Българска Академия на Науките
Институт по Математика и Информатика

Яна Алексиева Алексиева

ЛОРЕНЦОВИ ПОВЪРХНИНИ В ЧЕТИРИМЕРНОТО ПСЕВДО-ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО С НЕУТРАЛНА МЕТРИКА

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация
за присъждане на образователна и научна степен "доктор"

Област на висше образование: 4. Природни науки, Математика и Информатика
Професионално направление: 4.5. Математика
Докторска програма: Геометрия и Топология

Научен консултант: доц. д-р Величка Милушева

София, 2017 г.

Дисертационният труд съдържа 95 страници, от които 87 страници основен текст и 5 страници библиография с 61 заглавия.

Номерацията на дефинициите, следствията, твърденията и теоремите в автореферата съответства точно на номерацията им в дисертационния труд.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на заседание на разширено звено към секция „Анализ, Геометрия и Топология“ на ИМИ – БАН, назначено със заповед номер 529/02.11.2017г., проведено на 03.11.2017г.

Дисертантът работи като математик към катедра „Геометрия“ на Факултета по Математика и Информатика при СУ „Св. Кл. Охридски“.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от .... часа в аудитория .... на ИМИ–БАН на открито заседание на научно жури в състав:

1. проф. дмн Олег Мушкаров – ИМИ–БАН
2. доц. д-р Величка Милушева – ИМИ–БАН
3. проф. дмн Манчо Манев – ПУ „Паисий Хилендарски“
4. проф. д-р Огнян Касабов – ВТУ „Т. Каблешков“
5. доц. д-р Иван Минчев – ФМИ, СУ „Св. Кл. Охридски“

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ–БАН.

Автор: Яна Алексиева Алексиева

Заглавие: Лоренцови повърхнини в четиримерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика.

Въведение

Една от фундаменталните задачи в съвременната диференциална геометрия на повърхнините и хиперповърхнините в стандартни модел-ни пространства, като Евклидовото пространство $\mathbb{E}^m$, пространството на Минковски $\mathbb{E}^m_1$ или псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^m_s$ с индекс $s > 1$, е изследването на основните инварианти, които характеризират повърхнините. Разработването на теорията на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, както и в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$, е база за разработването на общата теория на 2-мерни повърхнини в $\mathbb{E}^m$ и в $\mathbb{E}^m_1$.

Напоследък интезивно се изучават повърхнини в псевдо-Евклидови пространства с неутрална метрика, тъй като те намират интерпретация и от физична гледна точка. В псевдо-Евклидово пространство съществуват два типа повърхнини в зависимост от това каква е индуцираната им метрика – Риманова или Лоренцова. В настоящата работа разглеждаме Лоренцови повърхнини в 4-мерното псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика $\mathbb{E}^4_2$.

В последните години се появиха редица изследвания, свързани с класификация на Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидово пространство, удовлетворяващи допълнителни условия за векторното поле на средната кривина, Гаусовата кривина или втория фундаментален тензор. По-долу ще споменем някои от тях.

В [21] B.-Y. Chen получава редица резултати, свързани с класификацията на минимални Лоренцови повърхнини в псевдо-Римановите пространства $\mathbb{E}^m_s$, $\mathbb{S}^m_s(c)$ и $\mathbb{H}^m_s(c)$. В частност, дава класификация на всички минимални Лоренцови повърхнини в произволно псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^m_s$.

Друг интересен и важен клас повърхнини са т.нар. квази-минимални повърхнини. Това са повърхнини, за които векторното поле на средната кривина е изотропно във всяка точка от повърхнината. Квази-минималните повърхнини в псевдо-Евклидово пространство са обект на активно проучване през последните няколко години. В [10] B.-Y. Chen класифицира плоските квази-минимални Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$, както и бихармоничните Лоренцови повърхнини с изотропно векторно поле на средната кривина. Друг интересен клас квази-минимални повърхнини са тези с постоянна Гаусова кривина, които са класифицирани в [11, 27]. Квази-минималните повърхнини на Лагранж и квази-минималните slant-повърхнини са описани съответно в [22] и [25]. В [24] е направена класификация на квази-минимални повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$ с паралелно векторно поле на средната кривина, а в [38] – класификация на квази-минимални ротационни повърхнини от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип. Съвременен обзор на резултати върху квазиминимални повърхнини може да се види в [12].

Една Лоренцова повърхнина се нарича паралелна, ако нейната втора основна форма е паралелна по отношение на свързаността на Van der Waerden-Bortolotti. Паралелните повърхнини представляват интерес както за диференциалната геометрия, така и за физиката, тъй като техните външни инварианти не се променят от точка в точка. Паралелните Лоренцови повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство са описани от B.-Y. Chen и J. Van der Veken в [26]. Експлицитна класификация на паралелните повърхнини в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$, в псевдо-хиперболичното пространство $\mathbb{H}^4_2(-1)$ и в неутралната псевдо-сфера $\mathbb{S}^4_2(1)$ е направена съответно в [23], [15] и [16]. Пълната класификация на паралелни Лоренцови повърхнини в произволно псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^m_s$ е получена в [17].

Друг основен клас повърхнини в Римановата и псевдо-Римановата геометрия са повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина, тъй като те играят важна роля както в диференциалната геометрия, така и в теорията на хармоничните изображения и физиката. Повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в Риманови пространства с постоянна кривина са класифицирани от Chen [8] и Yau [61] в началото на 80-те години на миналия век. Напоследък бяха класифицирани пространственоподобни повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в произволни пространствени форми [13], [14]. Пълна класификация на Лоренцови повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^m_s$ с произволна размерност m и произволен индекс s е направена в [18] и [31]. В [19] е представен обзор на класически и нови резултати, свързани с подмногообразия с паралелно векторно поле на средната кривина както в Риманови, така и в псевдо-Риманови многообразия.

Естествено разширение на класа повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина са повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Казваме, че една повърхнина в Риманово многообразие има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, ако векторното ѝ поле на средната кривина H е ненулево и единичното векторно поле по направлението на H е паралелно [9]. Условието за наличие на паралено нормирано векторно поле на средната кривина е по-слабо от това за наличие на паралелно векторно поле на средната кривина. Известно е, че всяка повърхнина в 3-мерното Евклидово пространство има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но в 4-мерното Евклидово пространство има много примери на повърхнини, които са с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но не и с паралелно векторно поле на средната кривина. В [9] е доказано, че всяка аналитична повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^m$ лежи или в 4-мерно Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, или върху хиперсфера в $\mathbb{E}^m$ като минимална повърхнина. Пространственоподобни подмногообразия с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в пространство на de Sitter са изследвани в [58].

Една от целите ни в настоящия труд е да характеризираме Лоренцови повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$ чрез система от три функции, които определят повърхнината с точност до движение. Подходът ни към изучаване на тези повърхнини се базира на въвеждане на канонични параметри върху всяка повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

По аналогия с локалната теория на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ и на теорията на пространственоподобните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$, разработваме локална теория на Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

В [32] и [35] Г. Ганчев и В. Милушева въвеждат геометрично изображение (от тип изображение на Вайнгартен) в допирателното пространство в произволна точка от повърхнина M^2, съответно в $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$, и намират инварианти k и $\varkappa$ на повърхнината, които са аналог на гаусовата и на средната кривина от теорията на повърхнините в 3-мерното Евклидово пространство. Изображението на Вайнгартен поражда втора основна форма на повърхнината, която позволява дефиниране на геометрични обекти върху повърхнината, като асимптотични тангенти, главни тангенти и др. На базата на главните тангенти върху повърхнината е намерен геометричен придружаващ репер на M^2, с помощта на който са получени 8 геометрични функции на повърхнината. В [33] и [35] е доказана фундаментална теорема (от тип теорема на Боне), която гласи, че тези 8 функции определят еднозначно повърхнината с точност до движение, съответно в $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$.

Целта на настоящия труд е, използвайки идеята от локалната теория на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ и в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$, да разработим локална теория на Лоренцовите повърхнини в четиримерното псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^4_2$ със сигнатура (2,2). Основната цел е да се намери пълна система от геометрични функции, които определят повърхнината с точност до движение в $\mathbb{E}^4_2$.

Част от настоящата дисертация е посветена на минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$. Минималните повърхнини са основен обект за изследване в диференциалната геометрия на повърхнините като изучаването им води началото си от Lagrange, който през 1762 г. разглежда вариационната задача за намиране на повърхнина с минимално лице, опъната по даден затворен контур [43].

През 1776 г. Meusnier открива, че хеликоидът и катеноидът удовлетворяват уравнението на Lagrange и че от гледна точка на диференциалната геометрия това уравнение е свързано с удвоената средна кривина на повърхнината. Така той дава геометрична интерпретация на минималните повърхнини, а именно повърхнини с нулева средна кривина [50].

Теорията на минималните повърхнини търпи бурно развитие през XIX век. Основните постижения от този период са описани в книги на Darboux [29] и Bianchi [4]. Weierstrass и Eneper разработват формули за представяне на минимални повърхнини, като тясно ги свързват с комплексния анализ и теорията на холоморфните функции. По-нови резултати за минималните повърхнини са детайлно описани в книгата на Nitsche [53]. Понастоящем, понятието минимална повърхнина е разширено до минимални подмногообразия, вложени в различни пространства, което свързва изучаването на минималните подмногообразия с математическата физика.

