211110311	011211001311	010202110221	010211110131	002102111202	010202111202
110101121013	111111001023	101111110023	101110121013	101101121103	110200112022	102100112022
$M_{113}(306)$	$M_{114}(1103)$	$M_{115}(991)$	$M_{116}(1089)$	$M_{117}(1140)$	$M_{118}(1364)$	$M_{119}(1034)$
021020110221	021010212102	021010212102	021010212102	021010212102	021010212102	021020111202
011200113111	001202021112	001212100212	002112010212	010212010212	001211110311	001202201112
101102110113	111110100231	111100021131	110200111131	102100111131	111101011032	111100021131
$M_{120}(1080)$	$M_{121}(200)$	$M_{122}(285)$	$M_{123}(292)$	$M_{124}(788)$	$M_{125}(290)$	$M_{126}(127)$
121000202112	011110211301	011110211301	011110211301	011110211301	011110211301	011100312111
001221100212	011110121031	011102110131	011111020131	021111001131	111100021131	011111020311
011101031121	111102001113	111110012013	111101102013	101101121013	011112101013	111111001023

$M_{127}(285)$ 011100312111 111110010321 011112011013	$M_{128}(307)$ 021100113111 002111110311 110111110023	$M_{129}(119)$ 011110301211 011101031211 111111001023	$M_{130}(131)$ 011110301211 011110031121 111102001113	$M_{131}(223)$ 011110301211 011111020131 111101012103	$M_{132}(259)$ 011110301211 111100021131 011112011103	$M_{133}(134)$ 011111200311 111100021131 011111112003
$M_{134}(457)$ 021011110311 101200111131 011111112003	$M_{135}(293)$ 002101122120 020111020212 101111201013	$M_{136}(804)$ 002101122201 011112011031 110110210113	$M_{137}(556)$ 002101122201 110101121031 011121100113	$M_{138}(1269)$ 012002022111 001111310121 110210011113	$M_{139}(1170)$ 012002022111 000311111121 111010210113	$M_{140}(1333)$ 012002022111 010211110131 101110211103
$M_{141}(1289)$ 012002022111 011110210131 100211111103	$M_{142}(1498)$ 012100022211 001113111021 110110210113	$M_{143}(760)$ 012011022021 100201120221 011111201103	$M_{144}(218)$ 102001122021 020101121202 001221100122	$M_{145}(727)$ 002120021121 001103211111 120100111113	$M_{146}(537)$ 002120021121 010103121111 111100201113	$M_{147}(831)$ 001111132101 011112010131 111100201113
$M_{148}(841)$ 001111132101 012011110131 110201101113	$M_{149}(760)$ 001111132101 101102110131 021110101113	$M_{150}(789)$ 001111132101 021101011131 101111200113	$M_{151}(817)$ 001103211111 011110032111 111110100123	$M_{152}(457)$ 001103211111 101110031121 021110101113	$M_{153}(749)$ 001113021111 011110211031 111100111203	$M_{154}(372)$ 001113021111 021100111131 101110211103
$M_{155}(786)$ 011003121111 011210011131 101110211103	$M_{156}(804)$ 011003121111 101200111131 011120111103	$M_{157}(754)$ 011012031111 101200111131 011111201103	$M_{158}(804)$ 101002131111 011210011131 011111201103	$M_{159}(434)$ 011011132110 011211001311 111100111023	$M_{160}(363)$ 001111312110 011111020311 111100111023	$M_{161}(390)$ 001111312110 111100021311 011111110023
$M_{162}(1494)$ 011011311210 101110031121 011201101113	$M_{163}(1461)$ 011011311210 011210011131 101101121103	$M_{164}(785)$ 011011311210 111100021131 001211111103	$M_{165}(266)$ 001131111120 101101301112 011101031112	$M_{166}(636)$ 101102111301 101101211031 021110011113	$M_{167}(1039)$ 101102111301 021101101131 101110121013	$M_{168}(1135)$ 101102111301 111100201131 011111021013
$M_{169}(1050)$ 101102111301 112000111131 010211111013	$M_{170}(542)$ 001103211111 111100021311 111110101023	$M_{171}(435)$ 101103101211 011100131211 111110101023	$M_{172}(405)$ 101103101211 101100131121 021110101113	$M_{173}(870)$ 101103101211 021100111131 101110121103	$M_{174}(1034)$ 101103101211 111100021131 011110211103	$M_{175}(218)$ 110101121301 101101121031 011121100113
$M_{176}(662)$ 110101121301 101112010131 011110211013	$M_{177}(1101)$ 100103121111 011110210311 111110011023	$M_{178}(1103)$ 100103121111 111110010321 011110211013	$M_{179}(171)$ 000311111211 111001031121 111011200113	$M_{180}(91)$ 000311111211 111002110131 111010121103	$M_{181}(94)$ 000311111211 111011020131 111001211103	$M_{182}(29)$ 002111111301 001211111031 120011110113
$M_{183}(121)$ 002111111301 021011110131 100211111013	$M_{184}(41)$ 002111111301 100211110131 021011111013	$M_{185}(36)$ 003011111211 000311111121 120011110113	$M_{186}(27)$ 003011111211 020111110131 100211111103	$M_{187}(29)$ 003011111211 100211110131 020111111103	$M_{188}(153)$ 110020311111 001102131111 111111000123	$M_{189}(50)$ 111001301211 000311111121 111001031112
$M_{190}(9)$ 030011111211 003011111121 000311111112	$M_{191}(221)$ 010032111111 110100211311 111101011023	$M_{192}(233)$ 010311102111 110011021131 101011211103				

Два дизайна, получени от различни матрици, могат да бъдат изоморфни, ако редовете на техните групи от автоморфизми са еднакви и кратни на 25. Сред всичките 98391 дизайни има само 28 с ред на групата от автоморфизми, кратен на 25. При теста за изоморфизъм се оказа, че от тези 28 дизайна остават 10 неизоморфни. Така броят на неизоморфните дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки или блокове е 98373. *Избраните* са дадени в Таблица 3.2.1

Таблица 3.2.1: 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и блокове

No	P_1	P_6	P_{11}	P_{16}	P_{21}	Aut	Rs	rd
M_5	001122334567	014455678899	2233678899ab	23445567aabb	00116789aabb			
1	121213131111	112424331212	121233353511	112323552424	131344554545	12000tt	1	◇
2	121213131111	122435341212	123453242511	123423151324	133541152312	50t	1	◇
3	121213131111	131324451212	123453131411	151245321324	131424131245	25t	0	
4	121312131111	113425231213	134514241511	143534213425	134541222515	25t	0	
5	121312131111	141524331213	132344141511	142415332314	132344532534	1000t	1	◇
M_7	001122334567	014455678899	2233678899ab	00244678aabb	11355679aabb			
1	121213131111	112424331212	121233353511	135124454513	135124451345	40	6	◇
2	121312131111	141235341213	131234354511	135134251245	123342531314	5	1	
3	121312131111	141235341213	133454254511	135134251223	123342531324	5	1	
4	121312131111	141235341213	134514134511	135134251212	123342531313	10	1	
M_9	001122334567	014455678899	2233678899ab	01244678aaab	01355679abbb			
1	121213131111	112424331212	121233353511	131234552454	144153232235	10	1	
M_{111}	001122334567	00445567889a	112446799aab	2235567899bb	01336788aabb			
1	121213131111	131234451311	131243523451	125134242545	141232232425	25t	0	
2	121213131111	132345141311	132143445121	123254332534	142324453513	50t	0	
3	121213131111	133412451311	131352434121	124135313534	133454343525	25t	0	
4	121213131111	133445121311	135142445151	123245332412	153432452514	25t	0	
5	121312131111	131235441211	121243323141	135124442545	141233242325	50t	1	
M_{183}	001122334567	00145678889a	22345678999b	11245679aaab	03345678abbb			
1	121312131111	122334412411	122443341341	134552211251	135442213234	240	0	

3.2.3 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и с 5 фиксирани блока

Нека D е 2-(25,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 5, фиксиращ 5 блока и нито една точка. Можем да считаме, че α действа по следния начин:
върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(21,22,23,24,25)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,...,10)...(51,52,53,54,55)(56)(57)...(60)$.

Има три възможности за фиксираните блокове и, съответно, три разновидности за матрицата на инцидентност на D.

1) Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,11} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,11} & z^t & u^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,11} & z^t & z^t & u^t & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4,11} & z^t & z^t & z^t & u^t & z^t \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{5,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t \end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за елементите на съкратената орбитна матрица

$M = (m_{i,j})_{5\times 11}$ са в сила уравненията:

$$\left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{11} m_{ij} = 11, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{ij}^2 = 15, & i = 1,2,...,5 \\ \sum_{j=1}^{11} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & i_1, i_2 = 1,2,...5, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.14}$$

Има три нееквивалентни матрици, за които е изпълнено (3.14). Ще ги означим с N_1, N_2, N_3.

2) Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,11} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,11} & z^t & u^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4,11} & z^t & z^t & u^t & z^t & z^t \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{5,11} & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t \end{pmatrix}$$

Нека разгледаме елементите на съкратената орбитна матрица M. От Теорема 1.4.2.1 следва:

$$\left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{11} m_{1j} = 12, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{1j}^2 = 20 & \\ \sum_{j=1}^{11} m_{ij} = 11, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{ij}^2 = 15, & i = 2,3,4 \\ \sum_{j=1}^{11} m_{5j} = 10, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{5j}^2 = 10 & \\ \sum_{j=1}^{11} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & i_1, i_2 = 1,2,...,5, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.15}$$

Има осем нееквивалентни матрици, за които системата (3.15) е в сила - N_4, N_5, ... N_{11}.

3) Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,11} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4,11} & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{5,11} & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t \end{pmatrix}$$

Уравненията за елементите на съкратената орбитна матрица M са:

$$\left|\begin{array}{llll} \sum_{j=1}^{11} m_{ij} = 12, & \sum_{j=1}^{11} m_{ij}^2 = 20, & i = 1,2 & \\ \sum_{j=1}^{11} m_{3j} = 11, & \sum_{j=1}^{11} m_{3j}^2 = 15 & & \\ \sum_{j=1}^{11} m_{ij} = 10, & \sum_{j=1}^{11} m_{ij}^2 = 10, & i = 4,5 & \\ \sum_{j=1}^{11} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & & i_1, i_2 = 1,2,...,5, \ i_1 \neq i_2. & \end{array}\right. \tag{3.16}$$

Има четири нееквивалентни матрици, за който (3.16) е в сила – N_{12}, N_{13}, ..., N_{15}.

Петнадесетте матрици са дадени заедно с броя на неизоморфните дизайни, получени от всяка от тях.

$N_1(173)$	$N_2(43)$	$N_3(236)$	$N_4(6)$	$N_5(210)$	$N_6(452)$	$N_7(223)$	$N_8(584)$
00111111122	00111111122	00111111122	00011112222	00011112222	00011112222	00011112222	00011112222
02111111201	02111111201	11011112201	02211110111	02211110111	11111220011	11201120111	11201120111
11111122010	12111111020	11111220110	20211111011	21101121011	11212011101	12111112001	12111201011
21011201111	20111111210	12112011011	22011111101	21121101101	22110101111	21121100111	21121011101
21211010111	21111111002	21210101111	1111111110	1111111110	1111111110	1111111110	1111111110

$N_9(12)$	$N_{10}(5)$	$N_{11}(86)$	$N_{12}(138)$	$N_{13}(463)$	$N_{14}(97)$	$N_{15}(11)$
00011112222	00111111123	00111111123	00011112222	00011112222	00011112222	00111111123
11211110012	02111111210	11011112210	11211220002	12201120012	11311110012	13011111120
12111110210	20111112110	11211120110	22111001111	21121101101	22011111101	20211111110
21111112010	22111110011	22111101011	1111111110	1111111110	1111111110	1111111101
1111111101	1111111101	1111111101	1111111110	1111111110	1111111110	1111111101

Два от дизайните, получени от N_3, са изоморфни на дизайни, получени от N_2. Ето защо общият брой на неизоморфните дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и с 5 фиксирани блока е 2737. Осем от тези дизайни са сред *избраните*, но те притежават и автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и блокове и вече са представени в Таблица 3.2.1.

3.2.4 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и с 10 фиксирани блока

Нека D е 2-(25,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 5 без фиксирани точки и с 10 фиксирани блока. Без ограничение на общността приемаме, че α действа както следва:
върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(21,22,23,24,25)$,

върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,...,10)...(46,47,48,49,50)(51)(52)...(60)$.

Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,10} & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,10} & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,10} & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4,10} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{5,10} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t \end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{5\times 10}$ следва:

$$\left| \begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2 = 10, & & i = 1,2,...,5 \\ \sum_{j=1}^{10} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & & i_1, i_2 = 1,2,...,5, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.17}$$

Има точно една матрица, за която е в сила (3.17). Всичките ѝ елементи са равни на 1. Ще я означим с L. Замяната на елементите ѝ с циркуланти и добавянето на фиксираните блокове води до 19 неизоморфни 2-(25,5,2) дизайни. Три от тях притежават и автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и блокове и са представени в Раздел 3.2.2. От начина на конструиране е ясно, че дизайните, получени по този начин, са разрешими, защото блоковете на всяка нетривиална блокова орбита формират паралелен клас. Изследването показа, че с точност до изоморфизъм всички тези дизайни имат една резолюция. *Избраните* дизайни са представени в таблица 3.2.2

3.2.5 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 с 5 фиксирани точки и 5 фиксирани блока

Нека D е 2-(25,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 5, фиксиращ 5 точки и 5 блока. Без ограничение на общността ще считаме, че α действа както следва:

върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(16,17,18,19,20)(21)(22)...(25)$,

върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,...,10)...(51,52,53,54,55)(56)(57)...(60)$.

Има две възможности за фиксираните блокове и, съответно, за матрицата на инцидентност на D.

