Българска Академия на Науките
Институт по Математика и Информатика

Любомир Андреев

Гранично поведение на инвариантни разстояния и метрики в комплексния анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен
„ДОКТОР“,
в професионално направление 4.5 „Математика“,
по научна специалност 01.01.04 „Математически анализ“

Научен ръководител: проф. дмн Николай Николов

София, 2017 г.

Дисертационният труд се състои от увод, три глави и списък с цитирана литература. Общият обем е 179 страници, от които 165 са основен текст. Цитирани са 81 литературни източника.
Любомир Андреев е редовен докторант в секция „Анализ, геометрия и топология“ на ИМИ-БАН.

Едно от забележителните открития, които са обособили многомерния комплексен анализ като самостоятелен клон на математиката, е свързано с класическата теорема на Риман от едномерния комплексен анализ. Според нея, с изключение на цялата равнина, всяка равнинна област, която е хомеоморфна на единичния кръг е бихоломорфна на него. Това показва, че топологическата тривиалност е достатъчна за описанието, с точност до бихоломорфизъм, на голям клас от области. Естествено е да се постави върпосът каква е ситуацията в многомерие. По-точно, дали теоремата на Риман има аналог за области в $\mathbb{C}^n$. За да се формулира такава теорема е необходимо, преди всичко, да се определи коя трябва да бъде многомерната област, която да играе ролята на единичният кръг от едномерната теорема. Има две естествени области, които биха могли да играят тази роля: единичното кълбо и единичния полидиск. Тъй като двете области са хомеоморфни и топологически тривиални, възниква въпросът дали те са бихоломорфни. В края на XIX-ти век A. Поанкаре доказва, че в $\mathbb{C}^2$ полидискът и кълбото не са бихоломорфни. Този факт той установява, като пресмята групите от холоморфни автоморфизми на двете области. По-точно, той показва, че съществуването на бихоломорфно изображение между бидиска и кълбото, води до наличието на изоморфизъм между групите от автоморфизми на двете области (спрягането на всеки автоморфизъм с този бихоломорфизъм). От друга страна, пресмятайки тези две групи, той установява че те не могат да бъдат изоморфни, тъй като свързаната компонента на групата от автоморфизми на кълбото, която съдържа идентитета, е некомутативна, докато съответната група на бидиска е комутативна. Това показва, че дори в класа на ограничените простосвързани области няма единен модел, с точност до бихоломорфизъм, както е в едномерния случай. Така въпросът за валидността на теоремата на Риман в многомерие води до задача за класификация на областите, по отношение на бихоломорфната еквивалентност. Един подход към тази задача е с всяка област в $\mathbb{C}^n$ да се свържат гъвкави обекти, които да са инвариантни относно бихоломорфни изображения. При условие, че тези обекти са достатъчно конкретни, човек може да се надява, че може да определи поне дали две области са бихоломорфно нееквивалентни. Всъщност начинът, по който Поанкаре е доказал нееквивалентността на бидиска и кълбото, в определен смисъл, реализира точно тази идея. Групата от холоморфните автоморфизми на една област е именно обект, инвариантен относно бихоломорфни изображения. По-точно, бихоломорфните области непременно имат изоморфни групи от автоморфизми. Това означава, че ако групите от холоморфни автоморфизми на две дадени области не са изоморфни, то тези области не могат да бъдат бихоломорфни. Съществуват и много обекти, инвариантни относно бихоломорфни изображения, които могат да се свържат с една област, и които са различни от групата от автоморфизми на областта. В настоящата дисертация се засягат само малка част от тях, всъщност основно първите исторически възникнали такива обекти, в по-висока размерност. Тези обекти представляват псевдоразстояния и псевдометрики, макар че понякога се разглеждат и функции без специфичните свойства на псевдоразстоянията и псевдометриките. Под псевдоразстояние на дадена област $G \subset \mathbb{C}^n$, разбираме неотрицателна, симетрична функция върху $G \times G$, която удовлетворява неравенството на триъгълника, и която е локално Липшицова, а под псевдометрика - неотрицателна функция δ върху $G \times \mathbb{C}^n$ (допирателното разслоение на областта), за която

$$\delta(z, \lambda X) = |\lambda| \delta(z, X),$$

за всички комплексни числа λ и която е ограничена върху всяко подразслоение на единичното допирателно разслоение на областта, с база компакт в областта. Интуитивно, псевдоразстояние е функция, която измерва разстояния между точки от областта, (като „разстоянието“ между две различни точки може да е нула, оттук и името псевдоразстояние), а псевдометрика е функция, която измерва дължина на допирателен вектор (z, X) (допирателен вектор X в точката z). За псевдометриките не се предполага неравенството на триъгълника при фиксирано z, и ненулев допирателен вектор може да има нулева дължина. Като ни е дадена една псевдометрика δ, ние винаги можем да определим понятието δ-дължина на гладка крива $\gamma : [0, 1] \to G$, като $\int_0^1 \delta(\gamma(t), \gamma'(t))dt$. Това от своя страна позволява, по дадена псевдометрика δ, да определим функция върху $G \times G$, която на всеки две точки от областта съпоставя точната долна граница на множеството от δ-дължини на всички гладки криви с краища в двете точки. Така дефинираната функция е псевдоразстояние (разстояние, когато δ е непрекъсната метрика), която се нарича интегрирана форма на δ. От друга страна, ако ни е дадено едно псевдоразстояние d, то функцията, която на всеки допирателен вектор (z, X) съпоставя $\limsup_{w \to z, \lambda \to 0} d(w, w + \lambda X)$ е псевдометрика, която се нарича производна на d. В някои случаи, псевдоразстоянията и псевдометриките са съответно разстояния и полунорми (и дори норми), като това силно зависи от характера на областите, върху която те се дефинират. Ние ще се интересуваме от псевдоразстояния и псевдометрики, свързани с области в $\mathbb{C}^n$, които се дефинират екстремално, чрез различни съвкупности от изображения свързани с областта. Прототип на идеята с всяка област да се свърже инвариантно псевдоразстояние и псевдометрика, произхожда от изследвания на Поанкаре от края на XIX-ти век [55]. През 1882 г. той написва метрика за единичния кръг, която е инвариантна относно всичките му дробно-линейни автоморфизми. В явен вид тя може да се запише като