Основен проблем в теорията на минималните повърхнини е въвеждането на геометричен придружаващ репер и канонични параметри. Въвеждането на такива параметри позволява да се минимизира броят на функциите и броят на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение. За пространственоподобните повърхнини в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ този проблем е решен от L. Alías и B. Palmer в [1]. В [37] Г. Ганчев и В. Милушева са решили този проблем за времеподобните минимални повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$.

В дисертацията ние изучаваме минимални Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$ като целта ни е да ги опишем с две геометрични функции, удовлетворяващи система от две частни диференциални уравнения. Подходът ни включва въвеждане на каноничен придружаващ репер и канонични параметри за основния клас минимални повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

Глава 1. Инвариантна теория на Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$

1.1. Предварителни бележки

Нека $\mathbb{E}^m_s$ е m-мерно псевдо-Евклидово пространство с канонична псевдо-Евклидова метрика с индекс s. Ако $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е ортонормирана координатна система на $\mathbb{E}^m_s$, то в локални координати метриката се задава с

$$g_0 = \sum_{i=1}^{m-s} dx_i^2 - \sum_{j=m-s+1}^{m} dx_j^2.$$

Скаларното произведение, породено от метриката g_0, означаваме с $\langle \, , \rangle$.

Дефиниция 1.1.1. Вектор $v \in \mathbb{E}^m_s$ се нарича:

(1) *пространственоподобен*, ако $\langle v, v \rangle > 0$ или $v = 0$;

(2) *времеподобен*, ако $\langle v, v \rangle < 0$;

(3) *светлинноподобен (*изотропен*)*, ако $v \neq 0$ и $\langle v, v \rangle = 0$.

Пространството $\mathbb{E}^4_2$ се нарича 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика. Ние изучаваме двумерни повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

Дефиниция 1.1.2. Една повърхнина M^2_1 в $\mathbb{E}^4_2$ се нарича *Лоренцова*, ако индуцираната метрика g върху M^2_1 е Лоренцова.

Във всяка точка p на Лоренцова повърхнина M^2_1 имаме следното разлагане на допирателно и нормално пространство:

$$\mathbb{E}^4_2 = T_pM^2_1 \oplus N_pM^2_1,$$

такова че рестрикцията на метриката върху допирателното пространство $T_pM^2_1$ е със сигнатура $(1, 1)$ и рестрикцията на метриката върху нормалното пространство $N_pM^2_1$ също има сигнатура $(1, 1)$.

Означаваме с ∇ и ∇' свързаностите на Леви-Чивита съответно върху M^2_1 и $\mathbb{E}^4_2$. Нека x, y са допирателни векторни полета към M^2_1, а ξ е нормално векторно поле на M^2_1. В сила са следните формули на Гаус и Вайнгартен, които дават разлагането на векторните полета $\nabla'_x y$ и $\nabla'_x \xi$ на тангенциална и нормална компонента [8]:

$$\nabla'_x y = \nabla_x y + \sigma(x, y);$$

$$\nabla'_x \xi = -A_\xi x + D_x \xi.$$

Тези формули дефинират втори фундаментален тензор σ, нормална свързаност D и линеен оператор A_ξ, съответстващ на векторното поле ξ. За всяко нормално векторно поле ξ операторът A_ξ е самоспрегнат ендоморфизъм на допирателното пространство $T_pM_1^2$ в точка $p \in M_1^2$. Връзката между оператора A_ξ и втория фундаментален тензор σ се задава със следната формула:

$$\langle \sigma(x,y), \xi \rangle = \langle A_\xi x, y \rangle,$$

където x и y са допирателни векторни полета, а ξ е нормално векторно поле на M_1^2.

Вторият фундаментален тензор σ определя векторно поле на средната кривина H чрез следната формула:

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sigma.$$

Дефиниция 1.1.3. Една повърхнина M_1^2 се нарича *минимална*, ако във всяка нейна точка векторното поле на средната кривина е нула.

Дефиниция 1.1.4. Една повърхнина M_1^2 се нарича *квази-минимална* (или псевдо-минимална), ако във всяка нейна точка векторното поле на средната кривина е изотропно, т.е. $H \neq 0$ и $\langle H, H \rangle = 0$ [55].

Едно нормално векторно поле ξ се нарича *паралелно*, ако е паралелно по отношение на нормалната свързаност D, т.е. $D\xi = 0$ [20]. Казваме, че повърхнината M_1^2 има *паралелно векторно поле на средната кривина*, ако е изпълнено $DH = 0$.

Повърхнина, за която във всяка точка $H \neq 0$, $\langle H, H \rangle \neq 0$ и съществува единично векторно поле b по направление на H, което е паралелно, т.е. $Db = 0$, се нарича повърхнина с *паралелно нормирано векторно поле на средната кривина* [9]. Лесно се вижда, че ако M_1^2 е повърхнина с ненулево паралено векторно поле на средната кривина H (т.е. $DH = 0$), то тя има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Обратното твърдение е вярно само, ако $\|H\| = const$.

Едно подмногообразие на псевдо-Риманово многообразие се нарича *напълно геодезично*, ако вторият му фундаментален тензор σ е тъждествено равен на нула. Подмногообразие се нарича *напълно омбилично*, ако вторият му фундаментален тензор удовлетворява условието $\sigma(x,y) = \langle x, y \rangle H$ за произволни допирателни векторни полета x и y.

Тензорът на кривина $R^\perp$ на нормалната свързаност D се задава с:

$$R^\perp(x,y)n = D_x D_y n - D_y D_x n - D_{[x,y]} n,$$

където x, y са допирателни векторни полета, а n е нормално векторно поле.

Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$ се определят съответно с равенствата:

$$K = \frac{\langle\sigma(x,x),\sigma(y,y)\rangle - \langle\sigma(x,y),\sigma(x,y)\rangle}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}; \quad \varkappa = \frac{\langle R^{\perp}(x,y)n_1, n_2\rangle}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2},$$

където x и y са допирателни векторни полета, а n_1 и n_2 са нормални векторни полета.

1.2. Изображение на Вайнгартен за Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$

В този параграф развиваме теорията на Лоренцовите повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$ по подобие на теорията на повърхнините в $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$. Дефинираме втора основна форма II, която е инвариантна с точност до знак при смяна на базата на допирателното пространство и е инвариантна при смяна на базата на нормалното пространство на повърхнината. Въвеждаме линейно изображение γ от тип изображение на Вайнгартен, действащо в допирателната равнина в произволна точка от повърхнината. То поражда две инвариантни функции $k = \det\gamma$ и $\varkappa = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\gamma$. За функцията $\varkappa$ доказваме, че е кривината на нормалната свързаност.

С помощта на втората основна форма II, аналогично на класическата диференциална геометрия на повърхнини в $\mathbb{E}^3$, могат да се дефинират понятията спрегнати, асимптотични и главни допирателни, съответно асимптотични и главни линии.

Да отбележим, че в теорията на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, както и в теорията на пространственоподобните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$, във всяка точка от повърхнината съществуват главни допирателни, съответно и главни линии.

За Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$ се оказва, че съществуването на главни линии в точка от повърхнината зависи от знака на инвариантата $\varkappa^2 - k$. В случая, когато $\varkappa^2 - k > 0$, във всяка точка от повърхнината съществуват две главни допирателни. В този случай изображението γ може да бъде приведено в диагонален вид и можем да параметризираме повърхнината спрямо главните ѝ линии.

В настоящата Глава 1 от дисертацията изучаваме Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$, за които $\varkappa^2 - k > 0$ във всяка точка.

1.3. Лоренцови повърхнини без инфлексни точки

Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина без инфлексни точки, т.е. поне един от коефициентите на втората основна форма на повърхнината не е нула. Използвайки терминологията от класическата диференциална геометрия на повърхнини в $\mathbb{E}^3$, наричаме една точка $p \in M_1^2$ *омбилична*, ако коефициентите на първата и втората основни форми в точката p са пропорционални.

Минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}_2^4$ характеризираме със следното твърдение.

Твърдение 1.3.1. *Нека M_1^2 е Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}_2^4$ без инфлексни точки. Тогава, M_1^2 е минимална тогава и само тогава, когато M_1^2 се състои от омбилични точки.*

По-нататък в тази глава разглеждаме Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}_2^4$ без омбилични точки, за които е в сила неравенството $\varkappa^2 - k > 0$ във всяка точка. Такива повърхнини могат да бъдат параметризирани спрямо главните линии. В случаите, когато векторното поле на средната кривина е пространственоподобно или времеподобно във всяка точка на някаква подобласт, въвеждаме геометрично определен придружаващ репер във всяка точка на повърхнината. Записвайки деривационните формули от тип формули на Френе спрямо този геометричен репер, получаваме геометрични функции $\nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ на повърхнината, които се определят еднозначно от векторното поле на средната кривина и главните направления. Повърхнини, за които вектроното поле на средната кривина е или пространственоподобно или времеподобно във всяка точка, наричаме *Лоренцови повърхнини от общ тип*.