Таблица 3.2.2: 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и с 10 фиксирани блока

No	P_1	P_6	P_{11}	P_{16}	P_{21}	Aut	red
N_4	0123456789	0123456789	0123456789	0123456789	0123456789		
1	1111111111	1122334455	1133552244	1144225533	1215453423	200	◇
2	1111111111	1122334455	1133552244	1145243523	1154425332	160	◇
3	1111111111	1122334455	1133552244	1215453423	1254235134	100	◇
4	1111111111	1122334455	1133552244	1215453423	1314245235	100	◇
5	1111111111	1122334455	1133552244	1215453423	1534215432	200	◇
6	1111111111	1122334455	1134252534	1145425323	1214543253	40	
7	1111111111	1122334455	1134252534	1213554243	1443123552	5	
8	1111111111	1122334455	1134252534	1241525433	1315345224	20	
9	1111111111	1122334455	1134252534	1241542353	1315345224	10	
10	1111111111	1122334455	1214352534	1245421353	1341245235	10	
11	1111111111	1122334455	1214352534	1245421353	1353124542	10	
12	1111111111	1122334455	1214352534	1341245235	1532542143	20	

1) Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{1,10} & a_{1,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{2,10} & a_{2,11} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{3,10} & a_{3,11} & z^t & u^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & a_{4,10} & a_{4,11} & z^t & z^t & u^t & z^t & z^t \\
u & u & z & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & u & u & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & u & u & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & z & z & u & u & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & z & z & z & z & u & u & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

За съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{4\times 11}$ от Теорема 1.4.2.1 намираме следните уравнения:

$$\left|\begin{array}{lll}
\sum_{j=1}^{11} m_{1j} = 12, & \sum_{j=1}^{11} m_{1j}^2 = 20 & \\
\sum_{j=1}^{11} m_{ij} = 11, & \sum_{j=1}^{11} m_{ij}^2 = 15, & i = 2,3,4 \\
\sum_{j=1}^{11} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & & i_1, i_2 = 1,2,3,4,\ i_1 \neq i_2 \\
\sum_{j=a}^{a+1} m_{ij} = 2, & & a = 1,3,5,7,9.
\end{array}\right. \qquad (3.18)$$

Не съществуват целочислени матрици, за които (3.18) да е в сила.

2) Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{1,10} & a_{1,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{2,10} & a_{2,11} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{3,10} & a_{3,11} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & a_{4,10} & a_{4,11} & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\
u & u & z & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & u & u & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & u & u & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & z & z & u & u & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & z & z & z & z & u & u & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Елементите на съкратената орбитна матрица M трябва да отговарят на условията:

$$\left|\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{11} m_{ij} = 12, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{ij}^2 = 20, & i = 1,2 \\
\sum_{j=1}^{11} m_{3j} = 11, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{3j}^2 = 15 & \\
\sum_{j=1}^{11} m_{4j} = 10, \quad \sum_{j=1}^{11} m_{4j}^2 = 10 & \\
\sum_{j=1}^{11} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & i_1, i_2 = 1,2,...,4,\ i_1 \neq i_2 \\
\sum_{j=a}^{a+1} m_{ij} = 2, & a = 1,3,5,7,9.
\end{array}\right. \qquad (3.19)$$

Горните уравнения са в сила за точно една матрица. Ще я означим K.

$$K = \begin{pmatrix}
1&1&1&1&2&0&2&0&2&0&2 \\
1&1&2&0&1&1&0&2&0&2&2 \\
1&1&0&2&0&2&1&1&1&1&1 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0
\end{pmatrix}$$

При заместването на елементите на K с циркуланти получаваме 7063 неизоморфни решения. Фиксираната част може да бъде добавена по два начина (защото 7-ия стълб на K е равен на 9-ия, а 8-ия – на 10-ия). Така получаваме 14113 неизоморфни дизайни. Никой от тях не е между *избраните* .

3.2.6 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 с 5 фиксирани точки и 10 фиксирани блока

Нека D е 2-(25,5,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 5, фиксиращ 5 точки и 10 блока. Без ограничение на общността приемаме, че α действа

както следва:
върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,...,10)...(16,17,18,19,20)(21)(22)...(25)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,...,10)...(46,47,48,49,50)(51)(52)...(60)$.

Тогава матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{1,10} & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{2,10} & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{3,10} & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & a_{4,10} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\
u & u & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & u & u & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & u & u & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & z & z & u & u & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
z & z & z & z & z & z & z & z & u & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{4\times 10}$ получаваме:

$$\left| \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2 = 10, & i = 1,2,...,4 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{10} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, & i_1, i_2 = 1,2,...,4, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{3.20}$$

Съществува само една матрица, за която е изпълнено (3.20). Всичките ѝ елементи са равни на 1. Замяната им с циркуланти води до 13 неизоморфни решения, които са дадени по-долу, като вместо всяка циркуланта от ред 5 и с една единица в ред или стълб е дадена позицията (1,2,...5) на единицата в първия ѝ ред.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
1111111111	1111111111	1111111111	1111111111	1111111111	1111111111	1111111111
1122334455	1122334455	1122334455	1122334455	1122334455	1122334455	1122334455
1133552244	1133552244	1133552244	1134252534	1134252534	1134252534	1134252534
1144225533	1145243523	1215453423	1145425323	1213554243	1214543253	1241525433

D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}
1111111111	1111111111	1111111111	1111111111	1111111111	1111111111
1122334455	1122334455	1122334455	1122334455	1122334455	1122334455
1134252534	1214352534	1214352534	1214352534	1215453423	1215453423
1241542353	1245421353	1335125424	1341245235	1243512345	1254235134

Фиксираните блокове можем да добавим само по един начин, но нееквивалентните начини за добавяне на фиксираните точки са много. Нека си представяме десетте нетривиални блокови орбити като групирани в 5 двойки, така че блоковете от дадена двойка да съдържат една и съща фиксирана точка. Ясно е, че съществуват 945 (9.7.5.3) начина за такова групиране на блоковите орбити, т.е. получаваме по 945 дизайни от всяко от решенията D_3,D_5,D_6,...D_{13}. Две от блоковите орбити на D_2 и D_4 съдържат еквивалентни колони, затова от всяко от тях получаваме по 525 (7.5.3 + 4.7.5.3) дизайни. Блоковите орбити на D_1 са две по две еквивалентни, ето защо от D_1 получаваме 73 дизайни.

Отначало бяха отделени изоморфните между дизайните, получени от едно и също решение D_i, $i = 1, 2, ...13$. Техният брой е:

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	Общо	Неизоморфни
10	88	136	56	513	513	163	945	485	149	485	42	79	3664	3659

Таблица 3.2.3: 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5 с 5 фиксирани точки и 10 фиксирани блока

No	от	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	P_{25}	Aut	Res	red
1	D_1	0 1	2 3	4 5	6 8	7 9	80	1	◇
2	D_1	0 1	2 4	3 5	6 8	7 9	160	3	◇
3	D_1	0 1	2 4	3 6	5 8	7 9	80	1	◇
4	D_1	0 1	2 8	3 9	4 6	5 7	320	3	◇
5	D_1	0 2	1 3	4 6	5 8	7 9	80	3	◇
6	D_4	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	80	1	◇
7	D_4	0 1	2 3	4 6	5 7	8 9	80	1	◇
8	D_4	0 1	2 4	3 5	6 8	7 9	80	8	◇
9	D_4	0 1	2 4	3 5	6 9	7 8	20	1	
10	D_4	0 1	2 4	3 6	5 8	7 9	80	6	◇
11	D_4	0 1	2 4	3 6	5 9	7 8	20	1	
12	D_4	0 1	2 5	3 4	6 9	7 8	80	1	
13	D_4	0 1	2 5	3 7	4 8	6 9	80	1	
14	D_4	0 1	2 9	3 8	4 7	5 6	160	0	
15	D_4	0 2	1 4	3 5	6 8	7 9	20	8	◇
16	D_4	0 2	1 4	3 5	6 9	7 8	10	1	
17	D_4	0 2	1 4	3 6	5 8	7 9	20	8	◇
18	D_4	0 2	1 4	3 6	5 9	7 8	20	1	
19	D_4	0 2	1 4	3 7	5 8	6 9	20	1	
20	D_4	0 2	1 5	3 4	6 8	7 9	10	1	
21	D_4	0 2	1 5	3 4	6 9	7 8	20	1	
22	D_4	0 2	1 5	3 6	4 8	7 9	10	1	
23	D_4	0 2	1 5	3 7	4 8	6 9	20	1	

Дизайни, получени от две различни решения D_i и D_j, $i, j = 1, 2, \ldots, 13, i \neq j$ могат да бъдат изоморфни ако 25 дели реда на групата от автоморфизмите им. Има 11 дизайни с ред кратен на 25 и броят на неизоморфните между тях е 6. Така 3659 е броят на всички неизоморфни 2-(25,5,2) дизайни с автоморфизъм от ред 5, фиксиращ 5 точки и 10 блока.

Дизайните с ред на групата от автоморфизми кратен на 25 притежават и автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и блокове и са представени в Таблица 3.2.1.

Избраните дизайни са в Таблица 3.2.3. Понеже $D_1...D_{13}$ са дадени по-горе, в таблицата са представени само фиксираните точки и, по-точно, номерата на двете нетривиални блокови орбити, съдържащи съответната точка.

3.2.7 Изследване на намерените дизайни

Редът на пълната група от автоморфизми е пресметнат за всеки дизайн и резултатите са обобщени в Таблица 3.2.5.

Минусите в Таблици 3.2.4 и 3.2.5 стоят пред броя на дизайните, които са получени от повече от една матрица и вече са представени в предходни редове на таблицата.

Резултатите за разрешимостта и разложимостта са представени в Таблица 3.2.4. Всяка от 748-те неизоморфни резолюции може да бъде разглеждана като нелинеен (12,25,10) код над $GF(5)$.

Таблица 3.2.4: Разрешими или разложими 2-(25,5,2) дизайни

от	резолюции	разрешими	разложими	разрешими и неразложими
M_5	55	55	55	-
M_7	198	193	190	3
M_9	1	1	-	1
M_{26}	170	170	170	-
M_{111}	1	1	-	1
M_{144}	33−2	33−2	33−2	-
M_{191}	1−1	1−1	-	1−1
M_{192}	1−1	1−1	-	1−1
N_2	40−2	40−2	40−2	-
L	19−3	19−3	11−2	8−1
D_1	16−2	10−2	10−2	-
D_2	24	24	24	-
D_3	26−4	26−4	26−4	-
D_4	53	27	16	11
D_5	73	73	73	-
D_7	30	30	30	-
D_{12}	10−2	10−2	10−2	-
D_{13}	17−3	17−3	17−3	-
Общо	748	711	688	23

Броят на неизоморфните дизайни с автоморфизъм от ред 5 е:

	98373	(с автоморфизми от ред 5 без фикс. точки и блокове)
+	2737	(с автоморфизми от ред 5 без фикс. точки и с 5 фикс. бл.)
+	19	(с автоморфизми от ред 5 без фикс. точки и с 10 фикс. бл.)
+	14113	(с автоморфизми от ред 5 с 5 фикс. точки и 5 фикс. бл.)
+	3659	(с автоморфизми от ред 5 с 5 фикс. точки и 10 фикс. бл.)
−	8	(с авт. от ред 5 без ф.т. и с 5 ф. бл. и авт. без ф.т. и бл.)
−	3	(с авт. от ред 5 без ф.т. и с 10 ф.бл. и авт. без ф.т. и бл.)
−	1	(с авт. от ред 5 без ф.т. и с 10 ф.бл. и авт. без ф.т. с 5 ф.бл.)
−	6	(с авт. от ред 5 с 5 ф.т. и 10 ф.бл. и авт. без ф.т. и бл.)
−	2	(с авт. от ред 5 с 5 ф.т. и 10 ф.бл. и авт. без ф.т. и с 10 ф.бл.)
+	2	(с авт. без ф.т. и бл., без ф.т. с 10 ф.бл., с 5 ф.т. и 10 ф.бл.)
+	1	(с авт. без ф.т.и бл.,без ф.т.5ф.бл.,без ф.т.10ф.бл.,5ф.т.10ф.бл.)
	118884	(с произволен автоморфизъм от ред 5)

Намерените 118884 дизайни се различават напълно по реда на групата от автоморфизми и инвариантите на блоковете, описани в Раздел 2.4.

Таблица 3.2.5: Ред на пълната група от автоморфизми на 2-(25,5,2) дизайни

от\\Aut	5	10 2.5	20 $2^2.5$	25 5^2	40 $2^3.5$	50 2.5^2	80 $2^4.5$	100 $2^2.5^2$	160 $2^5.5$	200 $2^3.5^2$	240 $2^4.3.5$	320 $2^6.5$	1000 $2^3.5^3$	12000 $2^5.3.5^3$	Общо
M_1	279	37													316
M_2	133	20													153
M_3	688	44													732
M_5	20	85		2		1							1	1	110
M_6	169	28													197
M_7	229	94			3										326
M_8	138	19													157
M_9	317	21													338
M_{11}	118	1													119
M_{26}	326	69			3										398
M_{31}	88	28			1										117
M_{33}	238	34	1												273
M_{39}	45	23													68
M_{40}	83	18													101
M_{41}	85	6													91
M_{43}	65	4													69
M_{70}	411	16													427
M_{75}	201	43	2												246
M_{76}	226	21	1												248
M_{77}	285	30	2												317
M_{111}	108			5−2		2									115−2
M_{112}	170	8	1												179
M_{113}	304	2													306
M_{136}	745	59													804
M_{137}	519	37													556
M_{144}	208	6		1−1		2−2							1−1		218−4
M_{175}	181	37													218
M_{176}	635	27													662
M_{182}	19	9			1										29
M_{183}	114	6									1				121
M_{184}	32	7	1		1										41
M_{185}	19	16	1												36
M_{187}	28	1													29
M_{188}	133	20													153
M_{190}	6	3													9
M_{191}	215			5−5		1−1									221−6
M_{192}	217			5−5		1−1									223−6
N_2	38		1	2−2		1−1							1−1		43−4
N_3	230			5−5		1−1									236−6
N_5	209	1													210
N_7	221	2													223
N_{14}	96	1													97
L	1	3	4		3	1−1		2	1	2			1−1	1−1	19−3
K	14110	3													14113
D_1					3		3		1	1−1		1		1−1	10−2
D_2	49	29	7		3										88
D_3	56	76						2−2		2−2					136−4
D_4		18	25		6		6		1						56
D_5	432	81													513
D_6	432	81													513
D_7	81	69	8		5										163
D_9	460	25													485
D_{10}	95	41	8		5										149
D_{11}	460	25													485
D_{12}	12	19	7		2			1−1		1−1					42−2
D_{13}		24	40		12			2−2					1−1		79−3
Други	92543														92543
Общо	117322	1377	109	5	48	3	9	2	3	2	1	1	1	1	118884

3.3 2-(51,6,2) дизайни, инвариантни относно цикличната група от ред 51

С построяването на един 2-(v,k,λ) дизайн могат да бъдат конструирани множество кратни на него дизайни [37], [38], [39]. Изследванията в този раздел, обаче, са направени точно по обратния път – от квазикратните дизайни към дизайните, на които те се разлагат.