$$\delta(z, X) = \frac{|X|}{1 - |z|^2},$$

като инвариантността относно бихоломорфно изображение f, означава че

$$\delta(z, X) = \delta(f(z), f'(z)X).$$

По-късно, през 1894 г., той доказва, че всяка холоморфна функция f от единичния кръг в себе си, за която $f(0) = 0$, удовлетворява неравенството $|f(z)| \leqslant |z|$ (вж. [56]). Това твърдение, което днес е известно като лема на Шварц (име дадено от К. Каратеодори през 1912 г. [9]), той използва за да установи, че всички холоморфни автоморфизми на единичния кръг са известните дробно-линейни такива. Така с единичния кръг се свързва метрика (и разстояние - интегрираната форма на метриката), която е инвариантна относно всички бихоломорфни изображения на кръга. При това, единичният кръг с тази метрика дава интересен нагледен модел на невклидова геометрия: геодезичните линии, („правите линии“ относно тази метрика), са окръжностите в разширената комплексна равнина, които са ортогонални на границата на единичнния кръг (където лежат безкрайно далечните точки). При фиксирана една геодезична линия и точка от кръга, нележаща на нея, могат да се прекарат безбройно много други геодезични, които минават през точката и не пресичат дадената геодезична. Това означава, че в този модел не е валиден постулата за успоредните прави от Евклидовата геометрия. Малко по-късно, през 1912 г., Каратеодори пръв публикува формулировката и доказателството на твърдението, че за всяка холоморфна функция от единичния кръг в себе си, която запазва нулата, модулът на производната ѝ в нулата не надминава единица [9]. Според Каратеодори, това твърдение за пръв път се появява в работа на Шварц [61], свързана с теоремата на Риман. В нея Шварц използва факта, че ако модулът на една холоморфна функция в затворения единичен кръг е ограничен от константа, то и модулът на производната ѝ в нулата е ограничен от същата константа. Този факт той установява, като разглежда формулата на Коши за производната в нулата. Каратеодори всъщност доказва, че твърдението е в сила, без да се предполага никаква регулярност на функцията по границата на единичния кръг. Той е и първият математик, който е осъзнал важността на тази лема в теорията на функциите. През 1916 г. Г. Пик, при изследвания свързани с елиптичната модулярна функция [52, 53], доказва че всяка холоморфна функция f от единичния кръг в себе си, „свива“ метриката на Поанкаре δ и породеното от нея разстояние

$$d(z, w) = \tanh^{-1} \left| \frac{z - w}{1 - z\overline{w}} \right|$$

(интегрираната форма на δ). По-точно, Пик доказва, че

$$\delta(f(z), f'(z)X) \leqslant \delta(z, X)$$

и

$$d(f(z), f(w)) \leqslant d(z, w)$$

за всички точки z, w от единичния кръг и вектори $X \in \mathbb{C}$ (лема на Щварц-Пик). Това твърдение, което той доказва, използвайки лемата на Шварц, е всъщност еквивалентно с нея. То представлява инвариантна формулировка на лемата на Шварц, в което отсъства изискването $f(0) = 0$. Също така, формулировката на Пик, касаеща метриката на Поанкаре и породеното от нея разстояние, са еквивалентни на формулировките на лемата на Шварц, дадени от Поанкаре и Каратеодори, съответно. Изобщо, лемата на Шварц през следващите години е била отправна точка за множество изследвания. Самият Каратеодори я популяризира, като показва ползите от нея в различни задачи за конформни изображения.

Може би най-значителното приложение на лемата на Шварц-Пик, в изследванията на Каратеодори, е свързано с въведеното от него през 1926 г. псевдоразстояние, което той дефинира за произволна област в $\mathbb{C}^n$, при което областта, разглеждана заедно с това псевдоразстояние, представлява многомерен аналог на неевклидовия модел на Поанкаре. По-точно, за всяка област той дефинира функция, която на всеки две фиксирани точки z, w от областта съпоставя $\sup\{d(f(z), f(w))\}$, където f се изменя в множеството на ограничените холоморфни функции, дефинирани върху областта. С помощта на лемата на Шварц-Пик (за разстоянието на Поанкаре) Каратеодори доказва, че така дефинираното от него псевдоразстояние, върху единичния кръг съвпада с разстоянието на Поанкаре. Също така, от тази лема следва и фундаменталното свойство, че ако имаме две области $G \subset \mathbb{C}^n$ и $H \subset \mathbb{C}^m$, с псевдоразстояния на Каратеодори d_G и d_H, и $F : G \to H$ е холоморфно изображение, то

$$d_H(F(z), F(w)) \leqslant d_G(z, w)$$

за всички $z, w \in G$ (обобщена лема на Шварц-Пик). С други думи холоморфните изображения между областите „свиват“ псевдоразстоянията на Каратеодори. От това именно свойство следва инваринатността относно бихоломорфни изображения. В частност, псевдоразстоянието на Каратеодори е монотонно по включване, в смисъл, че ако една област се съдържа в друга, то псевдоразстоянието на Каратеодори на по-широката област не надминава това на по-тясната.

През 1930 г., отново във връзка със задачата за класификация на областите в многомерие, е реализиран още един начин, с всяка област да се свърже бихоломорфно инвариантен обект. Този подход принадлежи на С. Бергман и почива върху идеи от функционалния анализ (вж. [8]). Върху дадена ограничена област $G \subset \mathbb{C}^n$ се разглежда пространството от холоморфните функции, с интегруем квадрат на модула. Това пространство е хилбертово, тъй като то е затворено подпространство на хилбертовото пространство $L^2(G)$ от всички функции върху областта, с интегруем квадрат на модула. Затвореността му следва от пълнотата на $L^2(G)$ и от една фундаментална оценка за модула на функцията, върху произволен компакт в областта, която се получава от неравенствата на Коши: Модулът на функцията върху компакта се мажорира от константа (зависеща от компакта) умножена с L^2 нормата на функцията [38]. Това твърдение, приложено за компакт, който се състои от една точка, води до непрекъснатост на функционалът, който на всеки елемент на пространството съпоставя стойността му в точката. От последният факт и теоремата на Рис за непрекъснатите линейни функционали получаваме, че пространството от холоморфните функции, с интегруем квадрат на модула, има ядро, т. е. съществува функция K върху $G \times G$, която за всяка фиксирана стойност на една от променливите е холоморфна функция от $L^2(G)$, и чрез която всяка холоморфна функция f от $L^2(G)$, се представя като скаларно произведение с K, по-точно

$$f(z) = (f, K(\cdot, z)), z \in G.$$

Това ядро на $L^2(G)$ се нарича ядро на Бергман. Оказва се, че ядрото на Бергман, разглеждано върху диагонала на $G \times G$ е положителна, безкрайно гладка, плурисубхармонична функция, и следователно квадратичната форма върху $\mathbb{C}^n$, с коефициенти $\partial\overline{\partial} \log K(z, z)$ (формата на Леви на $\log K(z, z)$) е положително дефинитна квадратична форма (това свойство е еквивалентно със свойството плурисубхармоничност, когато функцията е поне двукратно гладка). Псевдометриката на Бергман на областта G се дефинира като квадратния корен от формата на Леви на функцията $\log K(z, z)$, а псевдоразстоянието на Бергман, като интегрираната форма на тази псевдометрика. И двете функции са непрекъснати, като псевдометриката е комплексна полунорма, върху всяко допирателно пространство в точките на областта. Инвариантността на псевдометриката и псевдоразстоянието на Бергман, относно бихоломорфни изображения, се получава от формула за преобразуване на ядрото на Бергман при бихоломорфно изображение, която служи и за намиране на явни изрази за ядрото на Бергман на конкретни области. Пресмятайки това ядро за единичното кълбо в $\mathbb{C}^n$, човек вижда, че върху единичния кръг, псевдометриката на Бергман съвпада с метриката на Поанкаре умножена с $\sqrt{2}$ (Всъщност, всяка метрика върху единичния кръг, която е инвариантна относно холоморфните му автоморфизми, с точност до константен множител, съвпада с метриката на Поанкаре). От друга страна, съществуват примери, които показват, че за разлика от псевдоразстоянието на Каратеодори, за псевдоразстоянието на Бергман не е в сила обобщената лема на Шварц-Пик. Също така, псевдоразстянието не притежава свойството монотонност по включване. Псевдометриката и псевдоразстоянието на Бергман могат да се дефинират и за неограничени области G, при условие че ядрото на Бергман на $L_h^2(G)$, върху диагонала на $G \times G$ е положително. Последното условие се установява, че е винаги налице, когато координатните функции са в $L^2(G)$, което очевидно е изпълнено, когато областта е ограничена. В тези случаи се оказва, че псевдометриката на Бергман е норма върху всяко допирателно пространство.