Фундаменталната теорема за съществуване и единственост на подмногообразия на псевдо-Евклидови многообразия е формулирана в общ вид на езика на тензорни полета и свързаности (вж. [20], Теорема 2.4 и Теорема 2.5). В [35] е формулирана и доказана фундаментална теорема на езика на геометрични функции за пространственоподобни повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски $\mathbb{E}_1^4$, за които векторът на средната кривина е ненулев пространственоподобен или времеподобен вектор във всяка точка. Фундаментална теорема за повърхнини в $\mathbb{E}_1^4$ с изотропно векторно поле на средната кривина е доказана на езика на геометрични функции в [36]. Тези теореми са специален случай на общата фундаментална теорема. Формулирани на езика на геометрични функции, теоремите са по-удобни за приложения.

Ние доказваме следната фундаментална теорема за съществуване и единственост на Лоренцови повърхнини от общ тип в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}_2^4$.

Теорема 1.3.3. *Нека* γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 *са гладки функции, дефинирани в област* $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, *които удовлетворяват условията:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_u}{2\mu\,\gamma_2 - \varepsilon\,\lambda\,\beta_1 + \varepsilon\,\nu_1\,\beta_2} > 0;\\
&\frac{\mu_v}{2\mu\,\gamma_1 + \varepsilon\,\nu_2\,\beta_1 - \varepsilon\,\lambda\,\beta_2} > 0;\\
&-\gamma_1\sqrt{E}\sqrt{-G} = (\sqrt{E})_v;\\
&-\gamma_2\sqrt{E}\sqrt{-G} = (\sqrt{-G})_u;\\
&2\lambda\,\gamma_2 - \varepsilon\,\mu\,\beta_1 - (\nu_1+\nu_2)\,\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\,\lambda_u - \frac{1}{\sqrt{-G}}\,(\nu_1)_v;\\
&2\lambda\,\gamma_1 - \varepsilon\,\mu\,\beta_2 - (\nu_1+\nu_2)\,\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{E}}\,(\nu_2)_u + \frac{1}{\sqrt{-G}}\,\lambda_v;\\
&\gamma_1\,\beta_1 - \gamma_2\,\beta_2 + (\nu_1+\nu_2)\,\mu = -\frac{1}{\sqrt{E}}\,(\beta_2)_u + \frac{1}{\sqrt{-G}}\,(\beta_1)_v;\\
&\varepsilon(\lambda^2 - \mu^2 - \nu_1\,\nu_2) = \frac{1}{\sqrt{E}}\,(\gamma_2)_u - \frac{1}{\sqrt{-G}}\,(\gamma_1)_v + (\gamma_1)^2 - (\gamma_2)^2,
\end{aligned} \tag{1}$$

където $\sqrt{E} = \dfrac{\mu_u}{2\mu\,\gamma_2 - \varepsilon\,\lambda\,\beta_1 + \varepsilon\,\nu_1\,\beta_2}$, $\sqrt{-G} = \dfrac{\mu_v}{2\mu\,\gamma_1 + \varepsilon\,\nu_2\,\beta_1 - \varepsilon\,\lambda\,\beta_2}$. *Нека* $\{x_0,\, y_0,\, b_0,\, l_0\}$ *е ортонормиран репер в точка* $p_0 \in \mathbb{E}^4_2$ *(като* $\langle b_0, b_0\rangle = \varepsilon$; $\langle l_0, l_0\rangle = -\varepsilon$; $\langle b_0, l_0\rangle = 0$*). Тогава, съществува подобласт* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ *и единствена Лоренцова повърхнина от общ тип* $M^2_1 : z = z(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$, *чийто вектор на средната кривина във всяка точка е пространственоподобен, ако* $\varepsilon = 1$, *или времеподобен, ако* $\varepsilon = -1$, *повърхнината* M^2_1 *минава през точката* p_0, *функциите* γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 *са геометричните функции на* M^2_1 *и* $\{x_0,\, y_0,\, b_0,\, l_0\}$ *е геометричният репер в точката* p_0.

Смисълът на Теорема 1.3.3 за съществуване и единственост е, че *всяка Лоренцова повърхнина от общ тип е определена с точност до движение в* $\mathbb{E}^4_2$ *от осем инвариантни функции* γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2, *удовлетворяващи системата от условия* (1).

1.4. Основни класове Лоренцови повърхнини, характеризирани чрез геометричните им функции

В този параграф характеризираме някои основни класове Лоренцови повърхнини от общ тип посредством условия върху геометричните им функции $\nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$. Гаусовата кривина K и инвариантните функции k и $\varkappa$, породени от втората основна форма, се изразяват по следния начин:

$$K = \varepsilon\,(\lambda^2 - \mu^2 - \nu_1\nu_2); \quad \varkappa = \mu(\nu_1 + \nu_2); \quad k = 4\mu^2\nu_1\nu_2.$$

Тъй като разглеждаме Лоренцови повърхнини, за които $\varkappa^2 - k > 0$, то $\mu \neq 0$ и $\nu_1 \neq \nu_2$. В сила са следните твърдения.

Твърдение 1.4.1. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 е плоска тогава и само тогава, когато $\lambda^2 - \mu^2 = \nu_1\nu_2$.*

Твърдение 1.4.2. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 има постоянна ненулева Гаусова кривина тогава и само тогава, когато $\lambda^2 - \mu^2 - \nu_1\nu_2 = c$, $c = const \neq 0$.*

Твърдение 1.4.3. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 е с плоска нормална свързаност тогава и само тогава, когато $\nu_1 + \nu_2 = 0$.*

Твърдение 1.4.4. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 има постоянна ненулева нормална кривина тогава и само тогава, когато $\mu(\nu_1 + \nu_2) = c$, $c = const \neq 0$.*

Векторното поле на средната кривина H се изразява чрез функциите ν_1 и ν_2 по следния начин:

$$H = \frac{\varepsilon(\nu_1 - \nu_2)}{2}\, b,$$

откъдето за дължината на H получаваме:

$$\|H\| = \varepsilon\sqrt{|\langle H, H\rangle|} = \varepsilon\frac{|\nu_1 - \nu_2|}{2}.$$

По-долу характеризираме някои основни класове Лоренцови повърхнини, удовлетворяващи условия върху векторното поле на средната кривина.

Твърдение 1.4.5. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 има постоянна ненулева средна кривина тогава и само тогава, когато $\nu_1 - \nu_2 = const \neq 0$.*

Твърдение 1.4.6. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. Векторното поле на средната кривина на M^2_1 е паралелно тогава и само тогава, когато $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ и $\nu_1 - \nu_2 = const$.*

Геометричният смисъл на инвариантната функция λ е свързан с понятието присъединен вектор на средната кривина, дефинирано от B.-Y.

Chen за подмногообразия на Риманови многообразия. Нека M е n-мерно подмногообразие на $(n+m)$-мерно Риманово многообразие $\widetilde{M}$ и ξ е нормално векторно поле на M. *Присъединено векторно поле* $a(\xi)$ на ξ се дефинира с формулата

$$a(\xi) = \frac{\|\xi\|}{n} \sum_{k=2}^{m} \{\mathrm{tr}(A_1 \circ A_k)\} \xi_k,$$

където $\{\xi_1 = \dfrac{\xi}{\|\xi\|}, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ е ортонормирана база на нормалното пространство на M, а $A_i = A_{\xi_i}$, $i = 1, \ldots, m$ е линейният оператор, съответстващ на ξ_i [8]. В частност, присъединеното векторно поле $a(H)$ на векторното поле на средната кривина H се нарича *присъединено векторно поле на средната кривина* на M в $\widetilde{M}$. *$\mathcal{A}$-подмногообразия* са онези подмногообразия, за които $a(H)$ е тъждествено равно на нула. $\mathcal{A}$-подмногообразията се наричат още *Chen-подмногообразия* [28]. Лесно се проверява, че минималните подмногообразия, псевдо-омбиличните подмногообразия и хиперповърхнините са Chen-подмногообразия. Прието е тези Chen-подмногообразия да се наричат тривиални $\mathcal{A}$-подмногообразия.

Понятието присъединено векторно поле на средната кривина е разширено от S. Haesen и M. Ortega за случая, когато нормалното пространство е двумерно Лоренцово пространство [42].

В следващото твърдение даваме характеризация на нетривиалните Chen-повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

Твърдение 1.4.7. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 е нетривиална Chen-повърхнина тогава и само тогава, когато $\lambda = 0$.*

1.5. Лоренцови повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф разглеждаме един специален клас повърхнини, а именно Лоренцовите повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Те се характеризират със следното твърдение.

Твърдение 1.5.1. *Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{E}^4_2$. M^2_1 има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато $\beta_1 = \beta_2 = 0$.*

За класа на Лоренцовите повърхнини, които имат паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но не и паралелно векторно поле на средната кривина, т.е. $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\|H\| \neq const$, въвеждаме понятието канонични параметри и доказваме, че всяка повърхнина от този клас допуска параметризация спрямо канонични параметри.

Въвеждането на канонични параметри върху Лоренцова повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина позволява броят на функциите и съответно на частните диференциални уравнения, които я определят, да бъде редуциран до три. Фундаменталната теорема за съществуване и единственост за този клас повърхнини гласи следното.