Въпросът за съществуването на 2-(51,6,1) дизайн все още няма отговор. Hanani [34] доказва, че необходимите условия (Теорема 1.3.1) за съществуване на 2-(v,k,λ) дизайн са и достатъчни ако:

- $k = 3$
- $k = 4$
- $k = 5$ с изключение на несъществуващия 2-(15,5,2)
- $k = 6, \lambda > 1$ с изключение на несъществуващия 2-(21,6,2)

През 1984 година *Mills* [64] показва, че 2-(v,6,1) дизайн съществува за $v > 11151$ и параметри, удовлетворяващи Теорема 1.3.1. Остават 165 стойности на v, за които не е установено дали съществува или не 2-(v,6,1) дизайн. Оттогава до днес броят на тези проблемни стойности е намален до 55 в резултат на работите на Mullin, Hoffman и Linder [69], Zhu, Du и Yin [98], Abel [10], Mullin [68], Mills [65], Abel и Mills [11]. Най-малките стойности на v, за които въпросът за съществуване на 2-(v,6,1) дизайн не е решен са 46, 51, 61, 81.

Šiftar [79] показва, че евентуален 2-(51,6,1) дизайн не притежава автоморфизми от прост ред, различен от 2, 3 или 5. Не е невъзможно, обаче, 2-(51,6,2) дизайн, който притежава автоморфизъм от ред 51, да се окаже разложим до два 2-(51,6,1) дизайна, които нямат такъв автоморфизъм.

Преди това изследване е известен един 2-(51,6,2) дизайн, конструиран от Hanani [34]. Редът на пълната група от автоморфизмите му е 50.

В настоящия раздел авторът си поставя две основни задачи – класификация на 2-(51,6,2) дизайните, които са инвариантни относно цикличната група от ред 51 и проверка дали сред тях няма разложими до два 2-(51,6,1) дизайна.

3.3.1 Относно автоморфизмите на 2-(51,6,2) дизайн

Теорема 3.3.1.1 *Всички възможни прости делители на реда на групата от автоморфизми на 2-(51,6,2) дизайн са* 2, 3, 5 *и* 17, *а автоморфизъм от ред* 17 *е без фиксирани точки и блокове.*

Доказателство. Според Теорема 1.4.1.1 2-(51,6,2) дизайн може да има автоморфизми от прост ред 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19.

Да допуснем, че 2-(51,6,2) дизайн притежава автоморфизъм от прост ред $7 \leq p \leq 19$ с f фиксирани точки и h фиксирани блока и нека $f > 0$ и $h > 0$. Понеже $p > max(k, \lambda)$, фиксираните блокове се състоят само от фиксирани точки и представляват 2-(f,6,2) дизайн. Освен това от Теорема 1.4.1.2 следва, че $f \leq 10$. Тогава единствената възможност е 2-(6,6,2) дизайн, т.е. $f = 6$ и $h = 2$. В този случай, обаче, условието $p \mid v - f$ не е изпълнено за никое $p \geq 7$. От друга страна, ако $p \geq 7$, то автоморфизъм без фиксирани точки и блокове е възможен само за $p = 17$, защото между разглежданите стойности само 17 дели 51. $\diamondsuit$

3.3.2 Конструиране на 2-(51,6,2) дизайни

Нека D е 2-(51,6,2) дизайн с автоморфизъм α от ред 17 без фиксирани точки и блокове и автоморфизъм φ от ред 3 без фиксирани точки и със седемнадесет фиксирани блока и нека тези автоморфизми действат както следва:
на точките:
$\alpha = (1, 2, ..., 17)(18, 19, ..., 34)(35, 36, ...51)$,
$\varphi = (1, 18, 35)(2, 19, 36)...(17, 34, 51)$.
на блоковете:
$\alpha = (1, 2, ..., 17)(18, 19, ..., 34)...(154, 155, ...170)$,
$\varphi = (1, 18, 35)(2, 19, 36)...(17, 34, 51)(52, 69, 86)(53, 70, 87)...(68, 85, 102)$
$(103, 120, 137)(104, 121, 138)...(119, 136, 153)(154)(155)...(170)$.

Матрицата на инцидентност на D е от вида:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_9 & a_7 & a_8 & a_{10} \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 & a_8 & a_9 & a_7 & a_{10} \end{pmatrix}$$

Нека m_j е броя на единиците в ред на циркулантата a_j, $j = 1, 2, ...10$. Използвайки Теорема 1.4.2.1 получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{10} m_j = 20, \quad \sum_{j=1}^{10} m_j^2 = 52 \\ a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_4a_5 + a_4a_6 + a_5a_6 + a_7a_8 + a_7a_9 + a_8a_9 + a_{10}a_{10} = 34. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Съществуват 5 нееквивалентни матрици, удовлетворяващи (3.21). След заместване на елементите им с циркуланти се получават 446 неизоморфни дизайни. В скоби след името на матрицата е означен броя на дизайните, получени от нея.

$$
\begin{array}{ccccc}
M_1(4) & M_2(87) & M_3(87) & M_4(36) & M_5(232) \\
\begin{pmatrix} 222\ 330\ 330\ 2 \\ 222\ 033\ 033\ 2 \\ 222\ 303\ 303\ 2 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 420\ 321\ 321\ 2 \\ 042\ 132\ 132\ 2 \\ 204\ 213\ 213\ 2 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 420\ 312\ 312\ 2 \\ 042\ 231\ 231\ 2 \\ 204\ 123\ 123\ 2 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 222\ 411\ 330\ 2 \\ 222\ 141\ 033\ 2 \\ 222\ 114\ 303\ 2 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 222\ 411\ 411\ 2 \\ 222\ 141\ 141\ 2 \\ 222\ 114\ 114\ 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Редът на пълната група от автоморфизми на всички конструирани дизайни е равен на 51. Нито един от тях не е разложим до два 2-(51,6,1) дизайна. В таблица 3.3.1 е даден по един от получените от всяка от петте матрици дизайни.

Таблица 3.3.1: 2-(51,6,2) дизайни с автоморфизъм от ред 51

No	P_1	P_{18}	P_{35}
M_1	00011133344466778899	11122244455566778899	00022233355566778899
1	1365bf12a48e138b5h12	1365bf12a48e5h138b12	5bf13648e12a8b5h1312
M_2	00001133344566677899	11112234445567778899	00222233455566788899
2	1248af15a8f617abd512	1248af615a8f517abd12	af12488f615abd517a12
M_3	00001133345566678899	11112233444566777899	00222234455567788899
3	1248af14a6fh16a53d12	1248affh14a63d16a512	af12486fh14a53d16a12
M_4	00001233344466778899	01111244455566778899	01222233355566778899
4	1248bd1495cg13ch5e12	d1248b1495cg5e13ch12	bd12485cg149ch5e1312
M_5	00001233334566778899	01111234444566778899	01222234555566778899
5	178ace16bchf14af6h12	e178acf16bch6h14af12	ce178ahf16bcaf6h1412

3.4 Коментар

Разгледани са квазикратни дизайни с параметри 2-(21,5,2), 2-(25,5,2) и 2-(51,6,2) и предварително зададени групи от автоморфизми. В резултат на настоящата работа бяха построени първите неразложими 2-(21,5,2) и 2-(25,5,2) дизайни. Броят на разложимите сред построените дизайни с параметри 2-(21,5,2) е 4170, а с параметри 2-(25,5,2) – 688. Установено беше, че 711 от конструираните 2-(25,5,2) дизайни са разрешими. Сред тях са и първите известни неразложими, но разрешими дизайни.

Оказва се, че броят на намерените разложими дизайни е много по-голям от изчисления по формулите на Jungnickel [38] за съответните параметри. Възможно е резултати като тези да доведат до извеждане на по-точна долна граница за броя на неизоморфните кратни в общия случай. Освен това прави впечатление, че доста малка част от намерените дизайни могат да бъдат получени като кратни на други дизайни и че част от неразложимите дизайни също притежават интересни свойства като, например, разрешимост и големи групи от автоморфизми.

Пълната група от автоморфизми на всички конструирани 2-(51,6,2) дизайни е от ред 51. Нито един от тях не е разложим до два 2-(51,6,1) дизайна.

Описаните в тази глава резултати са публикувани или представени за публикуване в [9], [87], [88], [90], [91], [92] .

Глава 4

Симетрични 2-(61,16,4) дизайни, инвариантни относно диедралната група от ред 10 и техните остатъчни 2-(45,12,4) дизайни

Интересът към симетричните дизайни се основава на допълнителните свойства, които те притежават и на многобройните им приложения. Освен това тези дизайни са сравнително малко и сравнително трудни за построяване. Не случайно точно за симетричните дизайни е изведено такова силно необходимо условие за съществуване, каквото се явява теоремата на *Bruck-Ryser-Chowla* (1.3.4). Според [60] съществува поне един 2-(61,16,4) дизайн, построен като представител на безкрайна серия [16], [66], [70]. Оказа се, че редът на неговата група от автоморфизми е 9. Понеже този дизайн не е самодуален, на практика преди нашето изследване са известни два дуални един на друг дизайна.

Задача на настоящето разглеждане е класификацията на всички 2-(61,16,4) дизайни, инвариантни относно диедралната група от ред 10 и на остатъчните 2-(45,12,4) дизайни, които се получават от тях. Интересно е да се разгледат и самоортогоналните кодове над F_2, породени от остатъчните 2-(45,12,4) дизайни.

Резултатите в тази глава са получени съвместно с Ланджев.

4.1 Възможни автоморфизми на симетричен 2-(61,16,4) дизайн

Лема 4.1.1 *Ако 2-(61,16,4) дизайн притежава автоморфизъм от прост ред*

$p > \lambda$ с f фиксирани точки, то:

$$v - f \geq pf$$

Доказателство. 1) Всяка фиксирана точка се съдържа в блоковете на поне една нетривиална блокова орбита, защото в противен случай точките от всяка нетривиална точкова орбита биха се съдържали в λ различни фиксирани блока, всеки два от които имат по поне p общи точки. Това е невъзможно, понеже дуалният дизайн има същите параметри и, в частност всеки две негови точки се съдържат в λ блока, а $\lambda < p$.

2) Всеки блок от нетривиална блокова орбита съдържа най-много една фиксирана точка. В противен случай две от фиксираните точки, които съдържа, биха били в поне p блока от тази орбита.

От 1) и 2) следва, че броят на фиксираните точки не трябва да превишава броя на нетривиалните блокови орбити, т.е.

$$f \leq \frac{v-f}{p}. \ \diamond$$

Лема 4.1.2 *Ако 2-(61,16,4) дизайн притежава автоморфизъм от прост ред $p > \lambda$ с f фиксирани точки, то:*

$$v - f \geq \left\lceil \frac{k-f}{p} \right\rceil pf$$

Доказателство.

1) Всеки фиксиран блок съдържа точките на поне $\left\lceil \frac{k-f}{p} \right\rceil$ нетривиални точкови орбити.

2) Точките на нетривиална точкова орбита се съдържат в не повече от един фиксиран блок, защото в противен случай два от фиксираните блокове, които ги съдържат, биха имали p общи точки.

От 1) и 2) следва, че броят на нетривиалните блокови орбити е поне $\left\lceil \frac{k-f}{p} \right\rceil f$, т.е.

$$\frac{v-f}{p} \geq \left\lceil \frac{k-f}{p} \right\rceil f. \ \diamond$$

Теорема 4.1.3 *Всички възможни прости делители на реда на групата от автоморфизми на 2-(61,16,4) дизайн са* 2, 3, *и* 5. *Автоморфизъм от ред* 5 *на 2-(61,16,4) дизайн фиксира* 1 *точка и* 1 *блок.*

Доказателство. Според Теорема 1.4.1.1 2-(61,16,4) дизайн може да има автоморфизми от прост ред 2, 3, 5, 7, 11, 13 и 61. Ред 61 отпада, защото е известно [17], че (61,16,4) разностно множество в цикличната група от ред 61 не съществува. Стойностите на p и f, които удовлетворяват Лема 4.1.1 са: $p = 7, f = 5$; $p = 5, f = 6$; $p = 5, f = 1$. Само $p = 5, f = 1$ удовлетворява и Лема 4.1.2. $\Diamond$

4.2 Симетрични 2-(61,16,4) дизайни, инвариантни относно диедралната група от ред 10

Нека D е симетричен 2-(61,16,4) дизайн, инвариантен относно диедралната група от ред 10. Без ограничение на общността можем да считаме, че действат два автоморфизма α и φ от ред 5 и ред 2, съответно, които преобразуват точките и блоковете както следва:

$\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(56,57,58,59,60)(61)$,

$\varphi = (1,5)(2,4)(3)(6,10)(7,9)(8)...(56,60)(57,59)(58)(61)$.

Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,12} & u^t \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,12} & u^t \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{3,12} & u^t \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \dots & a_{4,12} & z^t \\ \dots & & & & & & \\ a_{12,1} & a_{12,2} & a_{12,3} & a_{12,4} & \dots & a_{12,12} & z^t \\ u & u & u & z & \dots & z & 1 \end{pmatrix}$$

където $a_{i,j}$, $i = 1,2,...12$, $j = 1,2,\dots,12$ са симетрични циркулантни матрици от ред 5. Нека $M = (m_{i,j})_{12\times 12}$ е съкратената орбитна матрица спрямо α. Като използваме Теорема 1.4.2.1 за нея получаваме:

$$\left| \begin{array}{lll} \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i,j} = 15, & \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i,j}^2 = 27, & i = 1,2,3 \\ \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i,j} = 16, & \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i,j}^2 = 32, & i = 4,5,...,12 \\ \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i_1,j} m_{i_2,j} = 15, & & i_1, i_2 = 1,2,3,\ i_1 \neq i_2 \\ \sum\limits_{j=1}^{12} m_{i_1,j} m_{i_2,j} = 20, & & i_1, i_2 = 1,2,...,12,\ i_1 \neq i_2,\ 3 < i_2 \leq 12. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

С компютър беше установено, че има 2913 нееквивалентни матрици, за които (4.1) е в сила. Достатъчно е да разгледаме само 1514 от тях, защото всяка от останалите е еквивалентна на транспонираната на някоя от тези 1514 матрици.

Една единствена матрица води до дизайни след замяна на елементите ѝ със симетрични циркуланти и добавяне на фиксираните точка и блок. Тази матрица е:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица 4.2.1: Симетрични 2-(61,16,4) дизайни с автоморфизъм от ред 10

d	P_1	P_6	P_{11}	P_{16}
orb	01266778899aabbc	01233445599aabbc	0123344556677888c	1122445577 88aabb
D_1	1113434342525251	1112525253434341	1113434342525251	3425342534253425
D_2	1113434342525251	1112525253434341	1113434342525251	3425342534253425
D_3	1113434342525251	1112525253434341	1113434342525251	3425342525342534

d	P_{21}	P_{26}	P_{31}	P_{36}
orb	11223344668899bb	11223355667799aa	00224455668899aa	00223355778899bb
D_1	3425342525342534	3425253434253425	2534342525343425	2534253434252534
D_2	3425342525342534	2534342534252534	2534342525343425	2534253434252534
D_3	3425342534253425	3425253425342534	2534342534252534	2534253425343425

d	P_{41}	P_{46}	P_{51}	P_{56}	P_{61}	Aut
orb	002233446677aabb	00114455667799bb	001133556688aabb	00113344778899aa		
D_1	2534342534253425	3425342534252534	3425253425343425	3425342534253425	012c	90
D_2	3425253434252534	2534253434253425	3425253425343425	3425342534253425	012c	30
D_3	2534342525342534	3425342525343425	3425253434252534	3425342525342534	012c	270

От M_1 се получават пет неизоморфни дизайни. Нека ги означим с D_1, D_2, D_3, D_4, и D_5. Дизайните D_4 и D_5 съвпадат с дуалните дизайни на D_1 и D_2 съответно. Дизайнът D_3 е първият и единственият известен до момента самодуален 2-(61,16,4) дизайн. Първите три дизайна и реда на групите от автоморфизмите им са представени в Таблица 4.2.1.

4.3 Остатъчни 2-(45,12,4) дизайни

Остатъчни 2-(45,12,4) дизайни могат да бъдат получени от симетричен 2-(61,16,4) дизайн чрез премахване от него на един блок и точките, които той съдържа. От петте симетрични дизайна се получават 25 неизоморфни 2-(45,12,4) дизайни. Ще ги означим $d_1, d_2, ...d_{25}$. В Таблица 4.3.1 е показан начина, по който е намерен всеки от тях, т.е. кой блок е изтрит и от кой дизайн. Представен е и реда на групите от автоморфизми.

Таблица 4.3.1: Остатъчни 2-(45,12,4) дизайни

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
От дизайн	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2
Блок	1	16	31	46	61	1	16	31	36	41	46	61
Aut	6	6	6	6	$540t$	2	2	6	6	6	2	180

	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}
От дизайн	D_3	D_3	D_4	D_4	D_4	D_4	D_5	D_5	D_5	D_5	D_5	D_5	D_5
Блок	1	16	1	6	11	16	1	6	11	16	21	26	61
Aut	18	6	18	18	18	2	6	6	6	2	2	2	30

Както симетричните 2-(61,16,4), така и остатъчните 2-(45,12,4) дизайни се различават напълно по инвариантите на точките, описани в Раздел 2.4

Изследвани са породените от намерените 2-(45,12,4) дизайни самоортогонални линейни кодове над $GF(2)$ с дължина 60. За съжаление, те имат размерности по-малки от 30, а интерес представляват самодуални екстремални кодове с размерност 30 и минимално разстояние 12.

4.4 Коментар

Настоящето разглеждане доведе до построяването на пет нови симетрични 2-(61,16,4) дизайни, сред които е и първият известен самодуален 2-(61,16,4) дизайн. Остатъчните им 2-(45,12,4) дизайни са 25 на брой и пораждат самоортогонални линейни кодове над $GF(2)$, но сред последните няма нито един самодуален. Възможно е класификацията на 2-(45,12,4) дизайни с предварително зададени автоморфизми да доведе до още по-интересни резултати.

Включените в тази глава изследвания са публикувани в [52].

Глава 5

2-(21,6,3) дизайни с автоморфизми от ред 7 или 5

Според [60] преди настоящето изследване е конструиран един 2-(21,6,3) дизайн [32] . Неговата матрица на инцидентност се състои от две циркуланти от ред 21, а реда на пълната група от автоморфизмите му е 63. Както е показано по-долу, 2-(21,6,3) дизайн не може да има автоморфизъм от прост ред, по-голям от 7. Целта ни е да построим и изследваме неизоморфните 2-(21,6,3) дизайни, притежаващи автоморфизми от ред 7 или 5.

Резултатите в тази глава са получени съвместно с Капралов.

5.1 Възможни автоморфизми на 2-(21,6,3) дизайн

Теорема 5.1.1 *Един 2-(21,6,3) дизайн не може да притежава автоморфизъм от прост ред по-голям от 7, а автоморфизъм от ред 7 е без фиксирани точки и блокове*

Доказателство. От Теорема 1.4.1.1 следва, че възможните прости делители на групата от автоморфизми на 2-(21,6,3) дизайн са 2, 3, 5, 7 и 11. Според Теорема 1.4.1.2 автоморфизъм от ред 11 фиксира най-много една, а автоморфизъм от ред 7 – най-много 4 точки. $\diamond$

Теорема 5.1.2 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(21,6,3) дизайн D, то α фиксира една точка и два блока на D и всяка нефиксирана точка се съдържа в не повече от един фиксиран блок.*

Доказателство.

1. Нека α фиксира f точки и h блока. Всеки фиксиран блок съдържа или една, или 6 фиксирани точки. Да означим с h_1 броя на фиксираните

блокове, състоящи се от 6 фиксирани точки, а с h_2 – на тези, съдържащи само една фиксирана точка.

Понеже $p > \lambda$ всяка двойка фиксирани точки се съдържа в λ фиксирани блока, като в блок, съдържащ 6 фиксирани точки има $\binom{6}{2}$ различни двойки, а в блок с една фиксирана точки нито една двойка. Тогава $\binom{6}{2}h_1 = 3\binom{f}{2}$, от където получаваме:

$$10h_1 = f(f-1), \quad \text{ако} f > 1. \tag{5.1}$$

Точките от една нетривиална точкова орбита се съдържат в не повече от три фиксирани блока ($\lambda = 3$), а броят на нетривиалните точкови орбити е $\dfrac{(21-f)}{5}$. Следователно:

$$h_2 \leq \frac{3(21-f)}{5}. \tag{5.2}$$

Фиксираните точки се срещат в блоковете на дизайна $12f$ пъти, сред които $6h_1 + h_2$ пъти във фиксираните блокове. Понеже нефиксиран блок съдържа най-много една фиксирана точка, броят на нефиксираните блокове, съдържащи фиксирани точки е $12f - 6h_1 - h_2$. Тогава $12f - 6h_1 - h_2 \leq 42 - h_1 - h_2$ и получаваме:

$$h_1 \geq \frac{12f - 42}{5}. \tag{5.3}$$

От условията (5.1),(5.2) и (5.3) следва, че $f = 1$, $h_1 = 0$, а за h_2 има три възможности: $h_2 = 2, 7, 12$.

2. Допускаме, че α фиксира една точка и повече от два блока. Приемаме, че α действа както следва:

върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)...(16,17,18,19,20)...(21)$

върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)...(42-h+1)(42-h+2)...(42)$

Нетривиалните блокови орбити спрямо α са $l = \dfrac{42-h}{5}$. Очевидно $l < 8$. Нетривиалните точкови орбити са 4, затова съществува точкова орбита, чиито точки се съдържат в повече от един фиксиран блок. Без ограничение на общността можем да считаме, че това са точките от първата точкова орбита. Нека те се съдържат в два фиксирани блока. Тогава частта от матрицата на инцидентност на дизайна, съответстваща на тази точкова орбита, е от вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1l} & u^t & u^t & z^t & z^t & \dots & z^t \end{pmatrix}$$

За първия ред на съкратената орбитна матрица M от Теорема 1.4.2.1 получаваме:

$$\sum_{j=1}^{l} m_{1j} = 10, \qquad \sum_{j=1}^{l} m_{1j}^2 = 14.$$

Системата няма решение в цели числа ако $l < 8$. По подобен начин може да се докаже, че ако точките от тази орбита се съдържат в три фиксирани блока, трябва да са в сила уравненията:

$$\sum_{j=1}^{l} m_{1j} = 9, \quad \sum_{j=1}^{l} m_{1j}^2 = 9$$

Горната система няма решение в цели числа ако $l < 9$.

Естествено точките от разглежданата орбита не могат да се съдържат и в повече от 3 фиксирани блока ($\lambda = 3$). Следователно α не може да фиксира повече от два блока.

3. Допускаме, че α фиксира една точка и два блока и съществуват нефиксирани точки, които се съдържат и в двата фиксирани блока. Считаме, че това са точките от първата точкова орбита и, че α действа по следния начин:
върху точките:$\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(16,17,18,19,20)(21)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(36,37,38,39,40)(41)(42)$.

Матрицата на инцидентност на дизайна е от вида:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & u^t & u^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & z^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & z^t & z^t \\
z & z & z & z & z & z & u & u & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

За първия ред на съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{4\times 8}$ с помощта на Теорема 1.4.2.1 извеждаме:

$$\sum_{j=1}^{8} m_{1j} = 10, \qquad \sum_{j=1}^{8} m_{1j}^2 = 14.$$

От горните уравнения следва, че първият ред на M трябва да е пермутация на $(2,2,1,1,1,1,1,1)$. Но всяка точка от една нетривиална точкова орбита трябва да е в точно 3 блока с фиксираната точка. Затова сумата на m_{17} и m_{18} трябва да е 1, което е невъзможно. $\diamondsuit$

5.2 2-(21,6,3) дизайни с автоморфизми от ред 7

Нека D е 2-(21,6,3) дизайн с автоморфизъм α от ред 7 без фиксирани точки и блокове. Без ограничение на общността приемаме, че α действа като:
върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5,6,7)(8,9,...,14)(15,16,17,18,19,20,21)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5,6,7)(8,9,...,14)...(36,37,38,39,40,41,42)$.
Тогава матрицата на инцидентност на D е от вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}$$

Следните уравнения са в сила (от Теорема 1.4.2.1) за съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{3\times 6}$:

$$\left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{6} m_{ij} = 12, \quad \sum_{j=1}^{6} m_{ij}^2 = 30, & i = 1,2,3 \\ \sum_{j=1}^{6} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 21, & i_1, i_2 = 1,2,3, \ i_1 \neq i_2. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Съществуват две нееквивалентни матрици (M_1 и M_2), за които (5.4) е в сила.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

След замяна с циркуланти бяха получени 33 неизоморфни 2-(21,6,3) дизайни. Те са представени в Таблица 5.2.1. Пресметнат е реда на техните групи от автоморфизми. Нито един от редовете не се дели на 49 и затова всеки дизайн може да бъде получен само от една от матриците M_1 или M_2. Никой от тези дизайни не притежава автоморфизми от ред 5. Дизайнът с номер 15, получен от M_1, е еквивалентен на дизайна, публикуван в [32].

Таблица 5.2.1: 2-(21,6,3) дизайни с автоморфизми от ред 7

No	P_1	P_8	P_{15}	*Aut*
M_1	001122333444	001122444555	001122333555	
1	121213125135	124615467124	133756156467	7
2	121213125135	123567367135	136745135145	21t
3	121213135125	123656146124	135624137256	7
4	121213135125	121556346135	135613467147	7
5	121213125135	134647123125	143612456146	21t
6	121214135124	134667125124	143616124567	21t
7	121314124124	125726457124	131467156467	21
8	121314124124	125726457126	133656157346	21
9	121314124124	124636156126	131467156457	21
10	121314124124	124636156126	134712467356	21
11	121314124126	125726245124	131467156467	21
12	121314124124	125726457124	144527126356	21
13	121314124124	124636156126	144527126346	21
14	121314124126	125726245124	144527126356	21
15	121314124124	131467156124	146716235156	63t
16	121314124124	133656157124	141724356134	21
17	121314124124	134712467124	146716235356	21
18	121314124124	131467156126	146716235356	21
19	121314124124	131467156126	141724356137	21
20	121314124126	131545457126	144527126137	63t
21	121314124126	132617346126	141724356156	63t
M_2	001122345555	001122344445	001122333345	
1	121214151246	123536512357	136746124575	7
2	121214571246	124627112451	134756123575	7
3	121214131246	124657512454	145725123426	21t
4	121214311246	125636512465	143657123446	14
5	121214351246	125636512462	143657123424	14
6	121214411246	125636612465	143657123424	14
7	121214411246	125636612465	143624123435	14
8	121214321246	134612112455	143657123464	21t
9	121214421246	134612112457	143657123434	21t
10	121314451235	123635712367	133617123576	7
11	121314141235	133645412357	145627123522	21t
12	121314741235	131467412355	146716123552	63t

5.3 2-(21,6,3) дизайни с автоморфизми от ред 5

Нека D е 2-(21,6,3) дизайн с автоморфизъм α от ред 5. Без ограничение на общността ще считаме, че α действа както следва:
върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(16,17,18,19,20)(21)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(36,37,38,39,40)(41)(42)$.