Ще отбележим, че макар и конструкцията на Бергман да е явна, пресмятането на псевдометриката и псевдоразстоянието не е лесно, тъй като се изисква познаването на пространството от холоморфните функции с интегруем квадрат, затова явни формули съществуват за съвсем малко области. Поради тази причнина, дълго време, псевдометриката на Бергман е представлявала по-скоро обща идея, отколкото инструмент за изследвания. Развитието на теорията на $\overline{\partial}$ оператора, през 60-те години на миналия век, от Л. Хьормандер, А. Андреоти, Е. Везентини, Й. Кон и други, е помогнало за разбирането на на граничното поведение на ядрото и метриката на Бергман, върху строго псевдоизпъкнали области G. Ядрото на Бергман се изразява чрез решения на $\overline{\partial}$ оператора, които са ортогонални в $L^2(G)$ на холоморфните функции. Това на свой ред позволява то и псевдометриката да се анализират чрез тези решения. Резултатите от теорията на $\overline{\partial}$ оператора представляват мощен инструмент за изучаване граничното поведение на ядрото и метриката на Бергман, и това е позволило да се достигнат дълбоки резултати, свързани с граничното поведение на бихоломорфни и собствени холоморфни изображения между области.

През 60-те години на миналия век, Х. Рейфен, С. Кобаяши и Х. Ройден, дефинират и изучават нови холоморфно инвариантни обекти, които имат свойства, аналогични на псевдоразстоянието на Каратеодори: върху единичния кръг съвпадат с разстоянието или метриката на Поанкаре и удовлетворяват обобщена лема на Шварц-Пик. За произволна област в $\mathbb{C}^n$, Рейфен въвежда псевдометрика, като на произволен допирателен вектор (z, X) в точка от областта , се съпоставя точната горна граница на множеството от стойности на метриката на Поанкаре, върху допирателните вектори $(f(z), f'(z)X)$ (образа на (z, X) при диференциала на f), като f пробягва всички холоморфни функции, дефинирани върху областта, приемащи стойности в единичния кръг (вж. [58]). Тази псевдометрика е комплексна полунорма върху всяко допирателно пространство в точките на областта и представлява многомерен аналог на метриката на Поанкаре. Чрез лемата на Щварц-Пик (за метриката на Поанкаре) се установява, че ако $G \subset \mathbb{C}^n$ и $H \subset \mathbb{C}^m$, са две области с псевдометрики на Рейфен δ_G и δ_H, и $F : G \to H$ е холоморфно изображение, то

$$\delta_H(F(z), F'(z)X) \leqslant \delta_G(z, X)$$

за всички $(z, X) \in G \times \mathbb{C}^n$ (обобщена лема на Шварц-Пик за псевдометрика). От това свойство се получава инвариантността при бихоломорфни изображения. Оказва се също, че псевдометриката на Рейфен и псевдоразстоянието на Каратеодори са свързани по между си. По-точно, псевдометриката на Рейфен е производна на псевдоразстоянието на Каратеодори, но има примери, които показват, че интегрираната ѝ форма не съвпада с псевдоразстоянието на Каратеодори.

През 1966 г. С. Кобаяши въвежда инвариантно псевдоразстояние, свързано с всяка област в $\mathbb{C}^n$, изхождайки от разстоянието на Поанкаре и съвкупността на всички холоморфни изображения от единичния кръг в областта (аналитични дискове) (вж. [37]). За описанието на това псевдоразстояние е удобно да се използва функцията, която на всеки две точки от дадена област в $\mathbb{C}^n$ съпоставя точната долна граница на множеството от разстояния на Поанкаре, между прообразите на двете точки, при всички аналитични дискове, в чието множество от стойности се съдържат двете точки (функция на Лемперт). Съществуването на аналитични дискове, с исканото свойство, в най-общи линии, се получава от теоремата на Вайерщрас за равномерно приближение на непрекъсната функция върху компактен интервал с полином, и от теоремата на Риман за конформното изображение. Функцията на Лемперт е неотрицателна симетрична функция, която удовлетворява обобщената лема на Шварц-Пик, и за единичния кръг съвпада с разстоянието на Поанкаре. В частност, тя е още един инвариантен обект, който може да се свърже с произволна област в $\mathbb{C}^n$, и който представлява самостоятелен интерес. Съществуват примери на области, които показват, че функцията на Лемперт не удовлетворява неравенството на триъгълника и следователно, в общия случай, тя не е псевдоразстояние. Тя не е непрекъсната по отделните променливи, но е полунепрекъсната отгоре. От друга страна има широк клас от области, за които функцията на Лемперт е непрекъсната, това са Монтелевите области, т. е. тези, за които пространствата от аналитични дискове са нормални пространства. Това означава, че за всяка редица от аналитични дискове има две възможности: редицата има равномерно сходяща върху всеки компакт подредица, или има равномерно разходяща върху всеки компакт подредица, т. е. подредица, за която образите на произволен компакт в единичния кръг, от известно място нататък не пресичат произволен предварително фиксиран компакт в областта.

Псевдоразстоянието на Кобаяши за дадена област в $\mathbb{C}^n$ се дефинира, удобно чрез функцията на Лемперт l, като на всеки две точки z, w от областта, се съпостави точната долна граница на множеството от суми

$$l(z, z_1) + \cdots + l(z_n, w),$$

които се получават при всеки избор на n точки $z_1, \ldots, z_n$ от областта, за всяко естествено n. Така, дефинираната функция е непрекъснато псевдоразстояние, което удовлетворява обобщената лема на Шварц-Пик, и което върху единичния кръг съвпада с разстоянието на Поанкаре. При това, псевдоразстоянието на Кобаяши е максималното псевдоразстояние, което се мажорира от функцията на Лемперт. Съществуват примери на области, за които функцията на Лемперт не съвпада с псевдоразстоянието на Кобаяши (вж. [31], Забележка 3.5.11).

През 1971 г. Х. Ройден въвежда псевдометрика, за всяка област в $\mathbb{C}^n$, изхождайки от метриката на Поанкаре и съвкупността на аналитичните дискове в областта (вж. [59]). Тя се отнася към псевдоразстоянието на Кобаяши така, както псевдометриката на Рейфен, към псевдоразстоянието на Каратеодори. Определя се като функцията, която на допирателен вектор X в точка z от областта, съпоставя точната долна граница на множеството от стойности на метриката на Поанкаре, пресметната в допирателните вектори (λ, μ) върху единичния кръг, за които $(\varphi(\lambda), \varphi'(\lambda)\mu) = (z, X)$, т. е. в прообразите на (z, X), при диференциалите на всички аналитични дискове, в чието множество от стойности се съдържа z. Тази псевдометрика удовлетворява обобщената лема на Шварц-Пик и съвпада с метриката на Поанкаре върху единичния кръг. Има примери на области, които показват, че псевдометриката на Ройден, в общия случай, не е норма върху допирателните пространства в точките на областта, тъй като не е изпълнено неравенството на триъгълника (вж.[31], Пример 3.5.9). Също така, тя не е непрекъсната по отделните променливи, но е полунепрекъсната отгоре. Има връзка между псевдометриката на Ройден и псевдоразстоянието на Кобаяши, а именно че интегрираната форма на псевдометриката на Ройден е псевдоразстоянието на Кобаяши. От друга страна, псевдоразстоянието на Ройден не е производна на псевдоразстоянието на Кобаяши .

Допълнителни исторически сведения и връзки между изброените по-горе и други обекти, могат да се намерят в [60]. За допълнителни сведения и изследвания върху споменатите и други бихоломорфни инварианти вж. [38], [31], [47].