Теорема 1.5.5. *Нека $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$ и $\nu(u,v)$ са гладки функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned}
&\mu \neq 0, \quad \nu \neq const;\\
&\nu_u = -\lambda_v + \lambda(\ln|\mu|)_v;\\
&\nu_v = \lambda_u - \lambda(\ln|\mu|)_u;\\
&\varepsilon(\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2) = \frac{1}{2}|\mu|\Delta^h \ln|\mu|.
\end{aligned}$$

Нека $\{x_0, y_0, b_0, l_0\}$ е ортонормиран репер в точката $p_0 \in \mathbb{E}^4_2$ (като $\langle b_0, b_0\rangle = \varepsilon$; $\langle l_0, l_0\rangle = -\varepsilon$; $\langle b_0, l_0\rangle = 0$). Тогава съществува подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и единствена Лоренцова повърхнина $M^2_1 : z = z(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}_0$ от общ тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, такава че M^2_1 минава през p_0, функциите $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$, $\nu(u,v)$ са геометричните функции на M^2_1 и $\{x_0, y_0, b_0, l_0\}$ е геометричният репер на M^2_1 в точката p_0. При това, (u,v) са канонични параметри за M^2_1.

Теорема 1.5.5 показва, че всяка Лоренцова повърхнина от общ тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина е определена с точност до движение в $\mathbb{E}^4_2$ от три геометрични функции, удовлетворяващи система от три частни диференциални уравнения.

Глава 2. Класове ротационни повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$

2.1. Ротационни повърхнини с двумерна ос в $\mathbb{E}^4_2$

Основен източник на примери в Евклидови и псевдо-Евклидови пространства са ротационните повърхнини. В четриримерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ съществуват три типа ротационни повърхнини с двумерна ос – елиптични, хиперболични и параболични. Те са инвариантни съответно спрямо елиптична ротация, хиперболична ротация и параболична ротация. Квази-минималните ротационни повърхнини от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип в $\mathbb{E}^4_1$ са класифицирани от S. Haesen и M. Ortega съответно в [40], [41] и [42].

Лоренцови ротационни повърхнини с двумерна ос от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ са разглеждани от Г. Ганчев и В. Милушева в [38]. Там е дадена класификация на квази-минималните ротационни повърхнини от трите типа.

В този параграф описваме конструкцията на Лоренцови ротационни повърхнини с двумерна ос от трите типа в $\mathbb{E}^4_2$ и изследваме онези от тях, които имат постоянна средна кривина. Този клас повърхнини не допуска параметризация спрямо главни линии, тъй като за тях $\varkappa^2 - k < 0$.

2.1.1. Ротационни повърхнини от елиптичен тип

Нека $c : \widetilde{z} = \widetilde{z}(u),\ u \in J$ е гладка пространственоподобна крива, която лежи в $\mathbb{E}^3_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ и е зададена чрез $c : \widetilde{z}(u) = (x_1(u), x_2(u), r(u), 0);\ u \in J$, където u е естествен параметър. Повърхнината $\mathcal{M}'$ в $\mathbb{E}^4_2$, дефинирана чрез

$$\mathcal{M}' : z(u,v) = (x_1(u), x_2(u), r(u)\cos v, r(u)\sin v)\,; \quad u \in J,\ v \in [0; 2\pi)$$

е Лоренцова повърхнина, получена при завъртането на пространственоподобната крива c около двумерната Евклидова равнина Oe_1e_2. Наричаме я *ротационна повърхнина от елиптичен тип*.

2.1.2. Ротационни повърхнини от хиперболичен тип

Нека $c : \widetilde{z} = \widetilde{z}(u),\ u \in J$ е гладка пространственоподобна крива, която лежи в $\mathbb{E}^3_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_4\}$ и е зададена с векторната функция $\widetilde{z}(u) = (r(u), x_2(u), 0, x_4(u));\ u \in J$ спрямо естествен параметър. Нека $\mathcal{M}''$ е повърхнината в $\mathbb{E}^4_2$, дефинирана чрез

$$\mathcal{M}'' : z(u,v) = (r(u)\cosh v, x_2(u), r(u)\sinh v, x_4(u))\,; \quad u \in J,\ v \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{M}''$ е Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$, получена чрез хиперболична ротация на пространственоподобната крива c около двумерната Лоренцова равнина Oe_2e_4. Нарича се *ротационна повърхнина от хиперболичен тип*.

2.1.3. Ротационни повърхнини от параболичен тип

При разглеждането на ротационните повърхнини от параболичен тип за удобство използваме псевдо-ортонормиран репер $\{e_1, e_4, \xi_1, \xi_2\}$ на $\mathbb{E}^4_2$, такъв че

$$\xi_1 = \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_2 = \frac{-e_2 + e_3}{\sqrt{2}}.$$

Векторите ξ_1 и ξ_2 удовлетворяват условията $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = 0; \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = 0;$ $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = -1$.

Нека c е пространственоподобна крива, която лежи в $\mathbb{E}^3_1 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ и е зададена чрез

$$\widetilde{z}(u) = x_1(u)\, e_1 + x_2(u)\, e_2 + x_3(u)\, e_3;\ u \in J.$$

Означаваме $f(u) = \dfrac{x_2(u) + x_3(u)}{\sqrt{2}}$, $g(u) = \dfrac{-x_2(u) + x_3(u)}{\sqrt{2}}$. Тогава

$$\widetilde{z}(u) = x_1(u)\, e_1 + f(u)\, \xi_1 + g(u)\, \xi_2.$$

Считаме, че кривата c е зададена спрямо естествения си параметър.

Ротационна повърхнина от параболичен тип се дефинира по следния начин:

$$\mathcal{M}''' : z(u,v) = x_1(u)e_1 + f(u)\xi_1 + (-v^2 f(u) + g(u))\xi_2 + \sqrt{2} v f(u) e_4; \\ u \in J,\ v \in \mathbb{R}.$$

В случая ротационната ос е равнината, определена от векторните полета e_1 (което е пространственоподобно) и ξ_1 (което е изотропно).

2.1.4. Ротационни повърхнини с постоянна средна кривина

Повърхнините с постоянна средна кривина в произволно псевдо-Евклидово пространство са важен обект за изучаване поради специалната роля, която играят в Общата теория на относителността. Тяхното изучаване включва не само геометрични методи, а и такива от частните диференциални уравнения и комплексния анализ, поради което те представляват интерес както за математици, така и за физици, и инженери. В последните години интензивно се изследват повърхнини с постоянна средна кривина в псевдо-Евклидови пространства, напр. [5], [7], [47], [49], [57].

Следващата теорема дава локално описание на всички ротационни повърхнини от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ с постоянна средна кривина.

Теорема 2.1.1. *Нека е дадена гладка положителна функция $r(u) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Дефинираме функциите*

$$\varphi(u) = \eta \int \frac{\sqrt{(rr'' + (r')^2 + 1)^2 \pm 4C^2 r^2 (1 + (r')^2)}}{r(1 + (r')^2)}\, du, \\ \eta = \pm 1,\ C = const \neq 0$$

$$x_1(u) = \int \sqrt{1+(r')^2}\,\cos\varphi(u)\,du,$$
$$x_2(u) = \int \sqrt{1+(r')^2}\,\sin\varphi(u)\,du.$$

Тогава пространственоподобната крива $c : \widetilde{z}(u) = (x_1(u), x_2(u), r(u), 0)$ *е меридианна крива на ротационна повърхнина от елиптичен тип с постоянна средна кривина. Обратно, всяка ротационна повърхнина от елиптичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *с постоянна средна кривина локално се конструира по описания начин.*

Локалната класификация на ротационните повърхнини от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ с постоянна средна кривина е дадена в следващата теорема.

Теорема 2.1.2. (A) *Нека е дадена гладка положителна функция* $r(u) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, такава че* $(r')^2 > 1$*. Дефинираме функциите*

$$\varphi(u) = \eta \int \frac{\sqrt{(rr'' + (r')^2 - 1)^2 \pm 4C^2 r^2((r')^2 - 1)}}{r((r')^2 - 1)}\,du,$$
$$\eta = \pm 1,\ C = const \neq 0$$

и

$$x_2(u) = \int \sqrt{(r')^2 - 1}\,\sinh\varphi(u)\,du,$$
$$x_4(u) = \int \sqrt{(r')^2 - 1}\,\cosh\varphi(u)\,du.$$

Тогава пространственоподобната крива $c : \widetilde{z}(u) = (r(u), x_2(u), 0, x_4(u))$ *поражда ротационна повърхнина от хиперболичен тип с постоянна средна кривина.*

(B) *Нека е дадена гладка положителна функция* $r(u) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, такава че* $(r')^2 < 1$*. Дефинираме функциите*

$$\varphi(u) = \eta \int \frac{\sqrt{(rr'' + (r')^2 - 1)^2 \pm 4C^2 r^2((r')^2 - 1)}}{r((r')^2 - 1)}\,du,$$
$$\eta = \pm 1,\ C = const \neq 0$$

и

$$x_2(u) = \int \sqrt{1 - (r')^2}\,\cosh\varphi(u)\,du,$$
$$x_4(u) = \int \sqrt{1 - (r')^2}\,\sinh\varphi(u)\,du.$$

Тогава пространственоподобната крива $c : \widetilde{z}(u) = (r(u), x_2(u), 0, x_4(u))$ *поражда ротационна повърхнина от хиперболичен тип с постоянна средна кривина. Обратно, всяка ротационна повърхнина от хиперболичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *с постоянна средна кривина локално се конструира посредством един от двата начина, описани по-горе.*

Със следващата теорема даваме локално описание на ротационните повърхнини от параболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ с постоянна средна кривина.