Матрицата на инцидентност на D е:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & u^t & z^t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & z^t & u^t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & z^t & z^t \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & z^t & z^t \\ z & z & z & z & z & z & u & u & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{4\times 8}$ получаваме:

$$\left|\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 11, & \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 19, & i = 1,2 \\ \sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 12, & \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 24, & i = 3,4 \\ \sum_{j=1}^{8} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 15, & & i_1, i_2 = 1,2,3,4,\ i_1 \neq i_2. \end{array}\right. \qquad (5.5)$$

Точно 4 са нееквивалентните матрици, за които (5.5) е в сила. Ще ги означим с M_3, M_4, M_5 и M_6. В скоби след имената на матриците е даден броят на дизайните, получени от тях.

$$\underset{M_3(15)}{\begin{pmatrix} 2&0&1&2&2&2&1&1 \\ 2&2&1&0&2&2&1&1 \\ 1&2&2&2&1&1&0&3 \\ 1&2&2&2&1&1&3&0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_4(78)}{\begin{pmatrix} 2&1&1&1&2&2&0&2 \\ 2&2&1&2&0&2&1&1 \\ 1&3&2&0&2&1&2&1 \\ 1&0&2&3&2&1&2&1 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_5(89)}{\begin{pmatrix} 2&1&1&1&2&2&0&2 \\ 2&1&1&3&1&1&1&1 \\ 1&2&2&1&0&3&2&1 \\ 1&2&2&1&3&0&2&1 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_6(21)}{\begin{pmatrix} 2&3&1&1&1&1&1&1 \\ 2&1&1&1&1&3&1&1 \\ 1&1&2&2&2&1&3&0 \\ 1&1&2&2&2&1&0&3 \end{pmatrix}}$$

След замяна с циркуланти в горните матрици и добавяне на фиксираните точка и два блока, са получени 203 неизоморфни 2-(21,6,3) дизайни. В Таблица 5.3.1 са представени тези от тях, които имат ред на групата от автоморфизми по-голям от 5. Редовете на групите от автоморфизми не се делят на 25 и затова всеки дизайн може да бъде генериран само от една от матриците M_3, M_4, M_5, или M_6.

Получените дизайни се отличават напълно по инвариантите на блоковете, описани в Раздел 2.4

Таблица 5.3.1: Дизайни с автоморфизми от ред 5

No	P_1	P_6	P_{11}	P_{16}	P_{21}	Aut
M_3	002334455678	001124455679	011223345777	011223345666		
1	121121313111	131341234351	124123415245	135453432124	6789	10
2	121121313111	131341234351	125123534345	125452445123	6789	10
M_4	001234455778	001123355679	011122445667	022333445667		
1	121231312131	131241214541	512312244133	312125142245	6789	10
M_6	001112345678	001234555679	012233445666	012233445777		
1	121241134231	132545123331	351313122123	421235255123	6789	10
2	121241233531	125341124551	121313125123	411234132124	6789	10

5.4 Коментар

В резултат на това разглеждане броят на известните неизоморфни 2-(21,6,3) дизайни се увеличи от един на 236. Построените дизайни са с автоморфизми от ред 7 или 5. Оказа се, че нито един дизайн не притежава едновременно автоморфизми от ред 7 и автоморфизми от ред 5. Сред конструираните дизайни има 23 с автоморфизми от ред 3 и 9 с автоморфизми от ред 2.

Резултатите от тази глава са публикувани в [46].

Глава 6

Щайнерови системи от тройки от ред 21 с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока

Щайнеровите системи от тройки са сред най-отдавна изучаваните и много използвани дизайни. Те съществуват за всяко $v > 3$, ако $6 \mid v(v-1)$ [34], а от ред по-малък от 19 са напълно класифицирани.

В настоящата глава разглеждаме Щайнерови системи от тройки от ред 21. Wilson [97] показва още през 1974 година, че неизоморфните 2-(21,3,1) дизайни са поне 2160980. Неговото доказателство е конструктивно, но поради големия брой на решенията, които се получават, все още не са правени опити за класификацията им. Изследвани са само няколко сравнително по-малки класа. Mathon, Phelps и Rosa [56], [57] и Tonchev [85] класифицират Щайнеровите системи от тройки от ред 21 ($STS(21)$), притежаващи автоморфизми от ред 7 или 5 (1873 на брой), както и съответните Киркманови системи от тройки от ред 21 ($KTS(21)$), които са 84 на брой. Не е намерен нито един двойно-разрешим 2-(21,3,1) дизайн.

Предмет на настоящето разглеждане са $STS(21)$ с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока и получените от тях $KTS(21)$.

Резултатите в тази глава са получени съвместно с Капралов.

6.1 Конструиране на 2-(21,3,1) дизайни с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока

Нека D е $STS(21)$ с автоморфизъм α от ред 3, който действа както следва:
върху точките: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)...(19,20,21)$,
върху блоковете: $\alpha = (1,2,3)(4,5,6)...(61,62,63)(64)(65)...(70)$.

Тогава матрицата на инцидентност на D е от вида:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,21} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,21} & z^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,21} & z^t & z^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,21} & z^t & z^t & z^t & u^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,21} & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & z^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,21} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & z^t \\
a_{71} & a_{72} & \dots & a_{7,21} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t
\end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съкратената орбитна матрица $M = (m_{ij})_{7\times 21}$ получаваме:

$$\left|\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{21} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{21} m_{ij}^2 = 10, & i = 1,2,...,7 \\
\sum_{j=1}^{21} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 3, & i_1, i_2 = 1,2,...,7, i_1 \neq i_2.
\end{array}\right. \tag{6.1}$$

От (6.1) е ясно, че M е матрица на инцидентност на 2-(7,3,3) дизайн. Неизоморфните 2-(7,3,3) дизайни [67] са 10 на брой – $M_1, M_2, ..., M_{10}$.

M_1	M_2	M_3
111111111000000000000	111111111000000000000	111111111000000000000
111000000111111000000	111000000111111000000	111000000111111000000
111000000000000111111	111000000000000111111	111000000000000111111
000111000111000111000	000111000111000111000	000111000111000111000
000111000000111000111	000111000000111000111	000110100100110000111
000000111111000000111	000000111110100100110	000001011010101100110
000000111000111111000	000000111001011011001	000000111001011011001

M_4	M_5	M_6
111111111000000000000	111111111000000000000	111111111000000000000
111000000111111000000	111000000111111000000	111000000111111000000
111000000000000111111	111000000000000111111	110100000100000111110
000111000111000111000	000111000111000111000	001011000011000111001
000110100100110000111	000100110100110100110	000100110011100000111
000001011000111110100	000010101010101010101	000011001000111100110
000000111011001001011	000001011001011001011	000000111100011011001

M_7	M_8	M_9
111111111000000000000	111111111000000000000	111111111000000000000
111000000111111000000	111000000111111000000	111000000111111000000
110100000100000111110	110100000100000111110	110100000100000111110
001011000011000111001	001011000011000111001	001011000011000111001
000110100010110000111	000110100010110000111	000100110010110100101
000001011001101100110	000001011100101100101	000010101100101010011
000000111100011011001	000000111001011011010	000001011001011001110

M_{10}
111111111000000000000
111000000111111000000
100110000110000111100
010101000001100110011
001000110001010101110
000010101100101001011
000001011010011010101

След заместването на елементите на $M_1, M_2, ..., M_{10}$ с циркуланти, добавяме фиксираните блокове по единствен начин. Десетте матрици водят до 183 неизоморфни дизайни. В таблици 6.2.3, 6.2.4 и 6.2.5 са представени *избраните* измежду тях. В случая това са дизайните, които са разрешими или имат ред на групата от автоморфизми поне 9.

6.2 Изследване на построените Щайнерови системи от тройки от ред 21

Класификация на конструираните дизайни според реда на техните групи от автоморфизми е представена в Таблица 6.2.1. Седем от намерените Щайнерови системи притежават и автоморфизъм от ред 7 и вече са изследвани в [56] и [85].

Броят на неизоморфните Киркманови системи от тройки от ред 21 е даден в Таблица 6.2.2. Беше установено, че 62 от дизайните са разрешими и водят до 157 $KTS(21)$. Три от разрешимите дизайни имат и автоморфизъм от ред 7. Техните неизоморфни резолюции са 26 на брой. Сред намерените Щайнерови системи няма двойно-разрешими.

Всеки от конструираните 2-(21,3,1) дизайни може да бъде получен само от една орбитна матрица. Дизайните се различават напълно чрез инвариантите, описани в Раздел 2.4.

Таблица 6.2.1: Ред на пълната група от автоморфизми на $STS(21)$

Aut	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	Общо
3					1		6	13	85	23	128
6			1		6					23	30
$9=3^2$							3	1	2	1	7
$12=2^2.3$			1								1
$18=2.3^2$							1		1	3	5
$21=3.7$						1					1
$24=2^3.3$		1									1
$36=2^2.3^2$				1							1
$42=2.3.7$										1	1
$72=2^3.3^2$		1		1							2
$126=2.3^2.7$						1				1	2
$144=2^4.3^2$		1									1
$504=2^3.3^2.7$	1										1
$882=2.3^2.7^2$						1					1
$1008=2^4.3^2.7$	1										1
Общо	2	3	2	2	7	3	10	14	88	52	183

Таблица 6.2.2: Разрешимост на 2-(21,3,1) дизайни

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	Общо
Разрешими	1		-	1	1	2	8	1	34	14	62
$KTS(21)$	18		-	11	2	8	16	1	81	20	157

Таблица 6.2.3: 2-(21,3,1) дизайни с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока ($M_1 \div M_8$)

P_1 се съдържа в блоковете 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 64, а P_4 – в блоковете 1, 5, 9, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 65.

No	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	Aut	Res
M_1	012fghijkn	3459abfgho	345cdeijkp	6789abijkq	678cdefghr		
1	1321111111	1231231231	1321231231	1231321321	1321321321	1008t	18
2	1321111111	1231231231	1321231231	1231321321	1321322131	504t	0
M_2	012fghijkn	3459abfgho	345cdeijkp	6789acfijq	678bdeghkr		
1	1321111111	1231231231	1321231321	1231323121	1321321321	24	0
2	1321111111	1231231231	1321231321	1231323121	1322132131	144	0
3	1321111111	1231231231	1322131231	1231323211	1321231321	72	0
M_3	012fghijkn	3459abfgho	3469cdijkp	578acefijq	678bdeghkr		
1	1321111111	1231231231	1323121321	1231321231	1321321321	12	0
M_4	012fghijkn	3459abfgho	3469cdijkp	578cdefgiq	678abehjkr		
1	1321111111	1231231231	1323122131	1231323211	1321321231	36	0
2	1321111111	1231231321	1323121231	1231321231	1321323211	72	11
M_5	012fghijkn	3459abfgho	3679cdfijp	468acegikq	578bdehjkr		
1	1321111111	1231231321	1232133211	1233213121	1323211231	6	2
M_6	0139fghijn	245abfghko	367abcijkp	458cdefijq	6789deghkr		
1	1323111111	1231312311	1231231221	1322132131	1322312131	882t	4
2	1323111111	1231312311	1232311231	1323122131	1323213211	21t	0
3	1323111111	1231331211	1233121211	1323121321	1323213221	126t	4
M_7	0139fghijn	245abfghko	346acdijkp	578bcefijq	6789deghkr		
1	1323111111	1231312311	1232131231	1233123211	1321321321	3	6
2	1323111111	1231312311	1323211211	1232311321	1323213211	3	1
3	1323111111	1231321311	1232131231	1232312131	1322311221	3	1
4	1323111111	1231321311	1232131231	1232312131	1323212331	9	3
5	1323111111	1231321311	1232131231	1233211321	1322311221	3	1
6	1323111111	1231321311	1323211211	1232132131	1321233111	3	2
7	1323111111	1231331211	1323211211	1233122131	1323123221	9	0
8	1323111111	1233112311	1232311221	1233121321	1321321321	9	1
9	1323111111	1233121311	1323121231	1231231321	1321233111	18	1
M_8	0139fghijn	245abfghko	346acdijkp	5789cefikq	678bdeghjr		
1	1323111111	1231331211	1233212121	1233123231	1323122131	3	1
2	1323111111	1231331211	1323211211	1231323131	1323122131	9	0

Таблица 6.2.4: 2-(21,3,1) дизайни с автоморфизъм от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока (M_9)

P_1 се съдържа в блоковете 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 64, а P_4 – в блоковете 1, 5, 9, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 65.