Сега ще изброим някои най-основни факти, които касаят гореспоменатите инвариантни обекти. Всички доказателства могат да се намерят в [31]. С помощта на теоремата на Монтел, която гласи, че от всяка равномерно ограничена съвкупност от холоморфни върху дадена област функции, може да се избере равномерно сходяща върху всеки компакт подредица, се установява, че съществуват ограничени холоморфни функции, които реализират псевдоразстоянието на Каратеодори и псевдометриката на Рейфен (т. е. съществуват екстремални функции). Оказва се, че за псевдоразстоянието на Кобаяши и псевдометриката на Ройден, съществуването на екстремални аналитични дискове (комплексни геодезични) не е налице за всички области, но е валидно за всички Монтелеви области. Също така, сред всички възможни съвкупности от псевдоразстояния и псевдометрики, които могат да се въведат върху областите в $\mathbb{C}^n$, съвпадащи върху единичния кръг с разстоянието и метриката на Поанкаре, и удовлетворяващи обобщената лема на Шварц-Пик (свиващи съвкупности), псевдоразстоянието на Каратеодори и псевдометриката на Рейфен са минимални, а тези на Кобаяши и Ройден са максимални. Така за всяка област, псевдоразстоянието на Каратеодори се мажорира от това на Кобаяши, а псевдометриката на Рейфен се мажорира от тази на Ройден. Доказва се, че за произволна област, псевдоразстоянието и псевдометриката на Бергман мажорират съответно псевдоразстоянието и псевдометриката на Каратеодори и Райфен. От друга страна, има примери на области, които показват че в общият случай, псевдометриките на Бергман и Кобаяши са несравними (вж. [14], [18]). Въпреки това, има изследвания и резултати, според които в класа на строго псевдоизпъкналите области, тези инварианти могат да се сравняват. Ще отбележим още, че съществуват много други междинни свиващи съвкупности от инвариантни псевдоразстояния и псевдометрики, които представляват самостоятелен интерес. Най-известните са псевдометриките на Азукава и Сибони, и са възникнали във връзка с въпроса, за кои области псевдоразстоянието на Кобаяши е разстояние. Тези инварианти също се дефинират екстремално, но вместо холоморфни изображения се разглеждат различни съвкупности от плурисубхармонични функции с конкретни свойства. Областите, за които горепосочените псевдоразстояния и псевдометрики са разстояния, и метрики се наричат хиперболични (по отношение на съответния инвариант). Когато псевдоразстоянията на Каратеодори, Бергман и Кобаяши са разстояния, казваме че областта е съответно c, b и k хиперболична, а когато псевдометриките на Рейфен, Бергман и Ройден са метрики, казваме че областта е съответно γ, β и $\varkappa$ хиперболична. За равнинни области c и γ хиперболичността са еквивалентни. Това важи и за областите в по-висока размерност, които са бихоломорфни на ограничени области. При това, за равнинните области, които не са c и γ хиперболични, съответните инварианти са тъждествено нула, което не е така за областите в по-висока размерност. От друга страна, в по-висока размерност не са известни никакви други съотношения между c и γ хиперболичност. Противно на това, k и $\varkappa$ хиперболичността са еквивалентни в произволна размерност. За k хиперболичността има много характеризирации. Хиперболичността по отношение на псевдоразстоянието на Кобаяши е еквивалентна с това топологията, породена от разстоянието, да съвпада с евклидовата топология. Това не е така за псевдоразстоянието на Каратеодори, т. е. съществуват c хиперболични области, за които топологията, породена от разстоянието на Каратеодори, не съвпада с евклидовата топология. Въпреки това, има широк клас от области, за които двата вида хиперболичност са еквивалентни, и за които топологиите, породени от разстоянията, съвпадат с евклидовата топология: Доказва се, че всяка k хиперболична балансирана област е ограничена, а за всяка област, бихоломорфна на ограничена област, топологията, породена от псевдоразстоянието на Каратеодори, съвпада с евклидовата топология, следователно областа е c хиперболична. От друга страна, тъй като псевдоразстоянието на Каратеодори не надминава това на Кобаяши, всяка c хиперболична област е k хиперболична. Така за балансираните области, k хиперболичността е еквивалентна с c хиперболичността. Един широк клас от k хиперболични области, е този на Монтелевите области. За k хиперболичните области има теореми за локализация. Ще отбележим, че интерес представляват и въпросите свързани с пълнотата, относно гореспоментите инвариантни разстояния, които тук няма да засягаме. Сведения за тях могат да се намерят в [31].

Във връзка с изучаването на геометричните и аналитични свойства на ограничените области в $\mathbb{C}^n$ (вж. [39, 40]), през 2012 г. Ф. Денг, К. Гуан и Л. Жанг въвеждат понятие за притискаща функция, върху произволна ограничена област в $\mathbb{C}^n$ (вж. [10]). В своята статия те установяват редица свойства на тези функции и изследват връзката им с геометричните и аналитичните стукрути, които могат да се въведат върху ограничените области. За ограничена област $G \subset \mathbb{C}^n$, притискащата функция S_G се определя по следния начин. При дадени $z \in G$ и холоморфно влагане $f : G \to B(0,1)$, такова че $f(z) = 0$, полагаме $S_G(z, f) = \sup\{r > 0 | B(0,r) \subset f(G)\}$, където $B(0,r)$ означава кълбо в $\mathbb{C}^n$ с център 0 и радиус r. Стойността на притискащата функция S_G в точката z се определя, като $S_G(z) = \sup\limits_f S_G(z, f)$, където f пробягва всички холоморфни влагания на областта в единичното кълбо, за които $f(z) = 0$. От определението следва, че S_G е бихоломорфнен инвариант, т. е. ако $G, D \subset \mathbb{C}^n$ са две ограничени области и $f : G \to D$ е бихоломорфно изображение, то $S_D(f(z)) = s_G(z)$, за всички $z \in G$. Холоморфно хомогенните регулярни области, дефинирани в [39, 40], са всъщност ограничените области, чиито притискащи функции имат положителни долни граници. Сред тях се съдържат редица интересни обекти като ограничени хомогенни области (т. е области чиито групи от автоморфизми действат транзитивно) Тейхмюлерови пространства, ограничени области, накриващи компактни Келерови многообразия, и строго изпъкнали области с двукратно гладка граница (вж. [63]). Лесно е да се види, че притискащата функция на единичното кълбо е константата 1.

Естествен въпрос е дали притискащата функция на една ограничена област G, която не е бихоломорфна на единичното кълбо, може да приеме стойност 1 в някоя точка z от областта. Този въпрос е свързан със съществуването на екстремално изображение, което реализира точната горна граница в определението на $S_G(z)$, т. е. със съществуването на холоморфно влагане $f : G \to B(0, 1)$, за което $f(z) = 0$ и $B(0, S_G(z)) \subset f(G)$. В [10] се доказва, че такива екстремални изображения съществуват. Като следствие се доказва, че S_G приема стойност 1 в областта, тогава и само тогава, когато G е бихоломорфна на единичното кълбо. От друга страна съществуват области, чиито притискащи функции имат супремум 1, но не са бихоломорфни на кълбото.