Теорема 2.1.3. *Нека е дадена гладка функция $f(u) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Дефинираме функциите*

$$\varphi(u) = f' \left(A \pm \int \frac{1}{f'} \sqrt{\left((\ln |f f'|)'\right)^2 \pm 4C^2}\, du \right), \; C = const \neq 0, \; A = const$$

и

$$x_1(u) = \int \varphi(u) du; \qquad g(u) = \int \frac{\varphi^2(u) - 1}{2f'(u)}\, du.$$

Тогава $c : \widetilde{z}(u) = x_1(u)\, e_1 + f(u)\, \xi_1 + g(u)\, \xi_2$ е пространственоподобна крива, която поражда ротационна повърхнина от параболичен тип с постоянна средна кривина. Обратно, всяка ротационна повърхнина от параболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ с постоянна средна кривина локално се конструира по описания начин.

2.2. Обобщени ротационни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$

Освен ротационните повърхнини с двумерна ос, в n-мерно Евклидово или псевдо-Евклидово пространство могат да се разглеждат и така наречените обобщени ротационни повърхнини. Обобщените ротационни повърхнини в четиримерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ са въведени от C. Moore [51]. В [52] той описва обобщени ротационни повърхнини с постоянна Гаусова кривина. Дефиниция от типа на C. Moore на обобщени ротационни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ е дадена от Г. Ганчев и В. Милушева [39].

Аналогично на $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$, ние дефинираме обобщени ротационни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$. За този клас повърхнини прилагаме описаната в Глава 1 теория на Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$, като намираме основните им инварианти. Изучаваме някои основни класове обобщени ротационни повърхнини, а именно повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, повърхнини, за които $k = 0$, минимални повърхнини и плоски повърхнини.

2.2.1. Обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип

В настоящия параграф разглеждаме Лоренцови обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип с меридианна крива, лежаща в двумерна равнина. Такава повърхнина има следната параметризация:

$$\mathcal{M}_1 : z(u, v) = \left(f(u) \cos \alpha v, f(u) \sin \alpha v, g(u) \cos \beta v, g(u) \sin \beta v\right),$$

където $u \in J \subset \mathbb{R},\ v \in [0; 2\pi),\ f(u)$ и $g(u)$ са гладки функции, удовлетворяващи условията $\alpha^2 f^2(u) - \beta^2 g^2(u) < 0,\ f'^{\,2}(u) - g'^{\,2}(u) > 0$, а α и β са положителни константи. Функциите $f = f(u),\ g = g(u)$ задават меридинната крива m.

Инвариантните функции k и $\varkappa$, Гаусовата кривина K и векторното поле на средната кривина H на повърхнината $\mathcal{M}_1$ имат вида:

$$k = \frac{-4\alpha^2\beta^2(\beta^2 f'g - \alpha^2 fg')(f'g'' - f''g')(fg' - f'g)^2}{(f'^{\,2} - g'^{\,2})^3(\beta^2 g^2(u) - \alpha^2 f^2(u))^3};$$

$$\varkappa = \frac{-\alpha\beta(gf' - fg')((\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(g'f'' - f'g'') + (f'^2 - g'^2)(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'))}{(f'^{\,2} - g'^{\,2})^2(\beta^2 g^2(u) - \alpha^2 f^2(u))^2};$$

$$K = \frac{\alpha^2\beta^2(fg' - f'g)^2(f'^2 - g'^2) - (\beta^2 f'g - \alpha^2 fg')(f'g'' - f''g')(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)}{(f'^{\,2} - g'^{\,2})^2(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)^2};$$

$$H = \frac{(f'^2 - g'^2)(\beta^2 gf' - \alpha^2 fg') - (\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)(f''g' - f'g'')}{2\,(f'^2 - g'^2)^{\frac{3}{2}}\,(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)}\ n_2,$$

където n_2 е времеподобно нормално векторно поле.

Геометричните функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 на обобщената ротационна повърхнина $\mathcal{M}_1$ от елиптичен тип се изразяват по следния начин:

$$\gamma_1 = 0; \qquad \gamma_2 = \frac{\alpha^2 ff' - \beta^2 gg'}{\sqrt{f'^{\,2} - g'^{\,2}}(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)};$$

$$\nu_1 = \frac{g'f'' - f'g''}{\left(\sqrt{f'^{\,2} - g'^{\,2}}\right)^3}; \qquad \nu_2 = \frac{\beta^2 gf' - \alpha^2 fg'}{\sqrt{f'^{\,2} - g'^{\,2}}(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)};$$

$$\lambda = 0; \qquad \mu = \frac{\alpha\beta(fg' - gf')}{\sqrt{(f'^{\,2} - g'^{\,2})(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)}};$$

$$\beta_1 = 0; \qquad \beta_2 = \frac{\alpha\beta(ff' - gg')}{\sqrt{f'^{\,2} - g'^{\,2}}(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)}.$$

Доказваме следните твърдения.

Твърдение 2.2.1. *Не съществуват квази-минимални обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$.

Твърдение 2.2.2. *Всяка обобщена ротационна повърхнина от елиптичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *е Chen-повърхнина.*

Използвайки получените изрази за геометричните функции, описваме някои специални класове обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип.

Обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

Както показахме в § 1.5, Лоренцовите повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се характеризират с условието $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Използвайки този резултат, даваме описание на обобщените ротационни повърхнини от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

Теорема 2.2.3. *Една обобщена ротационна повърхнина $\mathcal{M}_1$ от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато функциите $f(u)$ и $g(u)$, определящи меридианната крива m, имат следния вид:*

$$f(u) = \pm\sqrt{u^2 - C^2}; \quad g(u) = u, \quad C = const \neq 0.$$

За ротационна повърхнина от елиптичен тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина получаваме:

$$H = \pm \frac{1}{|C|}\, n_2,$$

което показва, че за този тип повърхнини $\|H\| = const$. Така стигаме до следния резултат.

Следствие 2.2.4. *Ако една обобщена ротационна повърхнина от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, то тя има паралелно векторно поле на средната кривина.*

Обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип, за които $k = 0$

В следващата теорема даваме класификация на обобщените ротационни повърхнини от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$, за които $k = 0$.

Теорема 2.2.5. *Една обобщена ротационна повърхнина $\mathcal{M}_1$ от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ е с инварианта $k = 0$ тогава и само тогава, когато функциите $f(u)$ и $g(u)$, определящи меридианната крива, се задават по един от следните три начина:*

(1) $f(u) = cu$, $g(u) = u$, $c = const \neq 0$; в този случай $\mathcal{M}_1$ е развиваема праволинейна повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$;

(2) $f(u) = c_1 u + c_2$, $g(u) = u$, $c_1 = const \neq 0, c_2 = const$; *в този случай* $\mathcal{M}_1$ *е неразвиваема праволинейна повърхнина в* $\mathbb{E}^4_2$;

(3) $f(u) = c\, u^{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$; $g(u) = u$, $c = const \neq 0$.

Минимални обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип

Минималните обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ са описани в следващата теорема.

Теорема 2.2.6. *Една обобщена ротационна повърхнина* $\mathcal{M}_1$ *от елиптичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *е минимална тогава и само тогава, когато функциите, определящи меридианната крива* m*, се задават по един от следните три начина:*

(1) $f = C g^{\pm \frac{\alpha}{\beta}}$, *където* $C = const \neq 0$, $\alpha \neq \beta$;

(2) $\arcsin\left(\dfrac{\alpha f}{\sqrt{d}}\right) = \pm \dfrac{\alpha}{\beta} \arcsin\left(\dfrac{\beta g}{\sqrt{d}}\right) + C$, *където* $C = const$, $d = const$, $d > 0$, $\alpha \neq \beta$;

(3) $(f+g)^2 = A\,(f-g)^2 + B$, *където* $A = const \neq 0$, $B = const$, $\alpha = \beta$.

Плоски обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип

Обобщените ротационни повърхнини от елиптичен тип с нулева Гаусова кривина са класифицирани в следващата теорема.

Теорема 2.2.7. *Една обобщена ротационна повърхнина* $\mathcal{M}_1$ *от елиптичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *е плоска тогава и само тогава, когато функциите, определящи меридианната крива* m*, се задават по един от следните два начина:*

(1) $\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2 = a^2 (u+c)^2$, *където* $a = const \neq 0$, $c = const$;

(2) $\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2 = C$, *където* $C = const$, $C < 0$.

Обобщени ротационни повърхнини от елиптичен тип с плоска нормална свързаност

Обобщените ротационни повърхнини от елиптичен тип с плоска нормалнна свързаност, за които векторното поле на средната кривина не е паралелно, се описват с теоремата, дадена по-долу.

Теорема 2.2.8. *Една обобщена ротационна повърхнина $\mathcal{M}_1$ от елиптичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ има плоска нормална свързаност и непаралелно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато функциите, определящи меридианната крива m, се задават по един от следните два начина:*

(1) $f = c\,g$, където $c = const$, $1 < c^2 < \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ и $\alpha < \beta$; в този случай, $\mathcal{M}_1$ е развиваема праволинейна повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$;

(2) $\dfrac{ff' - gg'}{\sqrt{f'^2 - g'^2}\sqrt{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}} = C$, където $C = const \neq 0$.