No	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	Aut	Res
M_9	0139fghijn	245abfghko	367acdfikp	4689cegjkq	578bdehijr		
1	1323111111	1231312311	1231232131	1232312121	1232133121	3	1
2	1323111111	1231312311	1231232131	1232312121	1233122131	3	2
3	1323111111	1231312311	1231232131	1232312121	1323122311	3	1
4	1323111111	1231312311	1232311231	1233213211	1233122311	3	1
5	1323111111	1231312311	1322311231	1323122321	1322313211	3	1
6	1323111111	1231313211	1231232131	1231323121	1322132311	3	1
7	1323111111	1231313211	1231232131	1231323121	1323121321	3	5
8	1323111111	1231313211	1231232131	1321233121	1232132131	3	1
9	1323111111	1231313211	1231322131	1233123221	1232312131	3	3
10	1323111111	1231313211	1232311231	1233123221	1233211231	3	1
11	1323111111	1231313211	1321232131	1322131211	1232132311	3	3
12	1323111111	1231313211	1322131231	1321233121	1232132131	3	3
13	1323111111	1231313211	1322131231	1321233121	1323211231	3	2
14	1323111111	1231313211	1323121221	1231233121	1232312131	3	2
15	1323111111	1231313211	1323122111	1321323121	1232312311	3	1
16	1323111111	1231313211	1323122111	1321323121	1233121231	3	2
17	1323111111	1231313211	1323122111	1321323121	1323211321	3	1
18	1323111111	1231313211	1323211221	1322311211	1232312311	3	2
19	1323111111	1231313211	1323212111	1232311211	1322312131	3	1
20	1323111111	1231313211	1323212111	1232311211	1323121321	3	1
21	1323111111	1231313211	1323212111	1233213221	1322312131	3	1
22	1323111111	1231313211	1323212111	1233213221	1323121321	3	1
23	1323111111	1231313211	1323212111	1323123221	1322132311	3	2
24	1323111111	1231321311	1231231221	1322131221	1323212311	3	1
25	1323111111	1231321311	1231321221	1233122311	1233212311	3	4
26	1323111111	1231321311	1322131211	1322311221	1233212311	3	1
27	1323111111	1231323111	1231231221	1232311211	1233123211	3	1
28	1323111111	1231323111	1231321221	1321321311	1232311231	3	2
29	1323111111	1231323111	1322132131	1322311211	1232131321	3	1
30	1323111111	1231323111	1323212121	1321321311	1232311231	3	2
31	1323111111	1231323111	1323212121	1321321311	1322131321	3	2
32	1323111111	1233113211	1232311221	1321233121	1231231231	9	3
33	1323111111	1233113211	1232311221	1321233121	1233122311	9	16
34	1323111111	1233113211	1232311221	1321233121	1323212131	18	9

Таблица 6.2.5: 2-(21,3,1) дизайни с автоморфизми от ред 3 без фиксирани точки и със 7 фиксирани блока (M_{10})

P_1 се съдържа в блоковете 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 64, а P_4 – в блоковете 1, 5, 9, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 65.

No	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{16}	P_{19}	Aut	Res
M_{10}	0349afghin	135bcfgjko	267bdfhijp	4689cehjkq	578adegikr		
1	1232311111	1231223111	1231312321	1231231321	1232312111	3	2
2	1232311111	1231223111	1231312321	1231231321	1321233131	3	1
3	1232311111	1231223111	1231312321	1232313131	1323123231	3	1
4	1232311111	1231223111	1231313221	1322313131	1322132111	3	1
5	1232311111	1231223111	1233121321	1321321131	1322312111	6	1
6	1232311111	1231223111	1233123121	1322313131	1231233131	3	3
7	1232311111	1231223111	1233131211	1321321311	1321233131	9	0
8	1232311111	1231223111	1321312321	1322133121	1323212311	6	2
9	1232311111	1231223111	1321331231	1322133121	1321323131	6	1
11	1232311111	1231223111	1323121321	1231231321	1231323131	3	1
12	1232311111	1231223111	1323123121	1321321131	1322312111	6	1
13	1232311111	1231223111	1323131211	1322133211	1231233131	6	3
14	1232311111	1231223111	1323132111	1232133121	1233212311	6	1
15	1232311111	1231223111	1323132111	1232313131	1321323131	6	1
16	1232311111	1231232111	1231321321	1321321131	1232312131	18	0
17	1232311111	1232123111	1321321321	1231231311	1323212311	18	0
18	1232311111	1232123111	1321321321	1322133321	1323212311	18	0
19	1232311111	1322113111	1233131211	1232313211	1321321311	6	1
20	1233211111	1231232111	1233131221	1233213321	1232132331	42t	0
21	1323211111	1231212111	1231331221	1321321131	1232312331	126t	0

6.3 Коментар

Настоящето изследване доведе до конструирането и класификацията на 183 Щайнерови системи от тройки от ред 21. Само 7 от тях вече бяха изследвани в [56] и [85]. Построени са 157 Киркманови системи от тройки от ред 21. Въпросът за съществуването на двойно-разрешими Щайнерови системи от тройки от ред 21 остава открит, защото сред конструираните няма такива. Класификацията на дизайните с други, все още неразглеждани автоморфизми от ред 3 или 2 е трудна задача поради големия брой на орбитните матрици, но може би точно тя ще доведе до построяването на първия двойно-разрешим 2-(21,3,1) дизайн.

Включените в тази глава резултати са публикувани в [45].

Глава 7

Ред на групата от автоморфизми на 2-(40,10,3) дизайн, чието съществуване е под въпрос

Локалният подход може успешно да бъде използван за изясняване на въпроса за съществуването на някои дизайни. Ако не доведе до построяването на такива, то поне могат да бъдат направени съответните изводи за възможните автоморфизми на хипотетичния дизайн.

Въпросът за съществуването на 2-(40,10,3) дизайн все още не е решен [60]. Според теоремата на Bruck-Ryser-Chowla (1.3.4) не съществуват симетрични 2-(53,13,3) и остатъчни 2-(40,10,3) дизайни. Квазиостатъчните дизайни винаги са вложими в симетрични дизайни ако $\lambda = 1,2$ [33] и ако $\lambda > 2$ и $k > f(\lambda)$, където $f(\lambda)$ е дадена функция [21]. Но $f(3) = 76$ и съществуването на квазиостатъчен 2-(40,10,3) не е изключено.

Капралов [43] показва, че ако 2-(40,10,3) дизайн съществува, то 2, 3 и 5 са всички възможни прости делители на реда на неговата група от автоморфизми. Цел на настоящата работа е да конструираме 2-(40,10,3) дизайните с автоморфизми от ред 5, ако такива съществуват, или да докажем, че редът на групата от автоморфизми на 2-(40,10,3) дизайн не се дели на 5.

7.1 Автоморфизми от ред 5 на хипотетичен 2-(40,10,3) дизайн

Нека α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(40,10,3) дизайн и нека α фиксира f точки и h блока. Броят на нетривиалните блокови орбити спрямо

α ще означим с $l = \dfrac{(52-h)}{5}$. Очевидно $l < 11$.

Лема 7.1.1 *Ако 2-(40,10,3) дизайн притежава автоморфизъм от ред 5, то нефиксирана спрямо този автоморфизъм точка се съдържа в не повече от два фиксирани блока.*

Доказателство. Допускаме, че $h > 2$ $(l < 10)$ и че съществува нефиксирана точка, която се съдържа в три фиксирани блока. Останалите четири точки от нейната точкова орбита се съдържат в същите три фиксирани блока. Следователно частта от матрицата на инцидентност на дизайна, отговаряща на тази точкова орбита е от вида:

$$(\, a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1l} \quad u^t \quad u^t \quad u^t \quad z^t \quad z^t \quad \dots \quad z^t \,)$$

От Теорема 1.4.2.1 за съответната част от съкратената орбитна матрица следва:

$$\sum_{j=1}^{l} m_{1j} = 10, \qquad \sum_{j=1}^{l} m_{1j}^2 = 10 \tag{7.1}$$

Системата (7.1) няма решения в положителни цели числа ако $l < 10$. $\diamond$

Лема 7.1.2 *Ако 2-(40,10,3) дизайн притежава автоморфизъм от ред 5, то точките на две нетривиални точкови орбити не могат да се съдържат в по два фиксирани блока, единият от които да е общ за двете орбити.*

Доказателство. Допускаме, че съществуват две такива орбити. Без ограничение на общността можем да считаме, че това са първите две нетривиални точкови орбити. Да разгледаме частта от матрицата на инцидентност на дизайна, съответстваща на тях. За нея има само една възможност, защото според неравенството на Mann 2-(40,10,3) дизайн не може да има два еднакви блока.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1l} & u^t & u^t & z^t & z^t & \dots & z^t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2l} & u^t & z^t & u^t & z^t & \dots & z^t \end{pmatrix}$$

От Теорема 1.4.2.1 за съответната част от съкратената орбитна матрица получаваме:

$$\sum_{j=1}^{l} m_{1j} m_{2j} = 10, \quad \sum_{j=1}^{l} m_{ij} = 11, \quad \sum_{j=1}^{l} m_{ij}^2 = 15, \quad i = 1, 2. \tag{7.2}$$

Системата (7.2) няма решения в цели положителни числа. $\diamond$

Теорема 7.1.3 *Ако α е автоморфизъм от ред 5 на 2-(40,10,3) дизайн D, то α е без фиксирани точки и с два фиксирани блока.*

Доказателство. **1.** Допускаме, че α фиксира f точки (f = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35). Тъй като всяка фиксирана точка се съдържа в 13 блока ($r = 13$), α трябва да фиксира поне 3 блока. Но α може да фиксира $5n + 2$ блока (n = 0, 1, 2, ..., 9). Следователно α фиксира поне 7 блока.

Нека $f = 5$. Тогава трябва да има 3 блока, съдържащи всички фиксирани точки, а всяка фиксирана точка трябва да е в 3 фиксирани и 10 нефиксирани блока, което е невъзможно (нефиксираните блокове са най-много 45, а две фиксирани точки не могат да бъдат в един и същи нефиксиран блок, защото това би означавало, че съществуват 5 блока, съдържащи тази двойка фиксирани точки.) Следователно α не може да фиксира 5 точки.

Нека $f > 5$ и нека α фиксира h блока ($h = 7, 12, 17, ..., 47$).

Броят на нефиксираните блокове е най-много 45. Фиксирана точка може да бъде в 0, в 5 или в 10 нефиксирани блока. Ето защо съществува поне една фиксирана точка, която се съдържа само във фиксирани блокове. Тази фиксирана точка трябва да е в точно 3 ($\lambda = 3$) фиксирани блока заедно с коя да е нефиксирана точка. Това означава, че всички нефиксирани точки трябва да се съдържат в три фиксирани блока, но това е невъзможно (Лема 7.1.1).

2. Допускаме, че α фиксира $h > 2$ блока и нито една точка.

В този случай всеки фиксиран блок се състои от 10 нефиксирани точки от две точкови орбити спрямо α. Нефиксирана точка не може да е в 3 фиксирани блока (Лема 7.1.1). Понеже фиксираните блокове са поне 7, трябва да има поне две точкови орбити, такива, че точките им се съдържат в два фиксирани блока, единият от които е общ за двете орбити. Според Лема 7.1.2 това е невъзможно. $\diamond$

7.2 Търсене на 2-(40,10,3) дизайни с автоморфизъм от ред 5 без фиксирани точки и с два фиксирани блока

Нека D е $2-(40,10,3)$ дизайн с автоморфизъм α от ред 5, фиксиращ два блока и нито една точка. Без ограничение на общността можем да считаме, че α действа както следва:

върху точките: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(36,37,38,39,40)$,

върху блоковете: $\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)...(46,47,48,49,50)(51)(52)$.

За матрицата на инцидентност на D има две възможности:

$$
1)\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,10} & u^t & u^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,10} & u^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,10} & z^t & u^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4,10} & z^t & z^t \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & \dots & a_{5,10} & z^t & z^t \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & \dots & a_{6,10} & z^t & z^t \\
a_{71} & a_{72} & a_{73} & \dots & a_{7,10} & z^t & z^t \\
a_{81} & a_{82} & a_{83} & \dots & a_{8,10} & z^t & z^t
\end{pmatrix}
2)\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,10} & u^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,10} & u^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,10} & z^t & u^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4,10} & z^t & u^t \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & \dots & a_{5,10} & z^t & z^t \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & \dots & a_{6,10} & z^t & z^t \\
a_{71} & a_{72} & a_{73} & \dots & a_{7,10} & z^t & z^t \\
a_{81} & a_{82} & a_{83} & \dots & a_{8,10} & z^t & z^t
\end{pmatrix}
$$

Условията за съкратената орбитна матрица $M = (m_{i,j})_{8\times 10}$ получаваме от Теорема 1.4.2.1 и ще разгледаме поотделно в двата случая.

$$
\textbf{Случай 1.}\quad
\left|
\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{10} m_{1j} = 11, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{1j}^2 = 15 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 12, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2 = 20, \qquad i = 2,3 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 13, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2 = 25, \qquad i = 4,5,...,8 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{1j}m_{ij} = 10, \qquad\qquad\qquad i = 2,3 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{i_1 j}m_{i_2 j} = 15, \; i_1,i_2 = 1,...,8, \; i_1 \neq i_2, \; (i_1,i_2) \neq (1,2),(1,3).
\end{array}
\right.
\qquad (7.3)
$$

Няма нито една целочислена матрица, за която уравненията (7.3) да са изпълнени.

$$
\textbf{Случай 2.}\quad
\left|
\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 12, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{1j}^2 = 20, \qquad i = 1,2,3,4 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 13, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2 = 25, \qquad i = 5,6,7,8 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{1j}m_{2j} = 10, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{3j}m_{4j} = 10 \\
\sum_{j=1}^{10} m_{i_1 j}m_{i_2 j} = 15, \; i_1,i_2 = 1,...,8, \; i_1 \neq i_2, \; (i_1,i_2) \neq (1,2),(3,4).
\end{array}
\right.
\qquad (7.4)
$$

Съществуват 54 нееквивалентни матрици, за който (7.4) е в сила.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 1 1 2 2 2 0 2 1 1	0 1 1 2 2 2 0 2 1 1	0 1 1 2 2 2 0 2 1 1	0 1 1 2 2 2 0 2 1 1	0 1 1 2 2 2 0 2 1 1
2 1 1 0 1 1 2 0 2 2	2 1 1 0 1 1 2 0 2 2	2 1 1 0 1 1 2 0 2 2	2 1 1 0 1 1 2 0 2 2	2 1 1 0 1 1 2 0 2 2
2 2 1 2 0 0 0 2 2 2	0 3 2 1 0 2 2 1 1 1	0 3 2 1 1 1 2 1 0 2	0 3 2 1 1 1 2 1 0 2	1 1 2 1 2 2 3 1 0 0
0 2 3 2 1 1 2 0 1 1	2 0 3 2 1 1 1 1 0 2	2 0 3 2 0 2 1 1 1 1	2 1 0 3 0 2 2 1 1 1	1 2 2 2 0 1 1 1 0 3
2 1 1 1 0 3 2 2 0 1	2 1 0 3 1 1 2 1 2 0	2 1 0 3 2 0 2 1 1 1	2 1 1 1 3 0 2 2 1 0	1 2 2 2 1 0 1 1 3 0
2 1 1 1 3 0 2 2 1 0	2 2 1 0 2 0 1 3 1 1	2 2 1 0 1 1 1 3 2 0	2 1 3 1 0 1 0 2 2 1	3 1 0 1 1 1 1 3 1 1