Едно свойство на притискащите функции е тяхната непрекъснатост, която може да се установи чрез свиващото свойство на метриките на Кобаяши. От непрекъснатостта на притискащите функции, може да се види, че една ограничена област е холоморфно хомогенна регулярна област (в смисъл на [39, 40]) ако накрива компактно комплексно многообразие. Свойствата на притискащите функции могат да отразяват някои геометрични и аналитични свойства на ограничените области. В някои специални случаи граничното поведение на притискащата функция, на дадена област влече определена гранична оценки на мертиката на Каратеодори, от която следва нейната пълнота. За ограничена област, чиято притискаща функция допуска положителна долна граница (разглеждана като холоморфно хомогенна регулярна област) е известно (вж. [39, 40]), че метриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман са еквивалентни (в смисъл, че съществува константа $c > 0$, такава че $c^{-1}m_{1G} \leqslant m_{2G} \leqslant cm_{1G}$), и всички те са пълни (вж. [63]). Тъй като от пълнотата на метриката на Каратеодори следва псевдоизпъкналост на областта (вж. [31]), холоморфно хомогенните регулярни области са псевдоизпъкнали. Притискащите функции на равнинни области имат хубави свойства. За крайно свързани равнинни области е добре изяснено граничното поведение на техните притискащи функции. Като резултат от това се получава необходимо и достатъчно условие за това една крайно свързана област да бъде холоморфно хомогенна регулярна област. От друга страна, за притискащата функция на ограничена равнинна област с гладка граница имаме $\lim\limits_{z\to\partial G} S_G(z) = 1$. Предвид непрекъснатостта на S_G, от последното равенство следва, че всички ограничени равнинни области с гладка граница са холоморфно хомогенни регулярни. Като резултат от този факт, могат да се установят някои важни резултати за равнинни области. Например, че метриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман са пълни и еквивалентни, или че ограничените равнинни области с гладка граница са хиперизпъкнали, т. е. те допускат ограничени субхармонични изчерпващи функции. В частност от факта, че $S_G \to 1$ около границата на областта, следва че S_G допуска непрекъснато продължение върху затварянето на G, когато границата е гладка. Не е известно дали това е така за неравнинни области с гладка граница, с изключение на тези, които се получават като произведения на равнинни области с гладка граница, тъй като произведение на две холоморфно хомогенни регулярни области е пак такава област.

По-подробни сведения и резултати свързани с притискащата функция, както и нейни приложения могат да се намерят в [11, 18, 19, 22, 23, 35, 36].

В настоящата дисертация ще се интересуваме основно от въпросите, свързани с граничното поведение на инвариантни псевдоразстояния, псевдометрики и притискащи функции, около гранични точки на области, с определени свойства на границите. Исторически, първият резултат, касаещ граничното поведение на инвариант, се отнася за ядрото на Бергман K, около точка a от границата на ограничена строго псевдоизпъкнала област G. През 1965 г. Хьормандер доказва, че когато z клони към a, $K(z,z)\mathrm{dist}(z,\partial G)$, клони към произведението на $\frac{n!}{4\pi^n}$ и собствените стойности на формата на Леви в a на дефиниращата функция, индуцирана от разстоянието до границата ѝ (вж. [30]). Основната идея на доказателството на този факт е сравняването на ядрата на Бергман, на областта и близкия до нея, комплексен елипсоид, около a, индуциран от строго положителната форма на Леви на G в a. Този елипсоид е бихоломорфен на единичното кълбо. Изобщо казано, кълбото може да служи за универсален модел на областите, около техните строгопсевдоизпъкнали точки. Едно обобщение на този резултат, получено от Феферман през 1974 г. (вж. [21]), намира приложение в изясняването на граничните свойства на бихоломорфните изображения, между строго псевдоизпъкнали области, с безкрайно гладка граница. По-точно, Феферман доказва, че всяко бихоломорфно изображение между строго псевдоизпъкнали области, с безкрайно гладка граница, може да се продължи до безкрайно гладък дифеоморфизъм между затворените им обвивки. За да докаже своята теорема, Феферман съществено усилва резултата на Хьормандер. Използвайки идеята на Хьормандер, К. Дидрих (1970 г.) и И. Греъм (1974 г.) намират, пак в термините на разстоянието до границата и формата на Леви, точното гранично поведение, съответно на метриката на Бергман и метриките на Каратеодори-Рейфен и Кобаяши-Ройден, на строго псевдоизпъкнали области (вж. [12, 29]). По-късно Д. Ма 1991 г. и А. Ефимов 1994 г. прецизират резултата на Греъм в различни насоки (вж. [42, 20]). Ще отбележим, че задачите за продължаване на бихоломорфни и собствени холоморфни изображения, имат отношение към теоремата на Каратеодори, която гласи, че всяко бихоломорфно изображение между две равнинни области, ограничени от жорданови криви, може да се продължи до хомеоморфизъм между затворените им обвивки. Твърдението не е вярно, ако границите на областите не са Жорданови криви. Естествен е въпросът може ли, и при какви условия за границите на областите, да се пренесе теоремата на Каратеодори в по-висока размерност. Оказва се, че това е възможно за строго псевдоизпъкналите области. Този резултат е доказан за пръв път през 1971 г. от Г. Маргулис (вж. [43]). При това, твърдението не е вярно, ако предположението за строга псевдоизпъкналост се замени с псевдоизпъкналост. Това илюстрира същественото различие между псведоизпъкналите и строго псевдоизпъкналите области, което се проявява още на ниво собствени холоморфни изображения. Например, единичният полидиск, който е псевдоизпъкнала област, която не е строго псевдоизпъкнала, може да се изобрази върху себе си чрез собствено холоморфно изображение, което не е бихоломорфно, (например изображението $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n})$, където $k_1, \ldots k_n$ са естествени числа). От друга страна, както С. Пинчук доказва през 1974 г. (вж. [54]), всяко собствено холоморфно изображение, между строго псевдоизпъкнали области, което се продължава до непрекъснато-диференцируемо изображение, върху затворената обвивка на дефиниционното си множество, е локално бихоломорфно.

Има няколко добре известни обобщения на теоремата на Каратеодори, в по-висока размерност, в зависимост от вида на границите на строго псевдо изпъкналите области, както и от вида на самите области. Съществува и резултат, в който предположението за строга псевдоизпъкналост е заменено с псевдоизпъкналост и условие за ръста на метриката на Кобаяши на областта. По-точно, ако D и G са ограничени пседвоизпъкнали области в $\mathbb{C}^n$ и съществува $\varepsilon \in (0,1)$, такова че

$$\kappa_D(z, X) \geqslant \frac{|X|}{\operatorname{dist}(z, \partial D)^{\varepsilon}},$$

когато z е близо до границата на D, то всяко собствено холоморфно изображение $f : G \to D$ се продължава до непрекъснато по Хьолдер изображение (с показател ε), между затворените обвивки на двете области (вж. [2, 4, 34]). Този резултат е валиден и в частния случай, когато D е строго псевдоизпъкнала, или когато е псевдоизпъкнала, с реално аналитична граница (вж. [13]). Същият резултат е валиден, ако D е строго псевдоизпъкнала, с частично гладка граница [57]. По-нататъшните резултати се отнасят за по-специални типове области, като кълба [1], области на Рейнхарт [5, 33], области с много симетрии [3], области на Хартогс в $\mathbb{C}^2$ с аналитична граница [15]. Има и резултати за бихоломорфни изображения между определен тип непсевдоизпъкнали области, с реално аналитични граници [16, 25]. Освен гореспоменатите статии, има обширна литература, която третира въпроси, свързани с гладки продължения на собствени холоморфни изображения между псевдоизпъкнали области с гладка граница [7, 6, 17, 21]. Тези резултати са установени, като са използвани оценки за граничното поведение на инварианти върху съответните области.