2.2.2. Обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип

Лоренцова обобщена ротационна повърхнина от хиперболичен тип, чиято меридианна крива лежи в двумерна равнина, се задава със следната параметризация:

$$\mathcal{M}_2 : z(u,v) = \left(f(u)\cosh\alpha v, g(u)\cosh\beta v, f(u)\sinh\alpha v, g(u)\sinh\beta v\right),$$

където $u \in J \subset \mathbb{R}$, $v \in [0; 2\pi)$, $f(u)$ и $g(u)$ са гладки функции, удовлетворяващи условията $\alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u) > 0$, $f'^{\,2}(u) + g'^{\,2}(u) > 0$, а α и β са положителни константи.

Инвариантните функции k и $\varkappa$ на $\mathcal{M}_2$ имат вида:

$$k = \frac{4\alpha^2\beta^2(\beta^2 f'g - \alpha^2 fg')(f''g' - f'g'')(fg' - f'g)^2}{(f'^2 + g'^2)^3(\alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u))^3};$$

$$\varkappa = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)\left((\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(f'g' - fg') + (f'^{\,2} + g'^2)(\beta^2 gf' - \alpha^2 fg')\right)}{(f'^2 + g'^2)^2(\alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u))^2}.$$

Гаусовата кривина K и векторното поле на средната кривина H се изразяват по следния начин:

$$K = \frac{\alpha^2\beta^2(fg' - f'g)^2(f'^2 + g'^2) + (\alpha^2 fg' - \beta^2 f'g)(f''g' - f'g'')(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)}{(f'^{\,2} + g'^{\,2})^2(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^2};$$

$$H = \frac{(f'^2 + g'^2)(\beta^2 f'g - \alpha^2 fg') + (\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(f''g' - f'g'')}{2\,(f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}\,(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)}\, n_1,$$

където n_1 е пространственоподобно нормално векторно поле.

В сила са следните твърдения.

Твърдение 2.2.9. *Не съществуват квази-минимални обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$.

Твърдение 2.2.10. *Всяка обобщена ротационна повърхнина от хиперболичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *е Chen-повърхнина.*

Обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В следващата теорема даваме описание на обобщените ротационни повърхнини от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

Теорема 2.2.11. *Една обобщена ротационна повърхнина от хиперболичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато функциите* $f(u)$ *и* $g(u)$*, определящи меридианната крива* m*, имат следния вид:*

$$f(u) = \pm\sqrt{C^2 - u^2}; \quad g(u) = u, \quad C = const \neq 0.$$

Векторното поле на средната кривина на обобщена ротационна повърхнина от хиперболичен тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина има вида: $H = \mp\dfrac{1}{|C|}\,n_1$, което показва, че $\|H\| = const$. Следователно повърхнината има паралелно векторно поле на средната кривина.

Обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип, за които $k = 0$

За обобщените ротационни повърхнини от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$, за които $k = 0$, е в сила следната теорема.

Теорема 2.2.13. *Една обобщена ротационна повърхнина* $\mathcal{M}_2$ *от хиперболичен тип в* $\mathbb{E}^4_2$ *е с инварианта* $k = 0$ *тогава и само тогава, когато функциите* $f(u)$ *и* $g(u)$*, определящи меридианната крива, се задават по един от следните три начина:*

(1) $f(u) = cu$, $g(u) = u$, $c = const \neq 0$; *в този случай* $\mathcal{M}_2$ *е развиваема праволинейна повърхнина в* $\mathbb{E}^4_2$;

(2) $f(u) = c_1 u + c_2$, $g(u) = u$, $c_1 = const \neq 0, c_2 = const$; *в този случай* $\mathcal{M}_2$ *е неразвиваема праволинейна повърхнина в* $\mathbb{E}^4_2$;

(3) $f(u) = c\, u^{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$; $g(u) = u$, $c = const \neq 0$.

Минимални обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип

Минималните обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ се описват със следната теорема.

Теорема 2.2.14. *Една обобщена ротационна повърхнина $\mathcal{M}_2$ от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ е минимална тогава и само тогава, когато функциите, определящи меридианната крива m, се задават по един от следните три начина:*

(1) $f = Cg^{\mp\frac{\alpha}{\beta}}$, *където* $C = const \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

(2) $\alpha f + \sqrt{\alpha^2 f^2 - d} = C\left(\beta g + \sqrt{\beta^2 g^2 + d}\right)^{\pm\frac{\alpha}{\beta}}$, *където* $C = const \neq 0$, $d = const \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

(3) $\arctan\left(\dfrac{f'}{g'}\right) = -\arctan\left(\dfrac{f}{g}\right) + c$, *където* $c = const$, $\alpha = \beta$.

Плоски обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип

В следващата теорема описваме всички обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$, за които $K = 0$.

Теорема 2.2.15. *Една обобщена ротационна повърхнина $\mathcal{M}_2$ от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ е плоска тогава и само тогава, когато функциите, определящи меридианната крива m, се задават по един от следните два начина:*

(1) $\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 = a^2(u + c)^2$, където $a = const \neq 0$, $c = const$;

(2) $\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 = C$, където $C = const$.

Обобщени ротационни повърхнини от хиперболичен тип с плоска нормална свързаност

Следващата теорема дава класификация на обобщените ротационни повърхнини от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$, които са с плоска нормална свързаност, но векторното поле на средната кривина не е паралелно.

Теорема 2.2.16. *Една обобщена ротационна повърхнина $\mathcal{M}_2$ от хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$ има плоска нормална свързаност и непаралелно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато фун-*

кциите, определящи меридианната крива m, се задават по един от следните два начина:

(1) $f = c\,g$, където $c = const$, $c \neq 0$ и $\alpha \neq \beta$; *в този случай* $\mathcal{M}_2$ *е развиваема праволинейна повърхнина в* $\mathbb{E}^4_2$;

(2) $\dfrac{ff' + gg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} = C$, *където* $C = const \neq 0$.

Глава 3. Минимални Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$

Една от фундаменталните задачи в диференциалната геометрия на повърхнините, както в Евклидово, така и в псевдо-Евклидови пространства, е изследването на минимални повърхнини. Трета глава на настоящата дисертация е посветена на минимални Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$ на минимална повърхнина в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$ удовлетворяват условието $K^2 - \varkappa^2 \geq 0$, което разделя минималните повърхнини на два основни класа:

- повърхнини, за които $K^2 - \varkappa^2 = 0$, наречени супер-конформни [3];
- повърхнини, за които $K^2 - \varkappa^2 > 0$, наречени минимални повърхнини от общ тип.

Минималните супер-конформни повърхнини се характеризират с това, че във всяка точка от повърхнината елипсата на нормалната кривина е окръжност [3]. Според резултат на Eisenhart [30], класът на минималните супер-конформни повърхнини в $\mathbb{E}^4$ е локално еквивалентен на класа от холоморфните криви в $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{E}^4$.

В [59], Tribuzy и Guadalupe доказват, че минималните повърхнини от общ тип са определени с точност до движение от две функции, удовлетворяващи система от две частни диференциални уравнения.

Аналогични разултати са постигнати за минимални повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$. В [1], Alías и Palmer описват минималните пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$. Локална теория на минималните времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ е разработена от Г. Ганчев и В. Милушева в [37]. В пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ не възниква клас супер-конформни минимални повърхнини.

Минималните Лоренцови повърхнини в 4-мерното псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^4_2$ се разделят на три основни класа:

- повърхнини, за които $K^2 - \varkappa^2 > 0$ във всяка точка от дефиниционната област;
- повърхнини, за които $K^2 - \varkappa^2 = 0$ във всяка точка от областта;
- повърхнини, за които $K^2 - \varkappa^2 < 0$ във всяка точка от областта.

Минимална Лоренцова повърхнина, за която във всяка точка е изпълнено условието $K^2 - \varkappa^2 = 0$, е аналог на минимална супер-конформна повърхнина в четиримерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$. Вместо понятието "елипса на нормалната кривина", което е дефинирано за повърхнини в $\mathbb{E}^4$, в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$ се използва понятието "хипербола на нормалната кривина", асоциирана с втората основна форма на Лоренцова повърхнина (вж. [2]). Използвайки терминологията от Евклидовото пространство, една минимална Лоренцова повърхнина наричаме *супер-конформна*, ако във всяка нейна точка Гаусовата кривина и кривината на нормалната свързаност удовлетворяват равенството $K^2 - \varkappa^2 = 0$.

В настоящата глава разглеждаме минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$ с двумерно първо нормално пространство, които удовлетворяват условието $K^2 - \varkappa^2 > 0$ във всяка точка от областта. Наричаме ги *минимални повърхнини от общ тип* и разработваме локална теория за този тип повърхнини по аналогия с теорията на минималните повърхнини в $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$.

3.1. Минимални Лоренцови повърхнини с едномерно първо нормално пространство

Нека M^2_1 е Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$. Съгласно резултат на Larsen [45], локално съществуват *изотермични параметри* (u, v), такива че метричният тензор g на M^2_1 се представя във вида $g = f^2(u, v)(du \otimes du - dv \otimes dv)$, където $f(u, v)$ е функция, за която $f(u, v) > 0$ за всеки (u, v) от дефиниционната област.

Първо нормално пространство на повърхнината M^2_1 в точка $p \in M^2_1$ наричаме подпространството на $N_p M^2_1$, зададено чрез $Im\, \sigma_p = \mathrm{span}\{\sigma(X, Y) : X, Y \in T_p M^2_1\}$.