M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 1 1 2 2 2 0 2 1 1	0 1 1 2 2 2 0 2 1 1	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2
2 1 1 0 1 1 2 0 2 2	2 1 1 0 1 1 2 0 2 2	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1
1 2 0 2 1 2 3 1 0 1	1 2 2 2 0 1 1 1 0 3	2 2 1 0 0 2 2 2 0 2	2 2 1 0 0 2 2 2 0 2	0 2 3 2 1 1 1 1 2 0
1 2 2 2 0 1 1 1 3 0	1 2 2 2 1 0 1 1 3 0	0 3 1 2 1 1 1 2 2 0	1 2 1 1 3 0 2 2 1 0	2 1 0 2 1 2 1 3 1 0
1 2 3 0 1 1 1 2 0 2	2 1 1 1 0 3 2 2 1 0	2 0 3 2 1 1 0 2 1 1	1 2 1 3 0 1 0 2 2 1	2 1 2 0 2 1 3 1 0 1
3 0 1 2 2 0 1 2 1 1	2 1 1 1 3 0 2 2 0 1	2 1 1 2 2 0 3 0 1 1	2 0 3 2 1 1 2 0 1 1	2 2 1 2 0 0 1 1 1 3

M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2
2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1
0 3 2 2 0 1 1 1 2 1	0 3 2 2 0 1 1 1 2 1	1 1 2 3 0 2 1 1 2 0	1 1 2 3 1 1 0 2 2 0	1 1 2 3 1 1 0 2 2 0
2 0 3 2 2 0 1 1 1 1	2 1 0 2 1 2 1 3 1 0	1 2 2 1 2 0 0 3 1 1	1 2 3 1 0 1 2 0 1 2	1 3 0 1 0 2 2 2 1 1
2 1 0 2 1 2 1 3 1 0	2 1 1 2 2 0 3 0 1 1	3 0 2 1 1 1 2 1 0 2	1 3 0 1 2 0 2 2 1 1	2 1 1 2 2 0 3 0 1 1
2 2 1 0 1 1 3 1 0 2	2 1 3 0 1 1 1 2 0 2	1 3 0 1 1 1 3 1 1 1	3 0 1 1 1 2 2 2 0 1	2 1 3 0 1 1 1 2 0 2

M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 1 2 2 2 1 1 0 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2
2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 1 0 1 1 1 1 3 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1
1 2 0 3 1 1 1 2 2 0	1 2 0 3 1 1 1 2 2 0	1 2 1 1 0 3 2 2 1 0	1 2 1 3 0 1 0 2 2 1	0 3 1 1 1 2 2 2 1 0
1 2 2 1 0 2 3 0 1 1	1 2 2 1 0 2 3 0 1 1	1 2 1 3 1 0 0 2 2 1	1 2 3 1 1 0 2 0 1 2	2 0 1 3 2 1 1 2 1 0
1 2 3 1 1 0 0 2 1 2	2 0 3 2 2 0 1 1 1 1	1 2 2 1 2 0 3 0 1 1	2 1 0 2 2 1 3 1 1 0	2 1 3 1 0 1 2 0 2 1
3 0 1 1 2 1 2 2 0 1	2 2 1 0 1 1 1 3 0 2	3 0 2 1 1 1 1 2 0 2	2 1 2 0 1 2 1 3 0 1	2 2 1 1 1 0 1 2 0 3

M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{24}	M_{25}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2
2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1
0 3 1 1 1 2 2 2 1 0	0 3 1 1 2 1 2 2 0 1	0 3 1 2 1 1 2 1 2 0	0 3 1 2 2 0 2 1 1 1	1 1 2 2 1 2 3 0 1 0
2 1 0 3 1 1 2 1 0 2	2 1 0 3 0 2 2 1 1 1	2 0 3 1 1 2 2 1 1 0	2 1 0 2 1 2 1 3 0 1	1 2 0 3 2 0 1 2 1 1
2 1 2 1 2 0 0 3 1 1	2 1 2 1 1 1 0 3 2 0	2 1 1 2 2 0 0 3 1 1	2 1 2 2 0 1 1 1 3 0	1 3 2 0 0 1 1 2 2 1
2 1 3 1 0 1 2 0 2 1	2 1 3 1 1 0 2 0 1 2	2 2 1 1 0 1 2 1 0 3	2 1 3 0 1 1 2 1 0 2	3 0 2 1 1 1 1 2 0 2

M_{26}	M_{27}	M_{28}	M_{29}	M_{30}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 1 2 2 1 2 0 1 1 2	0 2 1 1 1 2 0 2 1 2
2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 1 0 0 2 1 2 1 2 1	2 0 1 1 2 1 2 0 2 1
1 1 2 2 2 1 3 0 0 1	1 1 2 2 2 1 3 0 0 1	1 1 2 2 3 0 1 2 1 0	1 2 0 3 1 1 1 2 2 0	2 2 0 1 0 2 2 2 2 0
1 2 0 3 1 1 1 2 2 0	1 3 0 2 1 0 1 2 1 2	1 2 1 2 1 1 3 0 0 2	1 2 2 1 0 2 3 0 1 1	0 2 3 1 2 1 2 1 1 0
1 3 2 0 1 0 1 2 1 2	2 1 2 0 1 2 1 3 0 1	1 3 2 0 0 1 1 2 2 1	2 0 3 1 2 1 1 2 1 0	2 0 2 3 1 1 0 2 1 1
3 0 2 1 0 2 1 2 1 1	2 1 2 2 0 1 1 1 3 0	3 0 1 2 0 2 1 2 1 1	2 2 1 1 1 0 1 2 0 3	2 2 1 1 1 0 2 1 0 3

M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}	M_{35}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
0 2 1 1 1 2 0 2 1 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2
2 0 1 1 2 1 2 0 2 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1
1 1 2 2 0 3 2 1 1 0	2 2 0 1 0 2 2 2 2 0	0 2 1 3 1 2 2 1 1 0	0 2 1 3 1 2 2 1 1 0	0 2 1 3 1 2 2 1 1 0
1 1 2 3 2 0 1 1 0 2	0 2 2 3 1 1 0 2 1 1	1 2 3 0 1 1 2 1 0 2	1 3 2 0 0 1 1 2 1 2	2 0 3 1 2 1 2 1 0 1
1 3 2 0 1 0 2 1 2 1	1 2 2 1 1 1 3 0 0 2	2 2 1 1 0 1 0 3 2 1	2 0 3 1 2 1 2 1 0 1	2 2 1 0 1 1 1 3 2 0
3 1 0 1 1 1 1 3 1 1	3 0 2 1 2 0 1 2 1 1	3 0 1 2 2 0 2 1 1 1	3 1 0 2 1 0 1 2 2 1	2 2 1 2 0 0 1 1 1 3

M_{36}	M_{37}	M_{38}	M_{39}	M_{40}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2
1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1
0 2 1 3 1 2 2 1 1 0	0 2 3 2 1 1 1 1 0 2	0 3 1 2 0 2 2 1 1 1	0 3 1 2 0 2 2 1 1 1	0 3 2 1 0 2 1 2 1 1
2 0 3 2 1 1 1 1 0 2	1 2 0 3 1 1 1 2 2 0	1 1 2 3 2 0 0 2 1 1	1 1 3 2 2 0 1 1 0 2	1 1 2 2 2 1 3 0 0 1
2 2 1 0 2 0 3 1 1 1	2 2 1 0 0 2 3 1 1 1	2 1 3 0 1 1 2 1 0 2	2 1 1 2 1 1 0 3 2 0	2 1 0 3 1 1 1 2 2 0
2 2 1 1 0 1 0 3 2 1	3 0 2 1 2 0 1 2 1 1	3 1 0 1 1 1 2 2 2 0	3 1 1 0 1 1 3 1 1 1	3 1 2 0 1 0 1 2 1 2

M_{41}	M_{42}	M_{43}	M_{44}	M_{45}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1
1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 0 1 2 2 1 2 0 2	1 1 1 1 0 3 1 1 1 2	1 1 1 1 0 3 1 1 1 2
1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 2 1 1 1 1 0 3 1	1 1 1 1 3 0 1 1 2 1	1 1 1 1 3 0 1 1 2 1
0 3 2 1 0 2 1 2 1 1	1 1 2 2 0 3 1 2 1 0	1 1 2 2 1 2 3 0 0 1	0 2 1 2 2 2 2 2 0 0	0 2 1 2 2 2 2 2 0 0
1 1 2 2 3 0 1 2 1 0	1 1 3 2 2 0 1 1 0 2	1 1 2 3 2 0 0 2 1 1	1 3 1 2 0 0 1 1 2 2	2 0 3 2 1 1 0 2 1 1
2 1 2 1 1 1 3 0 0 2	1 3 0 2 1 0 1 2 2 1	1 3 0 1 1 1 2 2 2 0	2 0 3 2 1 1 0 2 1 1	2 2 1 1 0 1 2 1 3 0
3 1 0 2 0 1 1 2 2 1	3 1 1 0 1 1 3 1 1 1	3 1 2 0 0 1 1 2 1 2	3 1 1 0 1 1 3 1 1 1	2 2 1 1 1 0 2 1 0 3

M_{46}	M_{47}	M_{48}	M_{49}	M_{50}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 2 1 1 2 2 0 0 1 1	2 3 1 1 1 1 0 1 1 1	2 3 1 1 1 1 0 1 1 1	2 3 1 1 1 1 0 1 1 1
1 1 1 1 0 3 1 1 1 2	1 1 1 1 0 3 1 1 1 2	0 2 1 1 1 2 1 0 2 2	0 2 1 1 1 2 1 0 2 2	0 2 1 1 1 2 1 0 2 2
1 1 1 1 3 0 1 1 2 1	1 1 1 1 3 0 1 1 2 1	2 1 1 1 1 0 1 3 1 1	2 1 1 1 1 0 1 3 1 1	2 1 1 1 1 0 1 3 1 1
2 2 1 2 0 0 0 2 2 2	1 1 1 2 2 2 1 3 0 0	0 2 1 2 2 2 2 2 0 0	1 1 0 2 2 3 1 2 0 1	1 1 0 2 2 3 1 2 0 1
0 2 3 2 1 1 2 0 1 1	1 2 2 2 0 1 1 1 3 0	2 0 1 1 3 2 0 1 1 2	1 2 2 0 2 1 3 1 1 0	1 2 2 0 2 1 3 1 1 0
1 1 1 2 2 2 1 3 0 0	1 2 2 2 1 0 1 1 0 3	2 1 1 3 1 0 2 0 2 1	2 0 3 1 1 2 0 1 2 1	3 0 1 1 2 1 1 0 2 2
3 1 1 0 1 1 3 1 1 1	3 1 1 0 1 1 3 1 1 1	2 1 3 0 0 2 2 1 1 1	2 1 1 3 1 0 2 0 1 2	1 1 3 3 0 1 1 1 1 1

M_{51}	M_{52}	M_{53}	M_{54}
0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2	0 1 1 1 1 1 1 1 2 3
2 3 1 1 1 1 0 1 1 1	2 3 1 1 1 1 0 1 1 1	2 3 1 1 1 1 0 1 1 1	3 1 1 1 1 1 1 2 1 0
1 2 0 1 1 1 2 0 2 2	1 2 0 1 1 1 2 0 2 2	1 2 0 1 1 1 2 0 2 2	1 1 1 1 1 1 1 3 0 2
1 1 2 1 1 1 0 3 1 1	1 1 2 1 1 1 0 3 1 1	1 1 2 1 1 1 0 3 1 1	2 1 1 1 1 1 1 0 3 1
2 0 2 1 2 2 0 0 2 2	0 2 2 1 1 3 2 1 0 1	1 1 3 0 2 2 1 0 1 2	0 0 1 2 2 2 2 2 2 0
0 2 2 1 1 3 2 1 0 1	1 1 3 2 2 0 1 0 2 1	1 2 1 1 1 2 3 2 0 0	1 2 3 0 0 2 2 1 1 1
2 1 0 1 3 1 2 2 1 0	2 1 0 1 3 1 2 2 1 0	3 0 1 2 0 2 1 1 2 1	2 1 1 1 3 1 2 0 0 2
2 1 2 3 0 0 2 1 1 1	3 0 1 2 0 2 1 1 1 2	1 1 1 3 3 0 1 1 1 1	1 3 1 3 1 1 0 1 1 1

За съжаление замяната с циркуланти в горните матрици не води до дизайн. Това означава, че ако 2-(40,10,3) дизайн съществува, то той не притежава автоморфизъм от ред 5.

7.3 Коментар

Разглежданията в тази глава показаха, че единствените възможни прости делители на реда на групата от автоморфизми на хипотетичен 2-(40,10,3) дизайн са 2 и 3. Въпросът за съществуването на дизайн с тези параметри остава без отговор.

Резултатите от тази глава са публикувани в [89].

Библиография

[1] Капралов С.Н., Алгоритми за генериране и изследване на орбитни матрици, *Юбилейна научна сесия "100 години академик Л.Чакалов"* (1986), 70-78.

[2] Капралов С.Н., Комбинаторни 2-(28,8,4) дизайни с автоморфизми от ред 3, фиксиращи една точка, *Математика и математическо образование* (1987), 453-458.

[3] Капралов С.Н., Симетрични 2-(31,10,3) дизайни с автоморфизми от ред 3, *Математика и математическо образование* (1988), 260-264.

[4] Капралов С.Н., *Комбинаторни конфигурации и групи от автоморфизми*, Дисертация за присъждане научната степен кандидат на математическите науки, 1989, София.