Един известен резултат, касаещ гранично поведение на инвариант, към който настоящата дисертация има отношение, е оценка отгоре на псевдоразстоянието на Кобаяши, около $C^{1,\varepsilon}, \varepsilon \in (0,1)$ гладка гранична точка, на произволна област $G \subset \mathbb{C}^n$. По-точно в статията [24] от 1987 г. Ф. Форстренич и Й. Розе установяват, че за граничната точка от посочения вид, съществуват околност U и число $c > 0$, такива че за всеки две точки $z, w \in G \cap U$, е вярно че

$$k_G(z, w) \leqslant \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w, \partial G)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial G)+|z-w|}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(w,\partial G)+|z-w|}\right)+c.$$

Тази оценка се прилага при установяването на главният резултат на статията, който гласи, че ако a е $C^{1,\varepsilon}$ гладка гранична точка на област $G \Subset \mathbb{C}^n$, върху която съществува непрекъсната, отрицателна плурисубхармонична функция ρ, удовлетворяваща в някоя околност на a неравенството $\rho(z) \geqslant -c\operatorname{dist}(z,\partial G)$, за някое число $c>0$, и съществува строгопсевдоизпъкнала точка b на област $D \Subset \mathbb{C}^n$, която е точка на сгъстяване за множеството от стойности около a на собствено холоморфно изображение $f : G \to D$, то това изображение f се продължава непрекъснато през точката a.

Една от главните цели на настоящата дисертация е обобщение на гореспоменатата оценката в две посоки. Първо, константата c да фигурира като множител пред $|z-w|$ (което се съгласува със случая $z=w$), и да може да се избира произволно. Второ, предположението за $C^{1,\varepsilon}$ гладкост на граничната точка, да се замени с по-слабото предположение за Дини гладкост. По-конкретно, в Глава 2, (вж. Теорема 2.4.3) е установено, че ако $G \subset \mathbb{C}^n$ е област и $a \in \partial G$ е Дини гладка гранична точка, то за всяко $c > 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ съществува околност U на a, такава че за всички $z,w \in G\cap U$ имаме (*) $2k_G(z,w) \leqslant \log\left(1+c\frac{|z-w|}{\sqrt{\operatorname{dist}(z,\partial G)\operatorname{dist}(w,\partial G)}}\right)^2$. Ако G е ограничена, то съществува $c > 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, така че горното неравенството важи за всички $z,w\in G$. Реализираните методи, следват идеите от статията [24]. Установено е че тази оценка, остава в сила и за Дини гладки области в $\mathbb{R}^n$, като удвоеното псевдоразстояние на Кобаяши се замени с т. нар. квазихиперболично разстояние, което за произволна област $G \subset \mathbb{R}^n$, се дефинира като интегрираната форма на метриката $\delta(z,X) = \frac{|X|}{\operatorname{dist}(z,\partial G)}$ и се означава с h_G. По-специфичните свойства на квазихиперболичното разстояние са изучавани основно от Ф. Геринг през 70-те и 80-те години на миналия век (вж. [28, 27, 44, 45]) и има множество приложения в теорията на квазиконформните и квазирегулярните изображения. Като приложение на оценката (*), в дисертацията се доказва твърдение за продължаване на собствени холоморфни изображения между Дини гладки области, което е аналог на споменатия по-горе резултат на Форстренич и Розе от [24]. По-точно, ако $G \Subset \mathbb{C}^n$, е Дини гладка ограничена област, върху която съществува отрицателна плурисубхармонична функция ρ, удовлетворяваща неравенството $\rho(z) \geqslant -\operatorname{dist}(z,\partial G)$, и $D \subset \mathbb{C}^n$ е

Дини гладка изпъкнала, ограничена област, за която комплексното допирателно пространство, във всяка точка $b \in \partial D$, пресича границата на областта само в точката b, то всяко собствено холоморфно изображение $f : G \to D$, се продължава до непрекъснато изображение от $\overline{G}$ върху $\overline{D}$ (вж. Теорема 2.5.4).

В Глава 2 се съдържат резултати, свързани с граничното поведение на квазихиперболичното разстояние и псевдоразстоянието на Кобаяши, върху области в $\mathbb{C}^n$ с C^1 гладка граница. По-точно, ако $G \subset \mathbb{C}^n$ е област и $a \in \partial G$ е C^1 гладка гранична точка, то $\limsup\limits_{z,w\to a} \dfrac{k_G(z,w)}{h_G(z,w)} \leqslant \dfrac{1}{2}$, а ако G е ограничена, то $\limsup\limits_{z\to\partial G} \dfrac{k_G(z,w)}{h_G(z,w)} \leqslant \dfrac{1}{2}$, равномерно относно $w \in G$ (вж. Теореми 2.3.2 и 2.3.3). Също така, изяснено е и граничното поведение на квазихиперболичното разстояние върху области в $\mathbb{R}^n$, с C^1 гладка граница. По-конкретно, установено е че ако $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ е област и $a \in \partial G$ е C^1 гладка гранична точка, то $\lim\limits_{z,w\to a} \dfrac{h_G(z,w)}{s_G(z,w)} = 1$, където

$$s_G(z,w) = 2\sinh^{-1} \frac{|z-w|}{2\sqrt{\operatorname{dist}(z,\partial G)\operatorname{dist}(w,\partial G)}},$$

(вж. Теорема 2.2.4). Функцията s_G е инвариантна относно Мьобиусовите трансформации в $\overline{\mathbb{R}}^n$. При това, когато G е полупространство в $\mathbb{R}^n$, функцията s_G съвпада с квазихиперболичното разстояние на полупространството. Ако $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ е ограничена област с C^1 гладка граница, то $\lim\limits_{\substack{z\to\partial G\\ w\to a}} \dfrac{h_G(z,w)}{s_G(z,w)} = 1$, равномерно относно $w \in G$ (вж. Теорема 2.2.5).