В настоящия параграф разглеждаме минимални Лоренцови повърхнини, за които $Im\, \sigma_p$ е едномерно във всяка точка от повърхнината.

Точка p от повърхнина се нарича *изродена*, ако в тази точка $K = \varkappa = 0$. Една минимална Лоренцова повърхнина се състои от изродени точки, когато или принадлежи на изродена хиперравнина, или е плоска омбилична или квази-омбилична повърхнина [2].

В следващата теорема даваме описание на минималните Лоренцови повърхнини с едномерно първо нормално пространство.

Теорема 3.1.1. *Нека M^2_1 е минимална Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$ с едномерно първо нормално пространство. Тогава локално е в сила едно от следните:*

(i) M^2_1 се състои от изродени точки;

(ii) M^2_1 е неплоска повърхнина, лежаща в неизродена хиперравнина на $\mathbb{E}^4_2$.

3.2. Минимални Лоренцови повърхнини от общ тип

Нека M^2_1 е минимална повърхнина от общ тип, параметризирана спрямо изотермични параметри по следния начин: $M^2_1 : z = z(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$). Доказваме, че във всяка точка от някаква подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ можем да въведем специален геометрично определен ортонормиран репер $\{x, y, n_1, n_2\}$, такъв че:

$$\begin{aligned}
\sigma(x, x) &= \nu\, n_1; \\
\sigma(x, y) &= \qquad \mu\, n_2; \\
\sigma(y, y) &= \nu\, n_1,
\end{aligned}$$

където $\nu\mu \neq 0$ и $\langle x, x\rangle = 1$, $\langle y, y\rangle = -1$, $\langle n_1, n_1\rangle = \varepsilon$, $\langle n_2, n_2\rangle = -\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$). Този репер наричаме *геометричен репер* на повърхнината, а допирателните направления, определени от векторните полета x и y, наричаме *канонични направления* на повърхнината. Каноничните направления са еднозначно определени. Векторните полета n_1 и n_2 от нормалното пространство също са еднозначно определени от каноничните направления. Функциите μ и ν наричаме *геометрични функции* на повърхнината.

Чрез геометричните функции μ и ν изразяваме Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$:

$$K = -\varepsilon\,(\mu^2 + \nu^2); \quad \varkappa = -2\,\mu\,\nu.$$

Тъй като $\nu\mu \neq 0$, можем да формулираме следното твърдение.

Твърдение 3.2.1. *Нека M^2_1 е минимална Лоренцова повърхнина от общ тип. Тогава във всяка точка от повърхнината Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$ са различни от нула.*

Дефинираме понятието *канонични параметри* и доказваме, че всяка минимална Лоренцова повърхнина от общ тип локално допуска канонични параметри.

Въвеждането на канонични параметри ни позволява да докажем следната фундаментална теорема за съществуване и единственост за класа на минималните Лоренцови повърхнини от общ тип.

Теорема 3.2.2. *Нека $\mu(u,v)$ и $\nu(u,v)$ са гладки функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, и удовлетворяващи условията:*

$$\begin{aligned} &\mu\,\nu \neq 0; \qquad \mu^2 - \nu^2 \neq 0;\\ &\sqrt{|\mu^2-\nu^2|}\,\Delta^h \ln\left|\mu^2-\nu^2\right| = -4\varepsilon(\mu^2+\nu^2);\\ &\sqrt{|\mu^2-\nu^2|}\,\Delta^h \ln\left|\frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}\right| = -4\,\varepsilon\mu\,\nu, \end{aligned} \tag{2}$$

където $\varepsilon = \pm 1$. Нека $\{x_0,\, y_0,\, (n_1)_0,\, (n_2)_0\}$ е ортонормиран репер в точка $p_0 \in \mathbb{E}^4_2$, такъв че $\langle x_0, x_0\rangle = 1$, $\langle y_0, y_0\rangle = -1$, $\langle (n_1)_0, (n_1)_0\rangle = \varepsilon$, $\langle (n_2)_0, (n_2)_0\rangle = -\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогава съществува подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и единствена минимана Лоренцова повърхнина от общ тип $M^2_1 : z = z(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}_0$, такава че M^2_1 минава през точката p_0, функциите $\mu(u,v)$, $\nu(u,v)$ са геометричните функции на M^2_1 и $\{x_0,\, y_0,\, (n_1)_0,\, (n_2)_0\}$ е геометричният репер на M^2_1 в точката p_0. При това (u,v) са канонични параметри на повърхнината.

Идеята на Теорема 3.2.2 за съществуване и единственост е, че *всяка минимална Лоренцова повърхнина от общ тип е определена с точност до движение в $\mathbb{E}^4_2$ от две геометрични функции μ и ν, удовлетворяващи системата от две частни диференциални уравнения.*

В § 3.3 използваме алгоритъма, който ни дава доказателството на теоремата за съществуване и единственост, за да конструираме пример на минимална Лоренцова повърхнина от общ тип по конкретно зададена двойка $(\mu,\, \nu)$, която е решение на системата от частни диференциални уравнения (2).

Благодарности

Изказвам сърдечна благодарност и дълбока признателност на научния си консултант **доц. д-р Величка Милушева** за ценните напътствия и съвети, всестранната помощ и безрезервната подкрепа при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Сърдечно благодаря и на моето семейство за търпението, проявеното разбиране и безотказната подкрепа по време на работата ми върху дисертацията.

Благодаря и на колегите от катедра ”Геометрия” на ФМИ за подкрепата и съдействието през всички години на взаимно сътрудничество.

Авторска справка за приносите в дисертационния труд

По мнение на автора, основните приноси в дисертационния труд са:

1. Върху Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$ са дефинирани втора основна форма и изображение от тип изображение на Вайнгартен, което поражда инвариантни функции k и $\varkappa$. За всяка Лоренцова повърхнина от общ тип $(\varkappa^2 - k > 0)$, за която векторното поле на средната кривина е пространственоподобно или времеподобно във всяка точка от областта, е въведен геометричен репер. Деривационните формули спрямо този репер определят осем геометрични функции, които удовлетворяват система от условия за интегруемост. С помощта на осемте геометрични функции и условията за интегруемост е формулирана и доказана локална теорема за съществуване и единственост на Лоренцова повърхнина от общ тип.

2. За класа на Лоренцовите повърхнини от общ тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина са въведени канонични параметри, които позволяват да бъде редуциран броят на функциите, определящи повърхнината и условията, които те удовлетворяват, до три. Фундаменталната теорема за съществуване и единственост на Лоренцова повърхнина от общ тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина гласи, че всяка такава повърхнина се определя с точност до движение от три геометрични функции, удовлетворяващи система от три частни диференциални уравнения.

3. Въведени са обобщени ротационни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$. Характеризирани са някои подкласове на тези повърхнини, а именно: минимални обобщени ротационни повърхнини, плоски обобщени ротационни повърхнини, обобщени ротационни повърхнини с плоска нормална свързаност и обобщени ротационни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

4. За минималните Лоренцови повърхнини от общ тип (с двумерно първо нормално пространство и удовлетворяващи условието $K^2 - \varkappa^2 > 0$) е въведен специален геометрично определен ортонормиран репер във всяка точка от повърхнината и са въведени канонични параметри. Доказана е фундаментална теорема за съществуване и единственост на минимални Лоренцови повърхнини от общ тип, която гласи че всяка такава повърхнина се определя с точност до движение от две геометрични функции, удовлетворяващи система от две частни диференциални уравнения.

Статии по дисертацията

Резултатите, представени в дисертацията, са публикувани в следните статии:

- Aleksieva Y., Ganchev G., Milousheva V., *On the theory of Lorentz surfaces with parallel normalized mean curvature vector field in pseudo-Euclidean 4-space.* J. Korean Math. Soc. **53** (2016), no. 5, 1077–1100, **IF: 0.441**

- Aleksieva Y., Milousheva V., Turgay N. C., *General rotational surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric.* Bull. Mal. Math. Sci. Soc. (2016),
https://doi.org/10.1007/s40840-016-0425-0, **IF: 0.720**

- Aleksieva Y., Milousheva V., *Rotational surfaces with constant mean curvature in pseudo-Euclidean 4-space with neutral Metric.* Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of Forty Fifth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, (2016), 105–112

Апробация на резултатите

Основните резултати, включени в дисертацията, са докладвани на следните научни форуми:

- *Минимални Лоренцови повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика*, Общ семинар на секция "Анализ, геометрия и топология", ИМИ – БАН, 26 септември 2017
- *General rotational surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric*, Pure and Applied Differential Geometry, Leuven, Belgium, August 21—25, 2017
- *Lorentz surfaces with parallel normalized mean curvature vector field in pseudo-Euclidean* 4*-space with neutral metric*, Mathematics Days in Sofia, Bulgaria, July 10—14, 2017
- *Обобщени ротационни повърхнини в* 4*-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика*, Общ семинар на секция "Анализ, геометрия и топология", ИМИ – БАН, 29 ноември 2016
- *Constant mean curvature rotational surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric*, International Workshop on Theory of Submanifolds, Istanbul, Turkey, June 2—4, 2016
- *Ротационни повърхнини с постоянна средна кривина в* 4*-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика*, 45 Пролетна конференция на СМБ, Плевен, България, 6—10 април 2016
- *Минимални обобщени ротационни повърхнини в псевдо–Евклидово пространство*, Пролетна научна сесия на ФМИ, София, България, 26 март 2016

Библиография

[1] Alías L., Palmer B., *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorenzian space forms.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 315–327.