[5] Тончев В.Д., *Комбинаторни конфигурации и кодове*, Дисертация за присъждане научната степен кандидат на математическите науки, Софийски университет, 1980.

[6] Тончев В.Д., Графы ранга 3, дизайны и коды с неравной защитой символов, *Проблемы передачи Информации* 27, №2 (1981), 19-25.

[7] Тончев В.Д., *Комбинаторни конфигурации. Дизайни, кодове, графи*, Наука и изкуство, София 1984.

[8] Тончев В.Д., *Комбинаторни структури и кодове*, Университетско издателство "Климент Охридски", София 1988.

[9] Топалова С., Перечисление 2-(21,5,2) дизайнов с автоморфизмами нечетного простого порядка, изпратено в *Дискретный анализ и исследование операций.*

[10] Abel R.J.R., Some new BIBDs with λ=1 and 6$\leq$k$\leq$10, *J.Combin.Designs* Vol.4, No 1 (1996), 27-51.

[11] Abel R.J.R., Mills W.H., Some new BIBDs with k=6 and λ=1, *J.Combin.Designs* Vol.3, No 5 (1995), 381-391.

[12] Anderson I., Some 2-rotational and cyclic designs, *J.Combin.Designs* Vol.4, No 4 (1996), 247-254.

[13] Anstee R.P., Hall M.Jr., Thompson J., Planes of order 10 do not have collineation of order 5, *J.Combinatorial Theory*, Ser.A, 29, 1980, 39-58.

[14] Assmus E.F.Jr., Key J.D., *Designs and their Codes*, Cambridge University Press, 1992, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 103.

[15] Assmus E.F.Jr., Key J.D., Designs and codes: an update, *Designs, Codes and Cryptography* 9 (1996), 7-27.

[16] Becker H., Piper F., Some designs which admit strong tactical decompositions, *Journal of Combinatorial theory* (A) 22 (1977), 38-42.

[17] Beth Th., Jungnickel D., Lenz H., *Design Theory*, Cambridge University Press, 1993.

[18] Biggs N., *Finite groups of automorphisms*, Cambridge University Press, 1971.

[19] Bose R.C., On the construction of balanced incomplete block designs, *Ann. Eugenics* 9 (1939), 353-399.

[20] Bose R.C., A note on the resolvability of balanced incomplete block designs, *Sankhya* 6 (1942), 105-110.

[21] Bose R.C., Shrikhande S.S., Singhi N.M., Edge-regular multigraphs and partial geometric designs with an application to the embedding of quasiresidual designs, *Atti dei convegni Lincei, Theorie combinatorie, Acad. Nationale Lincei, Rome* Tome 1 (1976), 47-81.

[22] Brouwer A.E., An infinite series of symmetric designs, *Math. Centrum Amsterdam Report*, ZW 202/83.

[23] Bruck R.H., Ryser H.J., The nonexistence of certain finite projective planes, *Canadian J. Math.* 1 (1949), 88-93.

[24] Cameron P.J., Van Lint J.H., Graphs, codes and designs, *London Math. Soc. Lecture Notes* 43 (1980), Cambridge University Press, Cambridge.

[25] Cameron P.J., Van Lint J.H., *Designs, Graphs, Codes and their Links*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[26] Camina A.R., A survey of the automorphism groups of block designs, *J.Combin. Designs* Vol.2, No 2 (1994), 79-100.

[27] Chowla S., Ryser H.J., Combinatorial problems, *Canadian J. Math.* 2 (1950), 93-99.

[28] Doyen J., Rosa A., An updated bibliography and survey of Steiner systems, *Ann. Discr. Math.* 7 (1980), 317-349.

[29] Fisher R.A., An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, *Ann. Eugenics* 10 (1940), 52-75.

[30] Fisher R.A., Yates F., *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Edinburg (1957)

[31] Gropp H., The elementary abelian Steiner systems S(2,4,49) *Discrete Mathematics* 64 (1987), 87-90.

[32] Hall M.,Jr., *Combinatorial theory*, J.Wiley & Sons, New York, 1986.

[33] Hall M.,Jr., Connor W.S., An embedding theorem for BIBDs, *Canadian J. Math.* 6 (1954), 35-41.

[34] Hanani H., Balanced incomplete block designs and related designs, *Discrete Mathematics* 11 (1975), 255-369.

[35] Hughes D., Piper F., *Design Theory*, Cambridge University Press, 1975.

[36] Janko Z.,Van Trung Tr., Construction of a new symmetric block design for (78,22,6) with the help of tactical decompositions, *J.Combin.Theory* Ser.A, 40 (1985), 451-455.

[37] Jungnickel D., Quasimultiples of biplanes and residual biplanes, *Ars Combinatoria* 19 (1985), 179-186.

[38] Jungnickel D., Quasimultiples of projective and affine planes, *J.Geometry* 26 (1986), 172-181.

[39] Jungnickel D., On the existence of small quasimultiples of affine and projective planes of arbitrary order, II, *J.Combin.Designs* Vol.3, No.6 (1995)

[40] Kageyama S., A survey of resolvable solutions of balances incomplete block designs, *Rev. Inst. Internat. Stat.* 40 (1972), 269-273.

[41] Kapralov S.N., 2-(10,4,4) designs with automorphisms of order 2 fixing no point or block, *Proceedings of the First International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Varna, Bulgaria* (1988), 112-115.

[42] Kapralov S.N., The uniqueness of a group-divisible symmetric design on 30 points, *Mathematics and Education in Mathematics* (1989).

[43] Kapralov S.N., On the automorphism groups of 2-(40,10,3) designs, *Mathematics and Education in Mathematics* (1993), 38-42.

[44] Kapralov S.N., Landgev I.N., Tonchev V.D., 2-(25,10,6) designs invariant under the dihedral group of order 10, *Annals of Discr. Mathematics* 34 (1987), 301-306.

[45] Kapralov S.N., Topalova S., On the Steiner Triple Systems of order 21 with automorphisms of order 3, *Proceedings of the Third International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, V.Voda, Bulgaria* (1992), 105-108.

[46] Kapralov S.N., Topalova S., Enumeration of 2-(21,6,3) Designs with Automorphisms of Order 7 or 5, *Ars Combinatoria*, vol.4 (1998), to appear

[47] Kimura H., Hadamard matrices of order 28 with automorphism groups of order 2, *J.Combin.Theory* Ser.A, 43 (1986), 98-102.

[48] Kirkman T.P., Note on an unanswered prize question, *Cambridge and Dublin Math. J.* 5 (1850), 225-262.

[49] Kramer E.S., Magliveras S.S., Mathon R., The Steiner systems S(2,4,25) with nontrivial automorphism group, *Discrete Math.* 77 (1989), 137-157.

[50] Lam C.W.H., Thiel L., Swiercz S., The non-existence of finite projective planes of order 10, *Canad.J.Math* 41(1989), 1117-1123.

[51] Landgev I., On symmetric 2-(41,16,6) designs invariant under the Frobenius group of order 10, *C.R.Acad.Bulg.Sci.* 40(1987), No 5, 29-31.

[52] Landgev I., Tonchev V.D., Automorphisms of 2-(22,8,4) designs, *Annals of Discrete Math.* 77 (1989), 177-189.

[53] Landjev I., Topalova S., Symmetric 2-(61,16,4) designs invariant under the dihedral group of order 10, *Serdika*, vol.23 (1997), 1001-1008.

[54] Mann H.B., A note on balanced incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.* 40 (1969), 679-680.

[55] Mathon R., Symmetric (31,10,3) designs with non-trivial automorphism group, *Ars Combinatoria* 25 (1988), 171-183.

[56] Mathon R., Phelps K., Rosa A., A class of Steiner triple systems of order 21 and associated Kirkman systems, *Math. Comput.* 37 (1981), 209-222.

[57] Mathon R., Rosa A., The 4-rotational Steiner and Kirkman triple systems of order 21, *Ars Combinatoria* 17A (1984), 221-250.

[58] Mathon R., Rosa A., Some results on the existence and enumeration of BIBDs, *Math. Report* 125 (1985), Dept.of Math.&Stat, McMaster univ., 33.

[59] Mathon R., Rosa A., Tables of Parameters of BIBDs with $r \leq 41$ Including Existence, Enumeration and Resolvability Results, *Ars Combinatoria* 30 (1990), 65-96.

[60] Mathon R., Rosa A., 2-(v,k,λ) designs of small order, *CRC Handbook of Combinatorial Designs*, C. Colbourn and J. Dinitz eds., CRC Press, New York 1996, 3-41.

[61] Mathon R., Spence E., On 2-(45,12,3) designs, *J. Combin. Designs* Vol.4, No.3 (1996), 155-175.

[62] Matulic-Bedenic I., Horvatic-Baldasar K., Kramer E., Construction of new symmetric designs with parameters (66,26,10), *J. Combin. Designs* Vol.3, No.6 (1995), 405-410.

[63] Menon P.K., On difference sets whose parameters satisfy a certain relation, *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962), 739-745.

[64] Mills W.H., Balanced incomplete block designs with k=6 and λ=1, Enumeration and design, *D.M.Jackson and S.A.Vanstone (Editors) Academic*, Canada, 1984, 239-224.

[65] Mills W.H., BIBDs with λ=1, *Congr.Numer.* 73 (1990), 175-180.

[66] Mitchell,C.J., An infinite family of symmetric designs, *Discrete Mathematics* 26 (1979), 247-250.

[67] Morgan E.J., Some small quasi-multiple designs, *Ars Combinatoria* 3 (1977), 233-250.

[68] Mullin R.C., Finite bases for some PBD-closed sets, *Discrete Math.* 77 (1989), 217-236.

[69] Mullin R.C., Hoffman D.G., Linder C.C., A few more BIBDS with k=6 and $\lambda = 1$, *Ann. Discr. Math.* 34 (1987), 379-384.

[70] Rajkundlia D., Some technics for constructing infinite families of BIBD's, *Discrete Mathematics* 44 (1983), 64-96.

[71] Seberry J., On the existence of Hadamard matrices, *J.Comb.Th.*(A) 21 (1976), 188-195.

[72] Shull R., The classification of projective planes of order 9 possessing collineations of order 5, *Algebras, groups and geometries* 3 (1985), 365-379.

[73] Spence E., Symmetric (31,10,3)-designs with a non-trivial authomorphism of odd order, *JCMCC* 10 (1991), 51-64.

[74] Spence E., A complete classification of symmetric (31,10,3) Designs, *Designs, Codes and Cryptography* 2 (1992), 127-136.

[75] Spence E., Symmetric (41,16,6)-designs with a nontrivial authomorphism of odd order, *J. Combin. Designs* Vol.1, No.3 (1993), 193-211.

[76] Spence E., The complete classification of Steiner systems S(2,4,25), *J.Combin. Designs* Vol.4, No. 4 (1996), 295-300.

[77] Steiner J., Combinatorische Aufgabe, *J. Reine u. Angew. Math.* 45 (1853), 181-182.

[78] Street A.P, Street D.J., *Combinatorics of Experimental Design*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[79] Šiftar J., On the automorphism groups of designs with parameters 2-(46,6,1) and 2-(51,6,1), *Glasnik Matematički* (1996).

[80] Takeuchi K., A table of difference sets generating balanced incomplete block designs, *Rev. Inst. Internat. Statist.* 30:3, 361-366.

[81] Tonchev V.D., On block designs arising from rank 3 graphs, *J.Stat.Plann. and Inference* 5 (1981), 399-403.

[82] Tonchev V.D., Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 13, *J.Combin.Theory* Ser.A, 35 (1983), 43-57.

[83] Tonchev V.D., Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 7, *J.Combin.Theory* Ser.A, 40 (1985), 62-81.

[84] Tonchev V.D., Hadamard matrices of order 36 with automorphisms of order 17, *Nagoya Math.J.* 104 (1986), 163-174.

[85] Tonchev V.D., Steiner triple systems of order 21 with automorphisms of order 7, *Ars Combinatoria* 23 (1987), 93-96.

[86] Tonchev V.D., Symmetric 2-(31,10,3) designs with automorphisms of order 7, *Annals of Discrete Math.* 34 (1987), 461-464.

[87] Topalova S., Enumeration of 2-(21,5,2) designs with an automorphism of order 7, *Proceedings of the Fourth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Novgorod, Russia* (1994), 187-189.

[88] Topalova S., Enumeration of 2-(21,5,2) designs with an automorphism of order 5, *Mathematics and Education in Mathematics* (1995), 241-253.

[89] Topalova S., On the order of the automorphism group of 2-(40,10,3) designs, *Mathematics and Education in Mathematics* (1996), 161-166.

[90] Topalova S., Enumeration of 2-(25,5,2) Designs with automorphisms of order 5 without fixed points and with 5 or 10 fixed blocks, *Proceedings of the Fifth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Sozopol, Bulgaria* (1996), 288-294.

[91] Topalova S., Enumeration of 2-(25,5,2) Designs with an Automorphism of order 5 with 5 fixed points and 10 fixed blocks, *Mathematics and Education in Mathematics* (1997), 198-201.

[92] Topalova S., Enumeration of 2-(25,5,2) Designs with an automorphism of order 5, submitted to *J. Combinatorics, Information and System Sciences.*

[93] van Trung Tr., The existence of symmetric block designs with parameters (41,16,6) and (66,26,10), *J.Combin.Theory* Ser.A, 33 (1982), 201-204.

[94] Wallis W.D., Street A.P., Wallis J.S., Combinatorics: Room squares, sumfree-sets, Hadamard matrices, *Lecture Notes in Mathematics* 292 (1972), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[95] Whitesides S.H., Fixed point free collineations of order 7 in projective planes of order 9, *Algebras, Groups and Geometries* 2 (1985), 564-578.

[96] Wielandt H., *Finite permutation groups*, Academic Press, 1964.

[97] Wilson R.M., Nonisomorphic Steiner triple systems, *Math.Z.* 135 (1974), 303-313.

[98] Zhu J., Du B., Yin J., Some new balanced incomplete block designs with k=6 and λ=1, *ArsCombinatoria* 24 (1987), 167-174.