Оценки за граничното поведение на псевдометриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман, около границата на ограничени, строго псевдоизпъкнали области в $\mathbb{C}^n$, с C^3 и C^4 гладка граница, са получени от Ма [41] (1992 г.), Фу [26] (1995 г.), Дидерих и Форнаес [14] (2015 г.) За случая на $C^{2,\varepsilon}$ гладка граница има резултат на Николов [46], от 2015 г., според който функцията на Лемперт и псевдоразстоянието на Каратеодори имат същото гранично поведение, както псведоразстоянието на Бергман разделено с $\sqrt{n+1}$. Тези резултати са валидни и при $n = 1$ и могат да се формулират за съответните метрики. Те гласят, че ако m_G е коя да е от метриките на Каратеодори, Кобаяши или Бергман (разделена с $\sqrt{2}$), на ограничена равнинна област G, и dist е разстоянието до границата на G, то функцията $m_G - \frac{1}{2\,\mathrm{dist}}$ е ограничена, ако границата на G е C^4 гладка, а функцията $\frac{2m_G\,\mathrm{dist}-1}{\mathrm{dist}^{\frac{\varepsilon}{2}}}$ е ограничена, ако границата на G е $C^{2,\varepsilon}$ гладка ($\varepsilon \in (0,1]$). В случая на равнинни ограничени области, в настоящата дисертация се изследва граничното поведение на гореспоменатите обекти, при по-слаби предположения за гладкост на границата. По-точно, в Глава 3 се доказва, че ако $G \subset \mathbb{C}$ е област и $a \in \partial G$ е C^2 гладка гранична точка, то $m_G(z) - \frac{1}{2\,\mathrm{dist}(z)} \to \frac{1}{4}\kappa(a)$, където $\kappa(a)$ е кривината на границата на областта в точката a (вж. Теорема 3.2.1). За случая на $C^{1,\varepsilon}$ гладка гранична точка (при $\varepsilon \in (0,1]$) е установено, че $m_G(z) - \frac{1}{2d_G(z)} = O(d_G(z)^{\varepsilon-1}), z \to a$ (вж. Теорема 3.3.1). Посочени са примери на области (при $\varepsilon \in (0,1)$ и $\varepsilon = 1$), които показват, че получената оценка е оптимална (вж. Примери 3.3.2, 3.3.3). Аналогичен резултат е валиден в случая на $C^{2,\varepsilon}$ гладка гранична точка (при $\varepsilon \in (0,1)$) (вж. Теорема 3.4.1). Изяснено е и граничното поведение на псевдоразстоянията на Кобаяши, Каратеодори или Бергман (разделено с $\sqrt{2}$), около C^1 и Дини гладки гранични точки. По-точно, ако p_G означава кое да е от тези псевдоразстояния, и $a \in \partial G$ е Дини гладка точка, то $\lim\limits_{z\to a\in\partial G} p_G(z,w) - s_G(z,w) = 0$, а ако a е C^1 гладка точка, то $\lim\limits_{z\to a\in\partial G} \dfrac{p_G(z,w)}{s_G(z,w)} = 1$. В случай, че G е ограничена, с C^1 гладка граница, то $\lim\limits_{z\to\partial G} \dfrac{p_G(z,w)}{s_G(z,w)} = 1$, равномерно относно $w \in G$ (вж. теореми 3.5.1, 3.5.5).

Ще отбележим, че резултатите от Глава 3 са получени с помощта на локализация, която важи изключително само за равнинни области (вж. Твърдения 3.1.6, 3.1.7). Локализационните теореми, които важат за области с произволна размерност, не позволяват да получим тези резултати, тъй като те дават по-груби оценки, които не ни вършат работа. Също така, резултатът от Теорема 3.2.1 е основната мотивация в работата на Е. Ф. Волд [62] за подобрение на оценки на иварниантни метрики върху строгопсевдоизпъкнали области в многомерие.

В последната част на дисертацията се изследва граничното поведение на притискащите функции S_G върху равнинни области G, с Дини гладка и C^1 гладка граница. По-точно в Глава 3, Теорема 3.6.4, се доказва, че ако $G \subset \mathbb{C}$ е област с Дини гладка граница, то $\dfrac{1-S_G}{\mathrm{dist}}$ е ограничена отгоре, около всяка гранична точка на областта. Ако границата е C^1 гладка, то

$\dfrac{1 - S_G(z)}{\operatorname{dist}(z, \partial G)^\alpha} \to 0$, при $z \to a \in \partial G$, за всяко $\alpha < 1$.

Публикации и доклади, свързани с дисертацията

Резултатите, описани в дисертацията са публикувани в статиите [48, 49, 50] от списъка с цитирана литература.

Резултатите в [48] са докладвани на Докторантската конференция по математика и информатика на ИМИ-БАН през октомври 2015 г. и пред общият семинар на секция „Анализ геометрия и топология“ към ИМИ-БАН, през ноември 2015 г. Резултатите от [49] са докладвани пред общият семинар на секция „Анализ, геометрия и топология“, към ИМИ-БАН, през декември 2015 г. и на Студентската конференция по математика на ФМИ към СУ през май 2016 г. Резултатите от [50] са докладвани пред общият семинар на секция „Анализ геометрия и топология“ към ИМИ-БАН през декември 2016 г. и на международната конференция „Invariant Metrics and Squeezing Functions and Mapping Problems“ в Осло, Норвегия през март 2017 г.

Резултатите са цитирани общо 6 пъти.

Авторска справка

По мнение на автора, основните приноси в дисертацията са:

- Определяне на граничното поведение на псевдоразстоянието на Кобаяши и квазихиперболичното разстояние около C^1 гладки гранични точки на области в $\mathbb{C}^n$ (Теореми 2.2.4, 2.3.2).

- Оценки отгоре на псевдоразстоянието на Кобаяши и Квазихиперболичното разстояние около Дини гладки гранични точки на области в $\mathbb{C}^n$ (Теорема 2.4.3).

- Приложение на оценката на псевдоразстоянието на Кобаяши от Теорема 2.4.3, за продължаване на собствени холоморфни изображения между области с определени свойства на границите (Теорема 2.5.4).

- Намиране на асимптотиката на метриките на Каратеодори и Кобаяши, метриката и ядрото на Бергман, върху равнинни областти, посредством разстоянието до границата и геометрията на границата, около C^2, $C^{1,\varepsilon}$ ($\varepsilon \in (0,1]$) и $C^{2,\varepsilon}$, ($\varepsilon \in (0,1)$) гладки гранични точки (Теореми 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1).

- Примери, които показват, че резултатите от Теорема 3.3.1 не могат да се подобрят, т. е. намерени са области, за които граничното поведение на инвариантите, от Теорема 3.3.1, се реализира (Примери 3.3.2, 3.3.3).

- Определяне на граничното поведение на разстоянията на Каратеодори, Кобаяши, Бергман, около Дини гладки и C^1 гладки гранични точки на равнинни области (Теореми 3.5.1, 3.5.4).

- Оценка отдолу на притискащата функция, върху равнинни области, около Дини гладки гранични точки и асимптотична оценка на притискащата функция, около C^1 гладки гранични точки (Теорема 3.6.4).

Благодарности

Изказвам своята най-дълбока благодарност към научния ми ръководител проф. дмн Николай Николов, за цялостната подкрепа, която ми е оказвал през последните няколко години. Благодарение на него имах прекрасната възможност да навляза в една трудна област на математиката, която е предмет на активни изследвания, и да достигна до някои от нейните най-съвременни резултати.

Литература

[1] H. Alexander, *Holomorphic mappings from the ball and polydisk*, Math. Ann. 209 (1974), 249–256.

[2] H. Alexander, *Proper holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. 2,6 (1977), 137–146.

[3] D. Barrett, *Regularity of the Bergman projection on domains with transverse symmetries*, Math. Ann. 258 (1982), 441–446.

[4] E. Bedford, J. E. Fornaess, *Biholomorphic maps of weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. 45 (1978), 711–719.

[5] S. Bell, H. Boas, *Regularity of the Bergman projection in weakly pseudoconvex domains*, Math. Ann. 257 (1981), 23–30.

[6] S. Bell, E. Ligocka, *A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. 57 (1980), 283–289.

[7] S. Bell, D. Catlin, *Boundary regularity of proper holomorphic mappings*, Duke Math. J. 49, (1982), 385–396

[8] S. Bergman, *Uber die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I-II*, J. Reine Angew. Math. 169 (1933), 1–42; 172 (1935), 89–128.

[9] C. Caratheodory, *Untersuchen uber die konformen Abbildungen von feeten und veranderlichen Gebieten*, Math. Ann. 72 (1912), 107–144.

[10] F. Deng, Q. Guan, L. Zhang, *On some properties of squeezing functions on bounded domains*, Pacific J. Math. V. 57, No.2 (2012), 319–342.

[11] F. Deng, Q. Guan, L. Zhang, *Properties of squeezing functions and global transformations of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 2679–2696.

[12] K. Diederich, *Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metric in streng pseudo-konvexen Gebieten*, Math. Ann 187 (1970), 9–36.