[2] Bayard P., Patty V., Sánchez-Bringas F.,*On Lorentzian surfaces in* $\mathbb{R}^{2,2}$. arXiv:1503.06225v1.

[3] Burstall F., Ferus D., Leschke K., Pedit F., Pinkall U., *Conformal geometry of surfaces in the 4-sphere and quaternions.* Lecture Notes in Mathematics vol. 1772, Springer-Verlag, 2002.

[4] Bianchi L., *Lezioni di geometria differenziale* (1903)

[5] Brander D., *Singularities of spacelike constant mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski space.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **150** (2011), 527–556.

[6] Burstin C., Mayer W., *Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten* F_2 *im affinen* R_4. Math. Z. **26** (1927), 373–407.

[7] Chaves R., Cândido, C., *The Gauss map of spacelike rotational surfaces with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski space.* Differential geometry, Valencia, 2001, 106–114, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[8] Chen B.-Y., *Geometry of submanifolds.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[9] Chen B.-Y., *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector.* Monatsh. Math. **90** (1980), no. 3, 185–194.

[10] Chen B.-Y., *Classification of marginally trapped Lorentzian flat surfaces in* $\mathbb{E}^4_2$ *and its application to biharmonic surfaces.* J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), no. 2, 861–875.

[11] Chen B.-Y., *Classification of marginally trapped surfaces of constant curvature in Lorentzian complex plane*. Hokkaido Math. J., **38** (2009), no. 2, 361–408.

[12] Chen B.-Y., *Black holes, marginally trapped surfaces and quasi-minimal surfaces*. Tamkang J. Math. **40** (2009), no. 4, 313–341.

[13] Chen B.-Y., *Classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces with arbitrary codimension*. J. Math. Phys. **50** (2009), 043503.

[14] Chen B.-Y., *Complete classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary non-flat pseudo-Riemannian space forms*. Cent. Eur. J. Math. **7** (2009), 400–428.

[15] Chen B.-Y., *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in neutral pseudo hyperbolic* 4*-space*. Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 4, 706–734.

[16] Chen B.-Y., *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in four-dimensional neutral pseudosphere*. J. Math. Phys. **51** (2010), no. 8, 083518, 22 pp.

[17] Chen B.-Y., *Complete explicit classification of parallel Lorentz surfaces in arbitrary pseudo-Euclidean spaces*. J. Geom. Phys. **60** (2010), no. 10, 1333–1351.

[18] Chen B.-Y., *Complete classification of Lorentz surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary pseudo-Euclidean space*. Kyushu J. Math. **64** (2010), no. 2, 261–279.

[19] Chen B.-Y., *Submanifolds with parallel mean curvature vector in Riemannian and indefinite space forms*. Arab J. Math. Sci. **16** (2010), no. 1, 1–46.

[20] Chen B.-Y., *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[21] Chen B.-Y., *Classification of minimal Lorentz surfaces in indefinite space forms with arbitrary codimension and arbitrary index*. Publ. Math. Debrecen **78** (2011), 485–503.

[22] Chen B.-Y., Dillen F., *Classification of marginally trapped Lagrangian surfaces in Lorentzian complex space forms*. J. Math. Phys. **48** (2007), no. 1, 013509, 23 pp.; Erratum, J. Math. Phys. **49** (2008), no. 5, 059901, 1p.

[23] Chen B.-Y., Dillen F., Van der Veken J., *Complete classification of parallel Lorentzian surfaces in Lorentzian complex space norms.* Internat. J. Math. **21** (2010), no. 5, 665–686.

[24] Chen B.-Y., Garay O., *Classification of quasi-minimal surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean 4-space* $\mathbb{E}^4_2$. Result. Math. **55** (2009), no. 1-2, 23–38.

[25] Chen B.-Y., Mihai I., *Classification of quasi-minimal slant surfaces in Lorentzian complex space forms.* Acta Math. Hungar. **122** (2009), no. 4, 307–328.

[26] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Complete classification of parallel surfaces in 4-dimensional Lorentzian space forms.* Tohoku Math. J. **61** (2009), no. 1, 1–40.

[27] Chen, B.-Y., Yang, D., *Addendum to "Classification of marginally trapped Lorentzian flat surfaces in* $\mathbb{E}^4_2$ *and its application to biharmonic surfaces".* J. Math. Anal. Appl., **361** (2010), no. 1, 280–282.

[28] Cheysens L., Verheyen P., Verstaelen, L. *Sur les surfaces A ou les surfaces de Chen.* C.R. Acad. Sc. Paris, I 211 (1981).

[29] Darboux J. G., *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, (1887)

[30] Eisenhart L., *Minimal surfaces in Euclidean four-space.* Amer. J. Math. **34** (1912), 215–236.

[31] Fu Y., Hou Z.-H., *Classification of Lorentzian surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces.* J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), no. 1, 25–40.

[32] Ganchev G., Milousheva V., *On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space*, Kodai Math. J. **31**, (2008), 183–198.

[33] Ganchev G., Milousheva V., *Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in* $\mathbb{R}^4$. Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 6, 993–1008.

[34] Ganchev G., Milousheva V., *Chen rotational surfaces of hyperbolic or elliptic type in the four-dimensional Minkowski space.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **64** (2011), no. 5, 641–652.

[35] Ganchev G., Milousheva V., *An invariant theory of spacelike surfaces in the four-dimensional Minkowski space.* Mediterr. J. Math. **9** (2012), 267–294.

[36] Ganchev G., Milousheva V., *An invariant theory of marginally trapped surfaces in the four-dimensional Minkowski space.* J. Math. Phys. **53** (2012), no. 3, 033705, 15 pp.

[37] Ganchev G., Milousheva V., *Timelike surfaces with zero mean curvature in Minkowski 4-space*. Israel J. Math. **196** (2013), 413–433.

[38] Ganchev G., Milousheva V., *Quasi-minimal rotational surfaces in pseudo-Euclidean four-dimensional space*. Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 10, 1586–1601.

[39] Ganchev G., Milousheva V., *General rotational surfaces in the 4-dimensional Minkowski space*. Turk. J. Math. **38** (2014), no. 5, 883–895.

[40] Haesen S., Ortega M., *Marginally trapped surfaces in Minkowksi 4-space invariant under a rotational subgroup of the Lorenz group*. Gen. Relativ. Grav. **41** (2009), 1819–1834.

[41] Haesen S., Ortega M., *Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*. Class. Quantum Grav. **24** (2007), 5441–5452.

[42] Haesen S., Ortega M., *Screw invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*. J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 639–648.

[43] Lagrange J. L. *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Miscellanea Taurinensia 2, 325 (1760), no. 1, 173–199.

[44] Lane E., *Projective differential geometry of curves and surfaces*. University of Chicago Press, Chicago, 1932.

[45] Larsen J. C., *Complex analysis, maximal immersions and metric singularities*, Monatshefte für Mathematik **122** (1996), 105–156.

[46] Little J., *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces*. Ann. Mat. Pura Appl., IV Ser **83** (1969), 261–335.

[47] Liu H., Liu G., *Hyperbolic rotation surfaces of constant mean curvature in 3-de Sitter space*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **7** (2000), no. 3, 455–466.

[48] Liu H., Liu G., *Weingarten rotation surfaces in 3-dimensional de Sitter space*, J. Geom. **79** (2004), no. 1-2, 156–168.

[49] López R., *Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space*. Tohoku Math. J. **52** (2000), 515–532.

[50] Meusnier, J. B., *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, prés. par div. Savans **10** (1785), 477–510. Presented in 1776.

[51] Moore C., *Surfaces of rotation in a space of four dimensions*. Ann. of Math., 2nd Ser. **21** (1919), no. 2, 81–93.

[52] Moore C., *Rotation surfaces of constant curvature in space of four dimensions*. Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), no. 10, 454–460.

[53] Nitsche J. C. C., *Lectures on Minimal Surfaces*. Volume 1. Cambridge University Press, New York, 1989.

[54] O'Neill M., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, 1983.

[55] Rosca R., *On null hypersurfaces of a Lorentzian manifold*. Tensor (N.S.) **23** (1972), 66–74.

[56] Sakaki M., *Lorentz stationary surfaces in* 4*-dimensional space forms of index 2*. Tsukuba J. Math. **35** (2011), no. 2, 215–229.

[57] Sasahara N., *Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space*. Tokyo J. Math. **23** (2000), no. 2, 477–502.

[58] Shu S., *Space-like submanifolds with parallel normalized mean curvature vector field in de Sitter space*. J. Math. Phys. Anal. Geom. **7** (2011), no. 4, 352–369.

[59] Tribuzy R. , Guadalupe I., *Minimal immersions of surfaces into* 4*-dimensional space forms*. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova 73 (1985), 1–13.

[60] Walter R., *Über zweidimensionale parabolische Flächen im vierdimensionalen affinen Raum. I: Allgemeine Flächentheorie*. J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 178–208.

[61] Yau S., *Submanifolds with constant mean curvature*. Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366.