[13] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Proper holomorphic maps onto pseudoconvex domains with real-analytic boundary*, Ann. Math. 110 (1979), 575–592.

[14] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Comparison of the Bergman and the Kobayashi metric*, Math. Annalen 254 (1980), 257–262.

[15] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Biholomorphic mappings between two-dimensional Hartogs domains with real-analytic boundaries*, Recent developments in several complex variables. Princeton x x x 1981.

[16] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Biholomorphic mappings between certain real analytic domains in* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. 245 (1979), 255–272.

[17] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Boundary regularity of proper holomorphic mappings*, Invent. Math. 67 (1982), 363–384.

[18] K. Diederich, J. E. Fornaess, G. Herbort, *Boundary behavior of the Bergman metric*, Proc. Symp. in Pure Math. 41 (1984), 59–67.

[19] K. Diederich, J.E. Fornaess, E.F. Wold, *A characterization of the ball in* $\mathbb{C}^n$, Int. J. Math. 27 (2016), 1650078, 5 p.

[20] А. Ефимов, *Обобщение теоремы Вонга-Розея для неограниченного случая*, Мат. сб. 186 (1994), No 7, 41–50.

[21] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. 26 (1974), 1–65.

[22] J. E. Fornaess, E. F. Wold, *An estimate for the squeezing function and estimates of invariant metrics, in Complex Analysis and Geometry*, 135–147, Springer Proc. Math. Stat. 144, Springer, Tokyo, 2015.

[23] J.E. Fornaess, E.F. Wold, *A non-strictly pseudoconvex domain for which the squeezing function tends to one towards the boundary*, arXiv:1611.04464.

[24] F. Forstneric, J. P. Rosay, *Localization ot the Kobayashi metric and the boundary continuity of proper holomorphic mappings*, Math. Ann. 279 (1987), 239–252.

[25] B. Fridman, *One example of the boundary behaviour of biholomorphic transformation*, Proc. Am. Math. Soc. 89 (1983), 226–228.

[26] S. Fu, *Asymptotic expansions of invariant metrics of strictly pseudoconvex domains*, Can. Math. Bull. 38 (1995), 196–206.

[27] F. W. Gehring, B.G. Osgood, *Uniform domains and the quasihyperbolic metric*, J. Anal. Math. 36 (1979), 50–74.

[28] F. Gehring, B. Palka, *Quasiconformally homogeneous domains*, J. Anal. Math. 30 (1976), 172–199.

[29] I. Graham, *Boundary behaviour of the Caratheodory and the Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains with smooth boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 219–240.

[30] L. Hormander, *L^2 estimates and existence theorems for $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. 113 (1965), 89–152.

[31] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, de Gruyter, Berlin (1993).

[32] M. Jarnicki, N. Nikolov, *Behavior of the Caratheodory metric near strictly convex boundary points*, Univ. Jag. Acta Math. XL (2002), 7–12.

[33] W. Kaup, *Uber das Randverhalten von holomorphen Automorphismen beschrankter Gebiete*, Manuscr. Math. 3 (1970), 257–270.

[34] G. M. Khenkin, *Analytic polyhedron is not biholomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain*, Dokl. Akad Nauk SSSR 210 (1973), 858–862; English transl. in Math USSR Dokl. 14 (1973), 858–862.

[35] S. Joo, K. T. Kim, *On boundary points at which the squeezing function tends to one*, arXiv:1611.08356.

[36] K. T. Kim, L. Zhang, *On the uniform squeezing property of bounded convex domains in $\mathbb{C}^n$*, Pacific J. Math. 282 (2016), 341–358.

[37] S. Kobyashi, *Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 460–480.

[38] S. Krantz, *Geometric Analysis of the Bergman Kernel and Metric*, Springer New York (2013).

[39] K. Liu, X. Sun, and S. T. Yau, *Canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces, I*, J. Differential Geom. 68:3 (2004), 571–637.

[40] K. Liu, X. Sun, and S.-T. Yau, *Canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces, II*, J. Differential Geom. 69:1 (2005), 163–216.

[41] D. Ma, *Sharp estimates for the Kobayashi metric near strongly pseudoconvex points* Contemp. Math. 137 (1992), 329–338.

[42] D. Ma, *Boundary behaviour of invariant metrics and volume forms on strongly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. 633 (1991), 673–698.

[43] G. A. Margulis, *Correspondence of boundaries during biholomorphic mapping of multidimensional domains*, All-Union Conference on the Theory of Complex Variable Functions (in Russian), FTINT, Kharkov (1971).

[44] G. Martin, *Quasiconformal and bilipschitz mappings, uniform domains and the hyperbolic metric*, Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), 169–192.

[45] G. Martin, B. G. Osgood, *The quasihyperbolic metric and the associated estimates on the hyperbolic metric*, J. Analyse Math. 47 (1986), 37–53.

[46] N. Nikolov, *Comparison of invariant functions on strongly pseudoconvex domains*, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), 180–185.

[47] N. Nikolov, *Invariant functions and metrics in complex analysis*, Dissertationes Math., 486 (2012), 1–100.

[48] N. Nikolov, L. Andreev, *Estimates of the Kobayashi and quasi-hyperbolic distances*, Ann. Mat. Pura Appl. 196 (2017), 43–50.

[49] N. Nikolov, M. Trybuła, L. Andreev, *Boundary behaviour of invariant functions on planar domains*, Comp. Var. and Ellip. Eq. Vol. 61 (2016), 1064–1072.

[50] N. Nikolov, L. Andreev, *Boundary behavior of the squeezing functions of C-convex domains and plane domains*, Int. J. Math. (to appear); arXiv:1609.02051v3.

[51] N. Nikolov, M. Trybuła, *Estimates of the Bergman distance on Dini smooth bounded planar domains*, Collect. Math. 67, (2016), 407–414.

[52] G. Pick, *Uber eine eigenschaft der konformen Abbildungen kreisformiger Bereiche*, Math. Ann. 77 (1916), 1–6.

[53] G. Pick, *Uber die Beschrankungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionwerte bewirkt werden*, Math. Ann. 77 (1916), 7–23.

[54] S.I. Pinchuk, *On proper holomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains*, Sib. Math. J. 15 (1975), 644–649.

[55] H. Poincare, *Theorie des groupes Fuchsiens*, Acta Math. 1 (1882), 1–62.

[56] H. Poincare, *Sur les groupes des equations lineaires* Acta Math. 4 (1884), 201–312.

[57] M. Range, *On the topological extension to the boundary of biholomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$, Trans AMS 216 (1976), 203–216.

[58] H. J. Reiffen, *Die differentialgeometrischen Eigenschaften der invarianten Distanzfunktion von Caratheodory*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Munster 26 (1963).

[59] H. L. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric*, Several complex variables II. Conference proceedings, University of Maryland 1970; Lecture Notes in Mathematics 185, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1971).

[60] H. L. Royden, *Hyperbolicity in complex analysis*, Annales Academia Scientiarum Fennica Series A. I. Mathematica Vol. 13 (1988), 387–400.

[61] H. A. Schwarz, *Zur Theorie der Abbildungen* Programm der eidgenossischen polytechnischen Schule in Zurich fur das Schujahr 1869-70. Gesammelte Abhandlungen II (1969), 109.

[62] E. Wold *Asymptotics of invariant metrics in the normal direction and a new characterization of the unit disk*, arXiv:1606.01794.

[63] S. K. Yeung, *Geometry of domains with the uniform squeezing property*, Adv. Math. 221:2 (2009), 547–569.